

Математические постановки и численное решение задач о рассеянном разрушении деформируемых твердых тел

Ю.В. Ромашов

*Национальный технический университет
"Харьковский политехнический институт", Украина
romashev@kpi.kharkov.ua*

Обсуждаются математические постановки и численные решения задач о рассеянном разрушении деформируемых твердых тел для моделирования действия на тела разнообразных внешних факторов. В качестве примера рассмотрено разрушение труб вследствие ползучести и коррозионного растрескивания.

Ромашов Ю.В., **Математичні формулювання та чисельні розв'язки задач про континуальне руйнування твердих тіл, що деформуються.** Обговорюються математичні формулювання та чисельні розв'язки задач про континуальне руйнування твердих тіл, що деформуються, для моделювання дії на тіла різноманітних зовнішніх факторів. Як приклад розглянуто руйнування труб внаслідок повзучості та корозійного розтріскування.

Yu.V. Romashov, **Mathematical formulatuions and numerical solutions of continual damaged deformable bodies.** Mathematical formulatuion and numerical solutions of continual damaged deformable bodies are discussed for different external factors simulation. Pipe damaged due to creep and stress corrosion cracking is considered as example.

2000 Mathematics Subject Classification: 74S99, 74R99.

Введение

Рассеянное (континуальное) разрушение деформируемых твердых тел имеет нелокальный характер и представляется как непрерывное зарождение и развитие дефектов на уровне микроструктуры материала без заметных изменений на макроуровне [1]. В настоящее время рассеянное разрушение

рассматривают как первую стадию процесса разрушения материалов под действием статических и циклических нагрузок [2, 3]. Актуальность проблемы рассеянного разрушения деформируемых твердых тел обусловлена ее многочисленными приложениями при обосновании ресурса конструкций.

Математическое моделирование рассеянного разрушения деформируемых твердых тел наиболее полно разработано для задач теории ползучести [1, 4, 5]. Множество определяющих параметров [6] деформируемого твердого тела (сплошной среды) в задачах ползучести кроме компонент вектора перемещений, тензоров деформаций и напряжений, температуры содержит также компоненты тензора необратимых деформаций ползучести и параметр повреждаемости [1, 4, 5, 7]. Методы решения задач ползучести обсуждаются в работах [4, 5, 7]. Задачи ползучести тонких оболочек предлагается решать итерационно, рассматривая на каждом шаге линейную краевую задачу [4]. Для приближенного решения линейных краевых задач отмечают преимущества методов конечных разностей [4] и конечных элементов [4, 5], методов Бубнова-Галеркина и сведения к задачам Коши [4]. В работе [5] рассматривается решение задач континуальной механики разрушения при ползучести пространственных тел с помощью полуаналитического метода конечных элементов, с аппроксимациями в плоскости поперечного сечения, представленными через узловые перемещения, а вдоль образующей – разложениями по полиномам. В работе [7] для решения начально-краевых задач теории ползучести используется метод Бубнова-Галеркина с глобальными аппроксимациями, которые удовлетворяют всем граничным условиям задачи, и для тел сложной формы построены при помощи методов теории R-функций, разработанных академиком В.Л. Рвачевым.

Обобщенная математическая постановка задач ресурса элементов конструкций, в том числе и при рассеянном разрушении, удобная для их последующего численного решения на ЭВМ, обсуждается в работе [8]. В данной работе обобщенные математические постановки и численные решения задач механики рассеянного разрушения деформируемых твердых тел обсуждаются для моделирования действия на тела разнообразных внешних факторов. В качестве примера рассмотрено разрушение вследствие ползучести и коррозионного растрескивания в агрессивной среде.

1. Математическая постановка задач о рассеянном разрушении деформируемых твердых тел

Деформируемое твердое тело представляем как сплошную среду, точки которой занимают область Υ , ограниченную поверхностью ν ; положения точек тела определяем методом Лагранжа при помощи радиус-вектора \vec{r} , задаваемого в моменты времени t . Под состоянием тела понимаем совокупность всех его характеристик. Принимаем, что существует конечное число независимых параметров сплошной среды, которые позволяют определять любые ее характеристики однозначно, инвариантно относительно системы координат и других ее точек [6]. Состояние тела как сплошной среды

определяем перемещениями, деформациями, напряжениями, температурой, которые представляем компонентами вектора $\mathbf{u}(t, \vec{r}) \in R^N$ [6]. Предполагаем, что рассеянное разрушение может происходить в точках тела $\vec{r} \in \Upsilon_\kappa$, где $\Upsilon_\kappa \subset \Upsilon$; границу области Υ_κ обозначаем как v_κ . Состояние рассеянного разрушения тела определяем вектором $\mathbf{v}(t, \vec{r}) \in R^S$, компонентами которого в зависимости от рассматриваемой задачи могут быть, например, деформации ползучести, параметр повреждаемости и (или) плотность микротрещин, концентрация водорода, который облегчает разрушение металлов, в частности, за счет влияния на их поверхностную энергию [8]. Задачу о рассеянном разрушении деформируемого твердого тела в общем виде формулируем как систему двух начально-краевых задач:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{p}(\mathbf{v}, \mathbf{D} \cdot \mathbf{v}; \mathbf{u}), \quad \mathbf{v}(0, \vec{r}) = \mathbf{v}_0(\vec{r}), \quad \vec{r} \in \Upsilon_\kappa, \quad \mathbf{B}_D \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}_B(t, \vec{r}), \quad \vec{r} \in v_\kappa, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{q}(t, \mathbf{u}, \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}; \mathbf{v}), \quad \mathbf{u}(0, \vec{r}) = \mathbf{u}_0(\vec{r}), \quad \vec{r} \in \Upsilon, \quad \mathbf{B}_A \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}_B(t, \vec{r}), \quad \vec{r} \in v, \quad (2)$$

где \mathbf{p} , \mathbf{D} - операторы дифференциальных уравнений скорости рассеянного разрушения и \mathbf{q} , \mathbf{A} - операторы уравнений механики деформируемого твердого тела, причем операторы \mathbf{D} и \mathbf{A} содержат частные производные только по пространственным координатам; \mathbf{v}_0 - поле вектора \mathbf{v} в момент времени $t = 0$; \mathbf{B}_D - оператор и \mathbf{v}_B - вектор условий на границе v_κ области Υ_κ ; \mathbf{u}_0 - поле вектора \mathbf{u} в момент времени $t = 0$; \mathbf{B}_A - оператор и \mathbf{u}_B - вектор условий на границе v области Υ .

Начально-краевая задача (1) представляет математическую модель рассеянного разрушения с учетом напряженно-деформированного состояния, а задача (2) - математическую модель тела как сплошной среды с учетом текущего состояния ее рассеянного разрушения. Условия существования и единственности решения задачи (1), (2), априори предполагаем выполненными.

Рассмотрим важный для математического моделирования различных физических ситуаций вопрос о целесообразности введения операторов \mathbf{D} и \mathbf{A} в математическую постановку задачи (1), (2). Для этого сопоставим общую постановку задачи (1), (2) с ее частным случаем, который отвечает разрушению вследствие ползучести и повреждаемости при статических нагрузках [7]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{p}(\mathbf{v}; \mathbf{u}), \quad \mathbf{p}(\mathbf{v}; \mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}(0, \vec{r}) = \mathbf{0}, \quad \vec{r} \in \Upsilon, \quad (3)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{f}, \quad \vec{r} \in \Upsilon, \quad \mathbf{B}_A \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}_B(\vec{r}), \quad \vec{r} \in v, \quad (4)$$

где \mathbf{v} - вектор, составленный из компонент тензора деформаций ползучести и параметра повреждаемости; \mathbf{u} - вектор из параметров состояния деформируемого твердого тела: компонент перемещений, деформаций, напряжений, температуры; \mathbf{A} , \mathbf{C} - линейные операторы и \mathbf{f} - заданный вектор.

Независимость скорости вектора \mathbf{v} от частных производных по пространственным координатам $\mathbf{D} \cdot \mathbf{v}$ в уравнении (3) отражает невозможность самопроизвольного накопления ползучести вследствие ее градиента в отличие от, например, процесса диффузии, скорость которой определяется градиентом концентрации. Оператор \mathbf{A} в уравнении (4) отвечает уравнениям механики деформируемого термоупругого твердого тела и уравнениям теплопроводности. В частном случае малых деформаций и линейной связи между упругими деформациями и напряжениями оператор \mathbf{A} является линейным. Оператор \mathbf{C} в уравнении (4) характеризует влияние на напряженно-деформированное состояние тела необратимых деформаций ползучести и параметра повреждаемости. Поскольку полная деформация в точке тела представляется суммой обратимой упругой деформации и необратимой деформации ползучести, то оператор \mathbf{C} является линейным [4, 5, 7]. Если пренебречь ползучестью и повреждаемостью, то задача (3), (4) сведется к линейной краевой задаче теории упругости:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad \vec{r} \in \Upsilon, \quad \mathbf{B}_A \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}_B(\vec{r}), \quad \vec{r} \in \nu, \quad (5)$$

Таким образом, в виде (1), (2) представлена обобщенная постановка задач механики рассеянного разрушения деформируемого твердого тела. После конкретизации вида входящих в (1), (2) операторов можно получать различные частные задачи, например, о рассеянном разрушении вследствие ползучести (3), (4), а также о напряженно-деформируемом состоянии тела (5).

2. Решение задач о рассеянном разрушении деформируемых твердых тел методом Бубнова-Галеркина

Применим метод Бубнова-Галеркина для решения задач механики рассеянного разрушения твердого тела, сформулированных в общем виде (1), (2), и рассмотрим его частные реализации в задаче (3), (4) и в задаче (5).

Для решения задачи (1), (2) векторы \mathbf{v} и \mathbf{u} представим глобальными аппроксимациями, которые тождественно удовлетворяют всем граничным условиям при произвольных значениях подлежащих последующему определению коэффициентов:

$$\mathbf{v}(t, \vec{r}) = \mathbf{v}_v(t, \vec{r}) + \mathbf{V}_{(n)}(\vec{r}) \cdot \mathbf{v}_{(n)}(t), \quad (6)$$

$$\mathbf{u}(t, \vec{r}) = \mathbf{u}_v(t, \vec{r}) + \mathbf{U}_{(n)}(\vec{r}) \cdot \mathbf{u}_{(n)}(t), \quad (7)$$

где n - число пробных функций; $\mathbf{v}_v(t, \vec{r})$, $\mathbf{u}_v(t, \vec{r})$ - векторы, продлевающие заданные граничные значения внутрь исследуемой области и $\mathbf{V}_{(n)}(\vec{r})$, $\mathbf{U}_{(n)}(\vec{r})$ - матрицы из специально выбираемых пробных функций; $\mathbf{v}_{(n)}(t)$, $\mathbf{u}_{(n)}(t)$ - векторы, составленные из коэффициентов аппроксимаций.

Построение векторов \mathbf{v}_v , \mathbf{u}_v и матриц пробных функций $\mathbf{V}_{(n)}$, $\mathbf{U}_{(n)}$, обеспечивающих тождественное удовлетворение аппроксимациями (6), (7) всех граничных условий задачи, для заданных граничных значений \mathbf{v}_B , \mathbf{u}_B , вида

операторов \mathbf{B}_D и \mathbf{B}_A граничных условий, формы областей Υ , Υ_κ и их границ v , v_κ может быть реализовано методами теории R-функций, предложенными академиком В.Л. Рвачевым [9]. Эти методы в настоящее время широко применяются при решении разнообразных задач, в частности, линейного изгиба и колебаний пологих оболочек [10].

Векторы $\mathbf{v}_{(n)}(t)$, $\mathbf{u}_{(n)}(t)$ коэффициентов аппроксимаций в момент времени $t = 0$ следует определять при помощи соответствующих начальных условий из (1), (2), которые в общем случае можно удовлетворить лишь интегрально:

$$\int_{\Upsilon_\kappa} \mathbf{V}_{(n)}^T \cdot (\mathbf{v}_v(0, \vec{r}) + \mathbf{V}_{(n)}(\vec{r}) \cdot \mathbf{v}_{0(n)} - \mathbf{v}_0(\vec{r})) d\Upsilon = 0, \quad (8)$$

$$\int_{\Upsilon} \mathbf{U}_{(n)}^T \cdot (\mathbf{u}_v(0, \vec{r}) + \mathbf{U}_{(n)}(\vec{r}) \cdot \mathbf{u}_{0(n)} - \mathbf{u}_0(\vec{r})) d\Upsilon = 0, \quad (9)$$

где $\mathbf{v}_{0(n)} = \mathbf{v}_{(n)}(0)$; $\mathbf{u}_{0(n)} = \mathbf{u}_{(n)}(0)$.

Следуя методу Бубнова-Галеркина, подставим аппроксимации (6), (7) в дифференциальные уравнения (1), (2) и запишем условия ортогональности невязок выполнения этих уравнений и пробных функций внутри исследуемой области. В результате с учетом начальных условий (8), (9) для определения векторов коэффициентов аппроксимаций получим задачу Коши

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}_{(n)}}{dt} &= \mathbf{P}_{(n)}^{-1} \cdot \mathbf{p}_{(n)}(t, \mathbf{v}_{(n)}; \mathbf{u}_{(n)}), \quad \mathbf{v}_{(n)}(0) = \mathbf{v}_{0(n)}, \\ \frac{d\mathbf{u}_{(n)}}{dt} &= \mathbf{Q}_{(n)}^{-1} \cdot \mathbf{q}_{(n)}(t, \mathbf{u}_{(n)}; \mathbf{v}_{(n)}), \quad \mathbf{u}_{(n)}(0) = \mathbf{u}_{0(n)}, \end{aligned} \quad (10)$$

где матрицы $\mathbf{P}_{(n)}$, $\mathbf{Q}_{(n)}$ и векторы $\mathbf{p}_{(n)}$, $\mathbf{q}_{(n)}$ записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{(n)} &= \int_{\Upsilon_\kappa} \mathbf{V}_{(n)}^T \cdot \mathbf{V}_{(n)} d\Upsilon, \quad \mathbf{Q}_{(n)} = \int_{\Upsilon} \mathbf{U}_{(n)}^T \cdot \mathbf{U}_{(n)} d\Upsilon, \\ \mathbf{p}_{(n)}(t, \mathbf{v}_{(n)}; \mathbf{u}_{(n)}) &= \int_{\Upsilon_\kappa} \mathbf{V}_{(n)}^T \cdot \bar{\mathbf{p}}(t, \mathbf{v}_{(n)}; \mathbf{u}_{(n)}) d\Upsilon, \\ \bar{\mathbf{p}}(t, \mathbf{v}_{(n)}; \mathbf{u}_{(n)}) &= \mathbf{p}(\mathbf{v}_v + \mathbf{V}_{(n)} \cdot \mathbf{v}_{(n)}, \mathbf{D} \cdot (\mathbf{v}_v + \mathbf{V}_{(n)} \cdot \mathbf{v}_{(n)}); \mathbf{u}_v + \mathbf{U}_{(n)} \cdot \mathbf{u}_{(n)}), \\ \mathbf{q}_{(n)}(t, \mathbf{u}_{(n)}; \mathbf{v}_{(n)}) &= \int_{\Upsilon} \mathbf{U}_{(n)}^T \cdot \bar{\mathbf{q}}(t, \mathbf{u}_{(n)}; \mathbf{v}_{(n)}) d\Upsilon, \\ \bar{\mathbf{q}}(t, \mathbf{u}_{(n)}; \mathbf{v}_{(n)}) &= \mathbf{q}(\mathbf{u}_v + \mathbf{U}_{(n)} \cdot \mathbf{u}_{(n)}, \mathbf{A} \cdot (\mathbf{u}_v + \mathbf{U}_{(n)} \cdot \mathbf{u}_{(n)}); \mathbf{v}_v + \mathbf{V}_{(n)} \cdot \mathbf{v}_{(n)}). \end{aligned}$$

Численное решение задачи Коши (10) не содержит принципиальных трудностей и может быть осуществлено каким-либо приближенным методом.

В частной задаче (3), (4) аппроксимации (6), (7) и начальное значение для вектора \mathbf{v} примут более простой вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t, \vec{r}) &= \mathbf{V}_{(n)}(\vec{r}) \cdot \mathbf{v}_{(n)}(t), \quad \mathbf{v}_{0(n)} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{u}(t, \vec{r}) &= \mathbf{u}_v(\vec{r}) + \mathbf{U}_{(n)}(\vec{r}) \cdot \mathbf{u}_{(n)}(t). \end{aligned} \quad (11)$$

Применение метода Бубнова-Галеркина к дифференциальным уравнениям задачи (3), (4) с использованием аппроксимаций (11) приведет к более простой по сравнению с задачей (10) задаче Коши

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}_{(n)}}{dt} &= \mathbf{P}_{(n)}^{-1} \cdot \mathbf{P}_{(n)}(\mathbf{v}_{(n)}; \mathbf{u}_{(n)}), \quad \mathbf{v}_{(n)}(0) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{A}_{(n)} \cdot \mathbf{u}_{(n)} + \mathbf{C}_{(n)} \cdot \mathbf{v}_{(n)} &= \mathbf{f}_{(n)}, \end{aligned} \quad (12)$$

где матрицы $\mathbf{A}_{(n)}$, $\mathbf{C}_{(n)}$ и вектор $\mathbf{f}_{(n)}$ определяются так:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{(n)} &= \int_{\Upsilon} \mathbf{U}_{(n)}^T \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{U}_{(n)}) d\Upsilon, \quad \mathbf{C}_{(n)} = \int_{\Upsilon} \mathbf{U}_{(n)}^T \cdot (\mathbf{C} \cdot \mathbf{V}_{(n)}) d\Upsilon, \\ \mathbf{f}_{(n)} &= \int_{\Upsilon} \mathbf{U}_{(n)}^T \cdot (\mathbf{f} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_v) d\Upsilon. \end{aligned}$$

Для решения задачи (12) второе уравнение разрешим относительно вектора $\mathbf{u}_{(n)}$:

$$\mathbf{u}_{(n)}(\mathbf{v}_{(n)}) = \mathbf{A}_{(n)}^{-1} \cdot (\mathbf{f}_{(n)} - \mathbf{C}_{(n)} \cdot \mathbf{v}_{(n)}). \quad (13)$$

Выражение (13) позволяет исключить вектор $\mathbf{u}_{(n)}$ из первого уравнения (12):

$$\frac{d\mathbf{v}_{(n)}}{dt} = \mathbf{p}_{(n)}(\mathbf{v}_{(n)}), \quad \mathbf{v}_{(n)}(0) = \mathbf{0}, \quad (14)$$

где $\mathbf{p}_{(n)}(\mathbf{v}_{(n)}) = \mathbf{P}_{(n)}^{-1} \cdot \mathbf{P}_{(n)}(\mathbf{v}_{(n)}; \mathbf{u}_{(n)}(\mathbf{v}_{(n)}))$.

В частном случае краевой задачи (5) аппроксимация (7) вектора \mathbf{u} примет наиболее простой вид:

$$\mathbf{u}(\vec{r}) = \mathbf{u}_v(\vec{r}) + \mathbf{U}_{(n)}(\vec{r}) \cdot \mathbf{u}_{(n)}, \quad (15)$$

где $\mathbf{u}_{(n)}$ - вектор числовых значений коэффициентов аппроксимаций.

Применение метода Бубнова-Галеркина к дифференциальному уравнению задачи (5) с использованием аппроксимации (15) приведет к системе линейных алгебраических уравнений:

$$\mathbf{A}_{(n)} \cdot \mathbf{u}_{(n)} = \mathbf{f}_{(n)}. \quad (16)$$

Как видно из разрешающих уравнений (10), (14) и (16), метод Бубнова-Галеркина позволяет представлять в обобщенном виде численные решения широкого класса задач механики деформируемого твердого тела в том числе и с учетом рассеянного разрушения.

3. Приложение к задаче о ресурсе теплообменных труб пароперегревателей паровых котлов

Теплообменные трубы пароперегревателей современных паровых котлов эксплуатируются длительное время под внутренним давлением до 15 МПа агрессивной среды – перегретого пара при температуре металла более 500°C,

что заставляет изготавливать их из жаропрочных нержавеющей сталей аустенитного класса [11]. Последние склонны к коррозионному растрескиванию – образованию трещин при наличии растягивающих напряжений на поверхности, взаимодействующей с агрессивной средой; высокие эксплуатационные температуры способствуют активации процессов ползучести [12].

Рассмотрим задачу о коррозионном растрескивании при ползучести трубы внутреннего радиуса r_1 и наружного – r_2 , изготовленной из жаропрочной хромоникелевой нержавеющей стали типа 18-8 аустенитного класса. Принимаем, что труба находится под внутренним давлением p , осевые нагрузки отсутствуют; разность температур в рабочем и исходном состояниях $\Delta T = 500^\circ\text{C}$; материал трубы считаем однородным и изотропным. С учетом осевой симметрии задачи разрешающие уравнения рассматриваем в цилиндрических координатах $r_1 \leq r \leq r_2$ в смешанной форме относительно напряжений $\sigma_{rr} = \sigma_{rr}(t, r)$, $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}(t, r)$, перемещения $u_r = u_r(t, r)$, деформаций ползучести $c_{rr} = c_{rr}(t, r)$, $c_{\theta\theta} = c_{\theta\theta}(t, r)$, параметра повреждаемости вследствие ползучести $\omega_c = \omega_c(t, r)$, $0 \leq \omega_c \leq 1$ и параметра коррозионного растрескивания $\omega_{SCC} = \omega_{SCC}(t, r)$, $0 \leq \omega_{SCC} \leq 1$. Значения $\omega_c = 0$ и $\omega_{SCC} = 0$ отвечают состоянию материала в исходном состоянии; значения $\omega_c = 1$ и $\omega_{SCC} = 1$ отвечают состоянию материала в момент образования макроповреждения. Полные деформации, складывающиеся из обратимых упругих деформаций и необратимых деформаций ползучести, считаем малыми.

Для описания деформирования материала трубы при ползучести с учетом повреждаемости используем распространенный вариант теории ползучести инкрементального типа [7] и предложенную в работе [13] континуальную модель роста трещин коррозионного растрескивания сталей в растворах хлорида магния. В результате разрешающие уравнения запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_{rr}}{\partial t} &= \frac{3}{2}B \frac{\sigma_e^{q-1}}{(1-\omega_c)^q} s_{rr}, & \frac{\partial c_{\theta\theta}}{\partial t} &= \frac{3}{2}B \frac{\sigma_e^{q-1}}{(1-\omega_c)^q} s_{\theta\theta}, \\ \frac{\partial \omega_c}{\partial t} &= A \left(\frac{\sigma_e}{1-\omega_c} \right)^k, & \frac{d\omega_{SCC}}{dt} &= \frac{a \cdot 10^{b \cdot \omega_{SCC} + c x}}{(1-\omega_{SCC})^d}, \\ c_{rr}(0, r) &= 0, \quad c_{\theta\theta}(0, r) = 0, \quad \omega_c(0, r) = 0, \quad \omega_{SCC}(0) = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} &= 0, \quad \sigma_{rr}(t, r_1) = -p, \quad \sigma_{rr}(t, r_2) = 0, \\ -\frac{1}{E} \sigma_{rr} + \frac{\nu}{E} \sigma_{\theta\theta} + \frac{\partial u_r}{\partial r} - \alpha \Delta T - c_{rr} &= 0, \\ -\frac{1}{E} \sigma_{\theta\theta} + \frac{\nu}{E} \sigma_{rr} + \frac{u_r}{r} - \alpha \Delta T - c_{\theta\theta} &= 0, \end{aligned} \quad (18)$$

где $s_{rr} = \left(\frac{2}{3} \sigma_{rr} - \frac{1}{3} \sigma_{\theta\theta} \right)$ и $s_{\theta\theta} = \left(\frac{2}{3} \sigma_{\theta\theta} - \frac{1}{3} \sigma_{rr} \right)$ – компоненты девиатора напряжений; $\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr})^2 + \sigma_{rr}^2 + \sigma_{\theta\theta}^2}$ – эквивалентное напряжение

для скорости деформаций ползучести и повреждаемости; $\sigma_{SCC}(t) = \sigma_{\theta\theta}(t, r_1)$ - эквивалентное напряжение коррозионного растрескивания; χ - содержание хлорида магния; B, q, A, k - характеристики материала, устанавливаемые по кривым ползучести и длительной прочности вплоть до разрушения; a, b, c, d - характеристики материала, устанавливаемые по кривым длительной коррозионной прочности вплоть до разрушения; E, ν и α - модуль Юнга, коэффициенты Пуассона и линейного расширения материала.

Задача, сформулированная в виде (17), (18), отвечает частной проблеме механики рассеянного разрушения (3), (4) при значениях $S = 4$ и $N = 3$:

$$\mathbf{v} = (c_{rr} \quad c_{\theta\theta} \quad \omega_c \quad \omega_{SCC})^T, \quad \mathbf{u} = (\sigma_{rr} \quad \sigma_{\theta\theta} \quad u_r)^T, \quad (19)$$

$$\mathbf{p}(\mathbf{v}; \mathbf{u}) = \left(\frac{3B\sigma_e^{q-1}s_{rr}}{2(1-\omega_c)^q} \quad \frac{3B\sigma_e^{q-1}s_{\theta\theta}}{2(1-\omega_c)^q} \quad A \left(\frac{\sigma_e}{1-\omega_c} \right)^k \quad \frac{a \cdot 10^{b\sigma_{SCC}+c\chi}}{(1-\omega_{SCC})^d} \right)^T, \quad (20)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & \frac{\nu}{E} & \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\nu}{E} & -\frac{1}{E} & \frac{1}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} & -\frac{1}{r} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \alpha\Delta T \\ \alpha\Delta T \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Аппроксимации искоемых неизвестных представим в виде:

$$\begin{aligned} c_{rr}(t, r) &= \sum_{i=1}^n v_i^{(1)}(t) \cdot \varphi_i(r), & c_{\theta\theta}(t, r) &= \sum_{i=1}^n v_i^{(2)}(t) \cdot \varphi_i(r), \\ \omega_c(t, r) &= \sum_{i=1}^n v_i^{(3)}(t) \cdot \varphi_i(r), & \omega_{SCC}(t, r) &= v_i^{(4)}(t), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(t, r) &= -p \frac{r-r_2}{r_1-r_2} + \frac{r_2-r}{r_2-r_1} \frac{r-r_1}{r_2-r_1} \sum_{i=1}^n u_i^{(1)}(t) \cdot \varphi_i(r), \\ \sigma_{\theta\theta}(t, r) &= \sum_{i=1}^n u_i^{(2)}(t) \cdot \varphi_i(r); & u_r(t, r) &= \sum_{i=1}^n u_i^{(3)}(t) \cdot \varphi_i(r), \end{aligned} \quad (23)$$

где $\varphi_i(r)$ - заданные координатные функции; $v_i^{(j)}(t)$, $j = 1, 2, 3, 4$ и $u_i^{(j)}(t)$, $j = 1, 2, 3$ - искоемые коэффициенты аппроксимаций.

Аппроксимации (22), (23) можно представить в форме (11):

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_{(n)} &= \left(v_1^{(1)} \dots v_n^{(1)} v_1^{(2)} \dots v_n^{(2)} v_1^{(3)} \dots v_n^{(3)} v_1^{(4)} \right)^T, \\
\mathbf{u}_{(n)} &= \left(u_1^{(1)} \dots u_n^{(1)} u_1^{(2)} \dots u_n^{(2)} u_1^{(3)} \dots u_n^{(3)} \right)^T, \\
\mathbf{V}_{(n)} &= \begin{pmatrix} \varphi_1 & \dots & \varphi_n & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \varphi_1 & \dots & \varphi_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \varphi_1 & \dots & \varphi_n & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{U}_{(n)} &= \begin{pmatrix} \psi_1 & \dots & \psi_n & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \varphi_1 & \dots & \varphi_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \varphi_1 & \dots & \varphi_n \end{pmatrix}, \\
\mathbf{u}_v &= \begin{pmatrix} r - r_2 \\ -p \frac{r - r_2}{r_1 - r_2} & 0 & 0 \end{pmatrix}^T,
\end{aligned} \tag{24}$$

где $\psi_i = \psi_i(r) = \frac{r_2 - r}{r_2 - r_1} \frac{r - r_1}{r_2 - r_1} \varphi_i(r)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Выражения (19)-(21) и (24) позволяют в рассматриваемой задаче свести определение коэффициентов аппроксимаций к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями (14). Рассмотрим результаты расчетов теплообменных труб при следующих исходных данных:

$$r_1 = 17 \text{ мм}, \quad r_2 = 21 \text{ мм}, \quad p = 13,8 \text{ МПа}, \quad \chi = 5\%, \tag{25}$$

$$E = 1,62 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \nu = 0,3, \quad \alpha = 18,4 \cdot 10^{-6} 1/^\circ\text{C}, \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
B &= 8,859 \cdot 10^{-13} \text{ МПа}^{-q} / \text{час}, \quad q = 2,023, \\
A &= 3,799 \cdot 10^{-35} \text{ МПа}^{-k} / \text{час}, \quad k = 12,344,
\end{aligned} \tag{27}$$

$$a = 1,645 \cdot 10^{-7}, \quad b = 6,133 \cdot 10^{-3}, \quad c = 9,306 \cdot 10^{-2}, \quad d = 1. \tag{28}$$

Размеры трубы и внутреннее давление (25) отвечают выполненным из нержавеющей стали 12Х18Н12Т аустенитного класса конвективным поверхностям промежуточного пароперегревателя парового котла Еп-670-13,8-545 БТ производства ПО "СИБЭНЕРГОМАШ" (г. Барнаул) [11]. Характеристики термоупругого деформирования материала (26), отвечающие температуре металла 500°C, взяты из работы [14]. Константы кинетических уравнений ползучести и длительной прочности материала трубы (27) получены обработкой приведенных в работе [14] изохронных кривых ползучести и длительной прочности стали типа 18-8. Значения констант (28), характеризующих коррозионное растрескивание материала трубы, приняты по данным работы [13] и позволяют удовлетворительно моделировать действие агрессивной среды второго контура ядерных энергетических установок с водо-водяными реакторами на теплообменные трубы парогенераторов, если содержание хлорида магния принимать как $\chi = 5 \dots 10\%$. В качестве координатных

функцій $\varphi_i(r)$ при виконанні розрахунків використовувались поліноми Чебышева 1-го рода; число n пробних функцій збільшувалося вплоть до удовлетворительного совпадения решений, полученных для чисел n и $n + 1$ пробных функций.

Наиболее интересные результаты расчетов, иллюстрирующие перераспределение во времени окружных напряжений вследствие ползучести, представлены на рис. 1. Окружные напряжения, как видно из последнего уравнения (17), определяют скорость роста трещин коррозионного растрескивания. Поскольку агрессивная среда действует на внутреннюю поверхность трубы, то ползучесть способствует замедлению коррозионного растрескивания за счет уменьшения окружных напряжений (рис. 1).

Исчерпание ресурса трубы определяем вектором $\mathbf{w} = \mathbf{w}(t, r)$, компонента w_1 которого характеризует поврежденность материала вследствие коррозионного растрескивания, w_2 – необратимую деформацию ползучести, w_3 – поврежденность материала вследствие ползучести:

$$w_1(t) = \omega_{SCC}(t), \quad w_2(t, r) = \frac{c_i(t, r)}{c_*}, \quad w_3(t, r) = \omega_c(t, r), \quad (29)$$

где $c_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(c_{\theta\theta} - c_{rr})^2 + (c_{rr})^2 + (c_{\theta\theta})^2}$ – интенсивность деформаций ползучести [15]; $c_* = 0,01$ – деформация ползучести, допускаемая для конструкций паровых котлов за время эксплуатации 10^5 час [12].

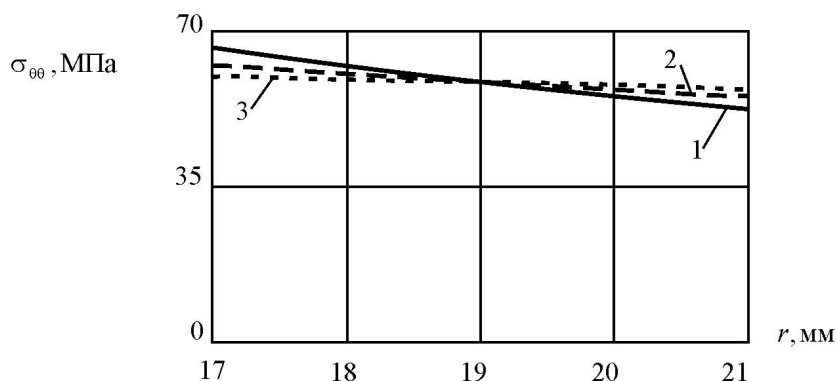


Рис. 1. Перераспределение во времени окружных напряжений:
1 – $t = 0$; 2 – $t = 4,9 \cdot 10^4$ час; 3 – $t = 4,4 \cdot 10^5$ час

Компоненты вектора \mathbf{w} принимают значения в интервале $[0, 1]$, причем их нулевые значения отвечают материалу трубы в исходном состоянии, а значение, равное единице – состоянию материала трубы в момент образования макроповреждения. Результаты расчетов показывают, что первые макроповреждения образуются на внутренней поверхности трубы $r = r_1$ после $t_* \cong 4,4 \cdot 10^5$ час эксплуатации. Представленные на рис. 2 результаты расчетов вектора \mathbf{w} в точке $r = r_1$, показывают, что преобладающим механизмом

исчерпания ресурса трубы является коррозионное растрескивание, характеризуемое компонентой w_1 ; за время растрескивания трубы ее ресурс w_2 по предельной деформации ползучести $c_* = 0,01$ исчерпан всего на 20%, а повреждаемость w_3 вследствие ползучести составляет $\sim 8 \cdot 10^{-7}$.

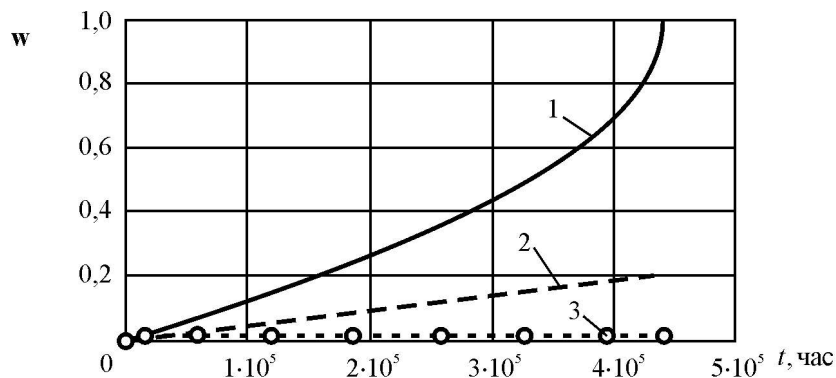


Рис. 2. Оценки степени исчерпания ресурса в точке $r = r_1$:
1 — w_1 ; 2 — w_2 ; 3 — w_3

Заключение

В виде системы начально-краевых задач представлена обобщенная математическая постановка задачи механики рассеянного разрушения деформируемого твердого тела, позволяющая моделировать разнообразные внешние факторы; рассмотрено решение этой системы методом Бубнова-Галеркина. Исследовано рассеянное разрушение вследствие ползучести и коррозионного растрескивания теплообменных труб пароперегревателей паровых котлов. Установлено, что определяющим механизмом исчерпания ресурса является коррозионное растрескивание, а ползучесть способствует его замедлению за счет уменьшения окружных напряжений. Ресурс элементов конструкций можно повышать за счет уменьшения скорости их рассеянного разрушения путем выбора размеров и формы, применения новых материалов, управления условиями эксплуатации. Для теплообменных труб паровых котлов выбор размеров, формы и применение новых материалов ограничены не только сопротивлением ползучести и стойкостью против коррозионного растрескивания, но и другими факторами, в частности, условиями теплообмена. Наиболее эффективный путь повышения ресурса теплообменных труб состоит в управлении условиями эксплуатации, а именно — в поддержании водно-химического режима, обеспечивающего как можно меньшее содержание в паре агрессивных агентов, вызывающих коррозионное растрескивание.

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю.Н. Введение в механику разрушения. – М.: Наука, 1987. – 80 с.
2. Лебедев А.А., Музыка Н.Р., Волчек Н.Л. Определение поврежденности конструкционных материалов по параметрам рассеяния характеристик твердости // Проблемы прочности. – 2002. – 4. – С. 5–11.
3. Трощенко В.Т. Некоторые особенности роста усталостных трещин на различных стадиях их развития // Проблемы прочности. – 2003. – 6. – С. 5–29.
4. Бурлаков А.В., Львов Г.И., Морачковский О.К. Ползучесть тонких оболочек. – Харьков: Вища школа, Изд-во при Харьк. ун-те, 1977. – 124 с.
5. Баженов В.А., Гуляр А.И., Майборода Е.Е., Пискунов С.О. Полуаналитический метод конечных элементов в задачах континуальной механики разрушения при ползучести пространственных тел сложной конфигурации и их систем. Сообщение 1. Разрешающие соотношения полуаналитического метода конечных элементов и алгоритмы решения задач континуального разрушения при ползучести // Проблемы прочности. – 2002. – 5. – С. 5–16.
6. Горшков А.Г., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Основы тензорного анализа и механика сплошной среды: Учебник для вузов. – М.: Наука, 2000. – 214 с.
7. Морачковский О.К., Ромашов Ю.В. К решению начально-краевых задач теории ползучести // Прикладная механика. – 2009. – Т. 45, 10. – С. 33–44.
8. Ромашов Ю. Обобщенная математическая постановка задач ресурса элементов конструкций // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур / Під заг. ред. І.О. Луковського, Г.С. Кіта, Р.М. Кушніра. – Львів: Інститут прикладних проблем математики і механіки ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2010. – 512 с. – С. 495–497.
9. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наукова думка, 1982. – 522 с.
10. Курпа Л.В. Метод R-функций для решения линейных задач изгиба и колебаний пологих оболочек. – Харьков: НТУ "ХПИ", 2009. – 408 с.
11. Котельные установки и парогенераторы: Справочное пособие / Сост. Е.А. Бойко, А.А. Шпиков. – Красноярск: КГТУ, 2003. – 230 с.
12. Резников М.И., Липов Ю.М. Паровые котлы тепловых электростанций. – М.: Энергоиздат, 1981. – 242 с.

13. Морачковский О.К., Ромашов Ю.В. Континуальная модель роста трещин коррозионного растрескивания для расчета ресурса конструкций // *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. – 2010. – **2**. – С. 111–116.
14. Нормы расчета на прочность оборудования и трубопроводов атомных энергетических установок (ПНАЭ Г-7-002-86) / Госатомэнергонадзор СССР. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 525 с.
15. Писаренко Г.С., Можаровский Н.С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. – К.: Наук. думка, 1981. – 496 с.

Статья получена: 2.12.2010; окончательный вариант: 22.12.2010;
принята: 12.01.2011.