

Обратное преобразование по Лапласу  
функций Бесселя вида  
 $e^{-\alpha\sqrt{is}} I_n(\alpha\sqrt{is})$  и  $e^{\alpha i\sqrt{is}} J_n(\alpha\sqrt{is})$

И.В. Янчевский

*Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет,  
ул. Петровского, 25, 61002, Харьков, Украина  
yanchevsky@khadi.kharkov.ua*

В работе изложена процедура построения оригиналов функций Бесселя первого рода от корневого мнимого аргумента. Необходимость обращения указанных трансформант возникает, в частности, при решении задач нестационарного деформирования тонких круглых пластин.

Янчевський І.В., **Зворотнє перетворення Лапласа функцій Бесселя виду**  $e^{-\alpha\sqrt{is}} I_n(\alpha\sqrt{is})$  і  $e^{\alpha i\sqrt{is}} J_n(\alpha\sqrt{is})$ . У роботі представлена процедура побудови оригіналів функцій Бесселя першого роду від кореневого уявного аргументу. Необхідність обернення зазначених трансформант виникає, зокрема, при розв'язанні задач нестационарного деформування тонких круглих пластин.

I.V. Yanchevskiy, **Inverse Laplace transform for Bessel function like**  $e^{-\alpha\sqrt{is}} I_n(\alpha\sqrt{is})$  and  $e^{\alpha i\sqrt{is}} J_n(\alpha\sqrt{is})$ . The procedure of originals construction of the first kind Bessel functions with rooted imaginary argument has been presented. The necessity of these transformants inversion occurs at solution of thin round plates deformation non-stationary problems.

*2000 Mathematics Subject Classification: 44A10 44A20.*

С использованием интегрального преобразования Лапласа [4] по переменной  $t$  ( $s$  – комплексный параметр преобразования) общее решение дифференциального уравнения

$$\Delta\Delta y + \alpha_0^4 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = p, \quad (1)$$

где  $y = y(r, t)$ ;  $p = p(r, t)$ ;  $\alpha_0 = \text{const}$ ;  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$  – оператор Лапласа, может быть выражено через функции Бесселя первого рода нулевого порядка

$$F_1^L(s) = \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\alpha\sqrt{is}} I_0(\alpha_0 r \sqrt{is}); \quad F_2^L(s) = \frac{1}{\sqrt{s}} e^{\alpha i \sqrt{is}} J_0(\alpha_0 r \sqrt{is}), \quad (2)$$

где  $i = \sqrt{-1}$ .

В известных справочниках по операционному исчислению отсутствуют оригиналы указанных функций. Для отыскания  $F_1(t) = L^{-1}[F_1^L(s)]$  при  $\alpha = \alpha_0 r$  введем в рассмотрение функцию  $f^L(s) = e^{-s} I_0(s)$ , оригинал которой является табличным [4]

$$f(t) = \frac{H(2-t)}{\pi\sqrt{t} \cdot (2-t)}. \quad (3)$$

В случае корневого аргумента, согласно [4], получим следующее соотношение:

$$F_1^L(s) = \frac{1}{\sqrt{s}} f^L(\alpha\sqrt{is}) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 i}} \int_0^{i\infty} e^{-s\tau} \varphi\left(\frac{\tau}{\alpha^2 i}\right) d\tau,$$

где  $\varphi(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}} f^L(\sqrt{s})\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4t}} f(\tau) d\tau$ .

Это позволяет представить искомую функцию  $F_1(t)$  в виде

$$F_1(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi^3}} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^1 e^{-\frac{\tau^2}{t} \alpha^2 i} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau} \sqrt{1-\tau}}. \quad (4)$$

При построении оригинала функции  $F_2^L(s)$  воспользуемся формулами  $I_n(z) = i^{-n} J_n(iz)$ ;  $J_0(-z) = J_0(z)$  [3] и выполним замену переменной  $\alpha = i\beta$ . В результате получим в пространстве изображений функцию, процедура построения оригинала которой изложена выше:

$$F_2(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi^3}} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^1 e^{\frac{\tau^2}{t} \alpha^2 i} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau} \sqrt{1-\tau}}. \quad (5)$$

С привлечением формулы Эйлера выделим действительную и комплексную части функций  $F_1(t)$  и  $F_2(t)$ :

$$\begin{aligned} F_1(t) &= F_{Re}(t) - i \cdot F_{Im}(t); \\ F_2(t) &= F_{Re}(t) + i \cdot F_{Im}(t), \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} F_{Re}(t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi^3}} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^1 \cos\left(\frac{\tau^2 \alpha^2}{t}\right) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau} \sqrt{1-\tau}}; \\ F_{Im}(t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi^3}} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^1 \sin\left(\frac{\tau^2 \alpha^2}{t}\right) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau} \sqrt{1-\tau}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Интегралы, входящие в (7), могут быть вычислены численно. Для этого область интегрирования  $[0;1]$  разбивается на отрезки  $\Delta\tau$  и с применением

квадратурных формул они аппроксимируются конечными суммами. Шаг дискретизации  $\Delta\tau$  подбирается из условия получения устойчивого решения. Графики функций  $F_{Re}(t)$  и  $F_{Im}(t)$  для  $t > 0.002$  при  $\alpha=1$  и  $\Delta\tau=0.0001$  представлены на рисунках 1,а и 1,б кривыми 1. Отметим, что при малых  $t$  ( $t < 0.002$ ) счет становится неустойчивым.

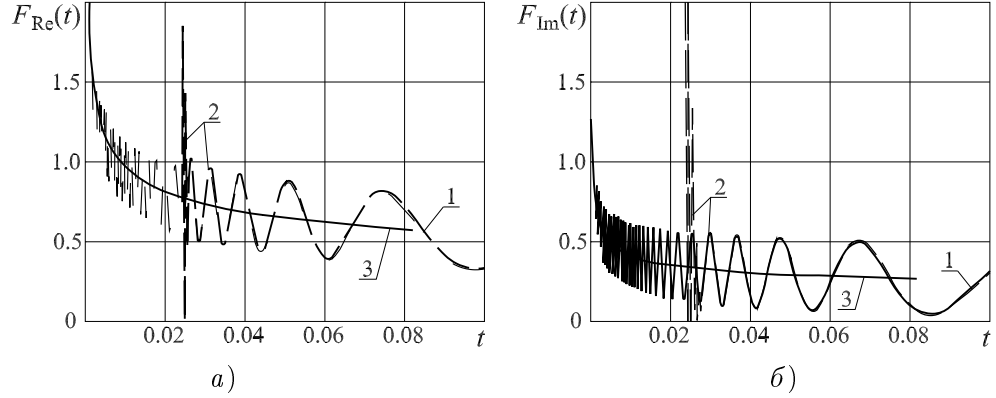


Рис. 1: Действительная и мнимая составляющие оригиналов  $F_1(t)$  и  $F_2(t)$  при  $\alpha=1$ :  $F_1(t) = F_{Re}(t) - i \cdot F_{Im}(t)$ ;  $F_2(t) = F_{Re}(t) + i \cdot F_{Im}(t)$

При относительно больших значениях аргумента  $t$  воспользуемся разложением в ряд Тейлора тригонометрических функций, входящих в (7):

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}; \quad \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Это позволяет представить функции  $F_{Re}(t)$  и  $F_{Im}(t)$  в виде

$$\begin{aligned} F_{Re}(t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi^3}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{4k}}{(2k)!} \frac{1}{t^{2k+0.5}} \int_0^1 \tau^{4k-0.5} (1-\tau)^{-0.5} d\tau = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi^3}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{4k}}{(2k)!} B\left(4k + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \frac{1}{t^{2k+0.5}}; \\ F_{Im}(t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi^3}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{4k+2}}{(2k+1)!} \frac{1}{t^{2k+1.5}} \int_0^1 \tau^{4k+1.5} (1-\tau)^{-0.5} d\tau = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi^3}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{4k+2}}{(2k+1)!} B\left(4k + \frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) \frac{1}{t^{2k+1.5}}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $B(n, m) = \int_0^1 u^{n-1} (1-u)^{m-1} du$  – бета-функция.

Фигурирующая в (8) бета-функция может быть записана как

$$B\left(n + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \pi.$$

В результате представления в виде степенных рядов для расчета функций  $F_{Re}(t)$  и  $F_{Im}(t)$  при относительно больших значениях аргумента  $t$  примут вид

$$F_{Re}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{\alpha^{4k}}{t^{2k+1/2}}; \quad F_{Im}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{\alpha^{4k+2}}{t^{2k+3/2}}, \quad (9)$$

где  $a_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{(-1)^k (8k-1)!!}{2^{4k} (2k)! (4k)!}$ ;  $b_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{(-1)^k (8k+3)!!}{2^{4k+2} (2k+1)! (4k+2)!}$ .

Используя признак Даламбера, несложно показать абсолютную сходимость рядов (9) при конечных значениях  $t$  и  $\alpha$ . Например, для  $F_{Re}(t)$  получим:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(8k+7)(8k+5)(8k+3)(8k+1)}{2^4 (2k+1)(2k+2)(4k+1)(4k+2)(4k+3)(4k+4)} \frac{\alpha^4}{t^2} = 0.$$

Графики функций  $F_{Re}(t)$  и  $F_{Im}(t)$ , полученных на основании соотношений (9) при  $\alpha = 1$ , показаны на рисунках 1,а и 1,б (кривые 2). Количество  $K$  учитываемых членов степенных рядов (9), которое обеспечивает допускаяемую погрешность вычислений  $\varepsilon$ , оценивалось по первым членам остатка ряда – поскольку ряды сходящиеся, их члены монотонно убывают и имеют строгое чередование знака (теорема Лейбница). В частности, для ряда  $F_{Re}(t)$  при  $t > T$  значение  $K$  определялось из условия  $\left| a_{K+1} \frac{\alpha^{4(K+1)}}{T^{2K+5/2}} \right| \leq \varepsilon$ . Для построения кривых 2 (рис. 1) удерживалось  $K=50$  членов, обеспечивающее приемлемую точность вычислений ( $\varepsilon=0.001$  при  $T=0.028$ ).

Рассмотрим далее процедуру инверсии трансформанты  $F_1^L(s)$  при больших значениях  $s$ , что в пространстве оригиналов соответствует малым  $t$ . Известно, что функция  $I_0(z)$  удовлетворяет модифицированному уравнению Бесселя

$$\frac{d^2 I_0(z)}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dI_0(z)}{dz} - I_0(z) = 0,$$

которое после перехода от производных по  $z$  ( $z = \alpha\sqrt{is}$ ) к производным по  $s$  преобразуется к виду

$$\frac{d^2 I_0(\alpha\sqrt{is})}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{dI_0(\alpha\sqrt{is})}{ds} - \frac{\alpha^2 i}{4s} I_0(\alpha\sqrt{is}) = 0. \quad (10)$$

Далее построим дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет трансформанта  $F_1^L(s)$  –

$$\frac{d^2 F_1^L(s)}{ds^2} + m_1^L(s) \cdot \frac{dF_1^L(s)}{ds} + n_1^L(s) \cdot F_1^L(s) = 0. \quad (11)$$

В результате подстановки в (11) выражения (2) для  $F_1^L(s)$  и сопоставления с (10), получим следующие выражения для коэффициентов  $m_1^L(s)$  и  $n_1^L(s)$ :

$$m_1^L(s) = \frac{2}{s} + \frac{1}{\sqrt{s}} \alpha \sqrt{i}; \quad n_1^L(s) = \frac{1}{s^2} \frac{1}{4} + \frac{1}{s^{3/2}} \frac{3\alpha \sqrt{i}}{4}.$$

Выполнив инверсию (11) с использованием справочных данных по операционному исчислению [4], получим однородное интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно неизвестной  $F_1(t)$ :

$$t^2 \cdot F_1(t) - \int_0^t \tau \cdot F_1(\tau) \cdot m_1(t-\tau) d\tau + \int_0^t F_1(\tau) \cdot n_1(t-\tau) d\tau = 0. \quad (12)$$

Оригиналы  $m_1(t)$  и  $n_1(t)$  являются табличными [4]:

$$m_1(t) = 2 + \frac{\alpha \sqrt{i}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{t}}; \quad n_1(t) = \frac{1}{4}t + \frac{3\alpha \sqrt{i}}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{t}.$$

Решение интегрального уравнения (12) ищем в виде ряда

$$F_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{\beta+k/2}, \quad (13)$$

где  $\beta$  и  $a_k$  – неизвестные постоянные.

В результате подстановки разложения (13) в уравнение (12), почленного интегрирования рядов с последующей компоновкой коэффициентов при одинаковых степенях  $t$ , получим следующее равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{\beta+2+\frac{k}{2}} \frac{4(\beta+k/2)(\beta+1+k/2)+1}{2(\beta+2+k/2)(\beta+1+k/2)} - \alpha \sqrt{i} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot t^{\beta+\frac{3}{2}+\frac{k}{2}} \cdot \left(\beta + \frac{1}{4} + \frac{k}{2}\right) \cdot \frac{\Gamma(\beta+1+k/2)}{\Gamma(\beta+5/2+k/2)} = 0, \quad (14)$$

где  $\Gamma(n)$  – гамма-функция.

Приравнявая к нулю члены ряда (14) при низшем показателе степени  $t$  ( $k=0$ ), получим значение  $\beta$  ( $\beta = -1/4$ ). В случае  $k > 0$  справедлива следующая рекуррентная формула, выражающая  $a_{k+1}$  через  $a_k$ :

$$a_{k+1} = a_k \frac{1}{\alpha \sqrt{i}} \frac{2k+1}{2k+2} \frac{\Gamma(3/4+k/2)}{\Gamma(1/4+k/2)}.$$

Очевидно, что решение однородного интегрального уравнения Вольтерра (12) находится с точностью до постоянного множителя – коэффициента  $a_0$ . Он определяется из условия асимптотического совпадения одночленной аппроксимации ряда (13) при  $t \rightarrow 0$  ( $F_1(t) \sim a_0 t^{-1/4}$ ) и оригинала  $F_1^L(s)$  при  $s \rightarrow \infty$ .

Для отыскания  $a_0$  воспользуемся аппроксимирующим разложением для  $I_0(z)$  при больших  $z$  [3, 5]:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \{L^{-1} [F_1^L(s)]\} \sim L^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{s}} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\alpha \sqrt{is}}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\alpha \sqrt{i}}} \frac{t^{-1/4}}{\Gamma(3/4)}.$$

В результате получено следующее значение нулевого коэффициента степенного ряда (13)

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\alpha \sqrt{i}}} \frac{1}{\Gamma(3/4)}.$$

Разделяя на действительную и мнимую части функцию  $F_1(t)$  при малых  $t$ , перепишем представление (13) в виде (6), где

$$\begin{aligned} F_{Re}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k \frac{1}{\alpha^{k+1/2}} t^{-\frac{1}{4} + \frac{k}{2}} \cos \left[ \left( \frac{k}{4} + \frac{1}{8} \right) \pi \right]; \\ F_{Im}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k \frac{1}{\alpha^{k+1/2}} t^{-\frac{1}{4} + \frac{k}{2}} \sin \left[ \left( \frac{k}{4} + \frac{1}{8} \right) \pi \right], \end{aligned} \tag{15}$$

где  $\tilde{a}_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \Gamma(3/4)}$ ;  $\tilde{a}_{k+1} = \tilde{a}_k \frac{2k+1}{2k+2} \gamma_k$ ;  $\gamma_k = \frac{\Gamma(3/4 + k/2)}{\Gamma(1/4 + k/2)}$ .

Аналогично находится оригинал функции  $F_2^L(s)$  при малых  $t$ . Графики функций  $F_{Re}(t)$  и  $F_{Im}(t)$  для малых  $t$  ( $t < 0.003$ ) обозначены на рисунках 1,а и 1,б цифрой 3. Построения выполнены при  $\alpha = 1$ .

Достоверность результатов оценивалась варьированием количества удерживаемых членов в рядах (9), (15), а также шага разбиения  $\Delta\tau$  при численном вычислении интегралов (7). При  $t > 0.025$  результаты расчетов по (9) и (7) практически совпадают (кривые 1 и 2). Наличие высокоамплитудной осцилляции кривой 2 при  $t \sim 0.025$  подтверждает факт неприменимости формул (9) для  $t < 0.025$ , связанной с потерей точности вычислений входящих в них рядов. Также видно, что формулы (15) (кривые 3) плохо описывают искомые функции при больших значениях аргумента ( $t > 0.003$ ).

Полученные результаты могут быть обобщены на случай функций Бесселя первого рода любого целого индекса  $n$ . В качестве примера представлены оригиналы функций

$$G_1^L(s) = \frac{\sqrt{i}}{s} e^{-\alpha \sqrt{is}} I_1(\alpha \sqrt{is}), \quad G_2^L(s) = \frac{\sqrt{i}}{s} e^{\alpha i \sqrt{is}} J_1(\alpha \sqrt{is}),$$

полученных на основании изложенной методики. Необходимость обращения указанных функций возникает, в частности, при удовлетворении граничных условий в пространстве оригиналов [6] при решении задач о нестационарных осесимметричных колебаниях круглых пластин гипотезы Кирхгофа-Лява, описываемых дифференциальным уравнением (1).

Исходя из равенства

$$G_1(t) = \frac{4\alpha}{\sqrt{\pi^3}} \cdot \frac{i}{\sqrt{t}} \int_0^2 e^{-\frac{\tau^2}{4t} i \alpha^2} \sqrt{\tau} \sqrt{2-\tau} d\tau = \frac{4\alpha}{\sqrt{\pi^3}} \cdot \frac{i}{\sqrt{t}} \int_0^1 e^{-\frac{\tau^2}{t} i \alpha^2} \sqrt{\tau} \sqrt{1-\tau} d\tau$$

и опуская промежуточные выкладки, запишем следующие формулы для  $G_1(t)$  и  $G_2(t)$ :

$$G_1(t) = G_{Re}(t) + i \cdot G_{Im}(t); \quad (16)$$

$$G_2(t) = -G_{Re}(t) + i \cdot G_{Im}(t),$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} G_{Re}(t) &= \frac{4\alpha}{\sqrt{\pi^3}} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^1 \sin\left(\frac{\tau^2 \alpha^2}{t}\right) \sqrt{\tau} \sqrt{1-\tau} d\tau; \\ G_{Im}(t) &= \frac{4\alpha}{\sqrt{\pi^3}} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^1 \cos\left(\frac{\tau^2 \alpha^2}{t}\right) \sqrt{\tau} \sqrt{1-\tau} d\tau. \end{aligned} \quad (17)$$

При больших  $t$  выражения для функций  $G_{Re}(t)$  и  $G_{Im}(t)$  представимы рядами по обратным степеням  $t$ :

$$G_{Re}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{\alpha^{4k+3}}{t^{2k+3/2}}; \quad G_{Im}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{\alpha^{4k+1}}{t^{2k+1/2}}, \quad (18)$$

$$\text{где } a_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{(-1)^k (8k+5)!!}{2^{4k+2} (2k+1)! (4k+4)!}; \quad b_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{(-1)^k (8k+1)!!}{2^{4k} (2k)! (4k+2)!}.$$

При относительно малых  $t$  искомые решения получены в виде:

$$\begin{aligned} G_{Re}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k \frac{1}{\alpha^{k+1/2}} t^{\frac{1}{4} + \frac{k}{2}} \cos\left[\left(\frac{k}{4} - \frac{1}{8}\right) \pi\right]; \\ G_{Im}(t) &= -\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k \frac{1}{\alpha^{k+1/2}} t^{\frac{1}{4} + \frac{k}{2}} \sin\left[\left(\frac{k}{4} - \frac{1}{8}\right) \pi\right], \end{aligned} \quad (19)$$

$$\text{где } \tilde{a}_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\Gamma(5/4)}; \quad \tilde{a}_{k+1} = \tilde{a}_k \frac{k^2 - 0.25}{2k+2} \frac{1}{\gamma_k}.$$

Результаты вычислений оригиналов  $G_1(t)$  и  $G_2(t)$  представлены на рисунке 2, на котором цифрой 1 обозначены искомые функции  $G_{Re}(t)$  и  $G_{Im}(t)$  (16), построенные в соответствии с (17) для  $t > 0.003$ . Входящие в выражения интегралы вычислены с применением квадратурной формулы средних прямоугольников. При этом шаг разбиения интервала интегрирования, как и ранее, принят равным  $\Delta\tau = 0.0001$ . Кривые 2 иллюстрируют соответствующие составляющие искомого функций для  $t > 0.042$ , найденные по формулам (18). При малых значениях аргумента  $t$  ( $t < 0.005$ ) получены

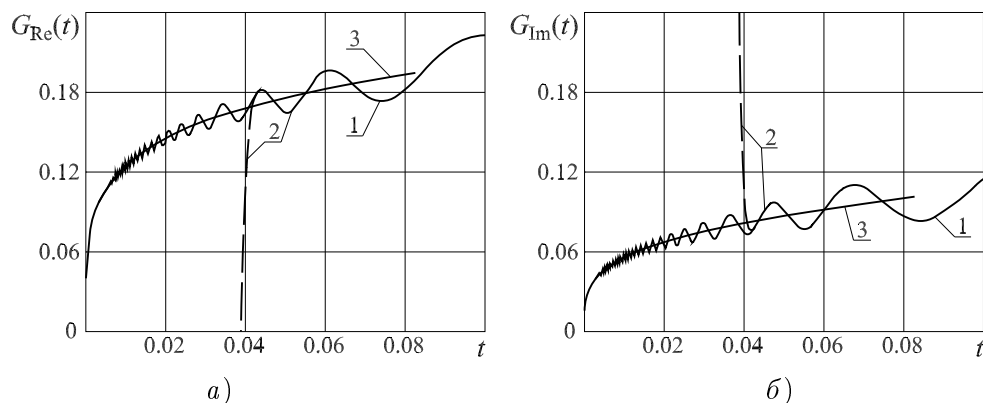


Рис. 2: Действительная и мнимая составляющие оригиналов  $G_1(t)$  и  $G_2(t)$ :  
 $G_1(t) = G_{Re}(t) + i \cdot G_{Im}(t)$ ;  $G_2(t) = -G_{Re}(t) + i \cdot G_{Im}(t)$

аппроксимирующие представления  $G_{Re}(t)$  и  $G_{Im}(t)$  в виде кривых 3, которые описываются рядами (19). Значение параметра  $\alpha$  принято равным единице.

Всплеск значений в окрестности точки  $t=0.04$  функций  $G_{Re}(t)$  и  $G_{Im}(t)$  (кривые 2), вычисленных по разложениям (18), обусловлен потерей точности рядов по обратным степеням аргумента при  $t < 0.042$ . Частичное улучшение результатов возможно за счет уменьшения шага дискретизации  $\Delta\tau$  или расширения разрядной сетки.

В целом, полученные результаты свидетельствуют об эффективности применения разработанного метода для построения оригиналов рассмотренных функций. Отметим, что функции Бесселя аргументов  $\sqrt{s^2/(1+\alpha s)}$  и  $\alpha\sqrt{s}$  ( $\alpha = \text{const}$ ;  $\text{Im}(\alpha) = 0$ ) фигурируют также при решении нестационарных задач гидродинамики вязкой сжимаемой жидкости [1].

**Благодарности.** Автор благодарен доктору физ.-мат. наук Бабаеву Арташесу Эдуардовичу за ценные замечания и советы при написании статьи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Babaev A. E. Shock loading of a cylindrical shell filled with viscous compressible liquid. // Appl. mech. – 1999. – **35**, № 11. – С. 1132–1138.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. I. Гипергеометрические функции. Функции Лежандра. – М.: Наука, 1973. – 294 с.
3. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Изд-во физ.-мат. лит-ры, 1963. – 1108 с.



4. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. – М.: Высшая школа, 1965. – 466 с.
5. Справочник по специальным функциям. // Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
6. Янютин Е. Г., Янчевский И. В., Воропай А. В., Шарапата А. С. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций. – Харьков: Изд-во ХНАДУ, 2004. – 392 с.

Статья получена: 11.05.2010; окончательный вариант: 16.02.2011;  
принята: 20.05.2011.