Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.9 № 790, 2007, с.4–40

А.М. Ляпунов – создатель современной теории устойчивости

В.И. Коробов

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, пл. Свободы, 4, 61077, Харьков, Украина
E-mail: vkorobov@univer.kharkov.ua

Работа посвящена 150-летию со дня рождения всемирно известного ученого, академика Санкт-Петербургской Академии Наук, профессора Харьковского университета Александра Михайловича Ляпунова. Приведены основные результаты А.М. Ляпунова по устойчивости движения, являющиеся основой современной теории устойчивости. Прослежены пути развития этой теории – частичная устойчивость, векторные функции Ляпунова, устойчивость в банаховых пространствах. Приведено развитие метода функций Ляпунова на управляемые системы – метод функции управляемости. На основе этого метода решены задачи допустимого синтеза управления для различных классов систем. Результаты проиллюстрированы примерами.
2000 Mathematics Subject Classification 34D20, 93D30, 49J15, 93B50, 93B52.

1. Введение

6 -го июля исполнилось 150 лет всемирно известному ученому математику и механику, профессору Харьковского университета, академику Санкт-Петербургской Академии Наук Александру Михайловичу Ляпунову.

В нашем университете Александр Михайлович работал с 1885 года по 1902 год. В это время, в расцвете своих творческих сил, А.М. Ляпуновым была создана теория устойчивости движения. Теории устойчивости была посвящена его докторская диссертация «Общая задача об устойчивости движения». Защита диссертации состоялась 30 сентября 1892 года в Московском университете, оппонентами которой являлись профессор Н.Е. Жуковский и профессор Б.К. Млодзеевский. В этом же году диссертация была опубликована. В этой фундаментальной работе Ляпунов всесторонне рассмотрел проблему устойчивости движения систем с конечным числом степеней свободы. А.М. Ляпунов дал математическое определение устойчивости и её методы исследования. Метод функций Ляпунова является основным методом исследования устойчивости нелинейных систем, описываемых дифференциальными уравнениями. В январе 1893 года А.М. Ляпунов получил звание ординарного профессора Харьковского университета.

К настоящему времени проведено громадное количество исследований по устойчивости движения и её развитию, опубликовано большое количество монографий, авторами которых являются Е.А Барбашин, А.С. Галиулин, Ю.Л. Далецкий, Б.П. Демидович, Г.Н. Дубошин, В.И. Зубов, В.И. Коробов, Н.Н Красовский, М.Г. Крейн, В.М. Кунцевич, М. Лалуа, А.М. Летов, А.И. Лурье, И.Г. Малкин, А.А. Мартынюк, В.М. Матросов, Д.Р Меркин, М.Н. Моисеев, Н.Н. Моисеев, Н.А. Перестюк, В.В. Румянцев, Н. Руш и П. Абетс, А.Я. Савченко, А.М. Самойленко, Т.К. Сиразетдинов, Г.М. Скляр, М.М. Хапаев, Р.З. Хасьминский, В.А. Якубович, W. Hahn, W. Krabs, V. Lakshmikantham, S. Leela, J.P. La Salle, S. Lefschetz, T. Yoshizawa. Это далеко не полный перечень! Работы А.М. Ляпунова, полный список которых можно найти, например, в [2, 70], явились основой для возникновения новых направлений в математике. В данной статье не охвачены все направления развития исследований А.М. Ляпунова по устойчивости, но приведенные показывают мощное влияние идей А.М. Ляпунова на современные исследования.

Сам термин ”устойчивость” не имел в математике четкого определения. Этот термин приобрел в математике и механике строгость в смысле ”устойчивость по Ляпунову”. Эйлер рассматривал понятия устойчивости и неустойчивости заданных форм равновесного состояния. Если при одной и той же нагрузке система может находится в нескольких формах равновесного состояния, то такие формы неустойчивы, поскольку достаточно приложить малое возмущение, чтобы система из одного равновесного состояния перешла в другое равновесное состояние. Если смежных равновесных состояний нет, то форма устойчива. В статике существовал принцип, известный как принцип Торичелли: в системе тяжелых тел, находящихся в равновесии, центр масс занимает относительно наиболее низкое положение, какое только возможно [59].

Вот что пишет сам А.М. Ляпунов в своей книге ”Лекции по теоретической механике”: ”Положения равновесия, как известно, разделяются на устойчивые и неустойчивые. Основанием для этого служит характер движения, которое получает система после того, как точки ее были бесконечно мало удалены от их положения равновесия и приведены в движение с бесконечно малыми скоростями. Если это движение таково, что расстояния точки от положения равновесия и скорости остаются бесконечно малыми, то рассматриваемое положение равновесия называется устойчивым. Так, например, тяжелый стержень, один конец которого неподвижен, может иметь два положения равновесия, в которых направление его совпадает с направлением вертикали. То из положений равновесия, в котором центр тяжести стержня ниже неподвижной его точки, – устойчиво, а другое – неустойчиво.” Далее он пишет: ”Мы теперь покажем, что те положения равновесия, для которых потенциал есть минимум, суть положения устойчивого равновесия. Теорема эта была извест-

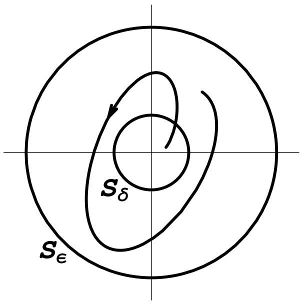

Рис. 1:

на уже давно. Первое доказательство ее было дано Лагранжем. Некоторые дополнения к ней были сделаны Пуассоном. Но и после этих дополнений доказательство оставалось не достаточно строгим. Строгое доказательство ее было предложено Лежен Дирихле."

Ранее задачами устойчивости движения занимались Лаплас, Лагранж, Томсон, Тет, Дирихле, Раус, Жуковский, Пуанкаре. Исследования устойчивости и неустойчивости движения систем проводились, как правило, по первому приближению, что недостаточно для обоснования устойчивости или неустойчивости рассматриваемого движения. В своей докторской диссертации Александр Михайлович пишет по этому поводу следующее: "Известно, что существуют случаи, когда рассматриваемая задача (устойчивости) допускает приведение к некоторой задаче о минимумах, максимумах. Но область вопросов, которые могут быть таким путем разрешаемы, весьма ограничена, и в большинстве случаев приходится прибегать к каким-либо иным методам.

Прием, которым пользуются обыкновенно, приводится к тому, что из исследуемых дифференциальных уравнений отбрасываются все члены выше первого измерения относительно величины x_s, и вместо первоначальных рассматриваются получаемые таким путем линейные уравнения."

Здесь Ляпунов имел ввиду работы Томсона и Тэта [74], Рауса [71, 72], Жуковского [12].

2. Основные результаты А.М. Ляпунова по устойчивости движения

Приведем определение устойчивости и асимптотической устойчивости нулевого решения (положения равновесия). К этому случаю сводится исследование устойчивости произвольного решения.

Нулевое решение системы $\dot{x} = f(t,x)$ ($f(t,0) = 0$) называется устойчивым по Ляпунову (или просто устойчивым), если для любого числа $\varepsilon > 0$ и $t_0 \geq 0$ существует $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ такое, что для всех начальных условий $x_0 = x(t_0)$ таких, что $\|x_0\| \leq \delta$, выполнено $\|x(t)\| \leq \varepsilon$ при $t \geq t_0$ (рис. 1); равномерно устойчивым (П.П. Персидский, 1936), если δ не зависит от t_0.

Нулевое решение называется асимптотически устойчивым, если:

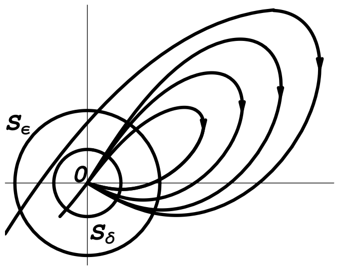

Рис. 2:

1) оно устойчиво;

2) для любого t_0 существует $\delta_1 > 0$ такое, что $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$, если $\|x(t_0)\| \le \delta_1$.

Эти определения звучат также естественно, как, например, определение непрерывности функции $f(x)$:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \quad \|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon.$$

Столь естественное определение устойчивости дало возможность многочисленным исследованиям не только в механике, но и в математике, сделало устойчивость ее неотъемлемой частью.

Для линейных систем для асимптотической устойчивости достаточно требовать, чтобы $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$, и из этого следует устойчивость нулевого решения. Для нелинейных систем это не так. Н.Н. Красовский предложил в 1953 году пример [29], в котором $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$, но нулевое решение не является устойчивым, а, следовательно, и не является асимптотически устойчивым. Позднее такого вида примеры предложили Р.Э. Виноград (1957 г.), Хан (1967 г.). Характер траектории в таких примерах может быть таким, как показано на рис. 2. Точка нуль является точкой притяжения.

Одними из основных результатов метода функции Ляпунова являются:

1) теоремы Ляпунова об устойчивости, об асимптотической устойчивости;

2) теоремы Ляпунова о неустойчивости;

3) устойчивость по первому приближению;

4) исследование устойчивости в критических случаях.

Для исследования устойчивости А.М. Ляпунов предложил ввести вспомогательную функцию $V(t,x)$, которая теперь называется функцией Ляпунова, такую, что $V(t,x) > 0$ при $x \ne 0$ и $V(t,0) = 0$, и понятие производной $\dot V(t,x)$ функции $V(t,x)$ в силу системы $\dot x = f(t,x)$

$$\dot V(t,x) = \frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(t,x)}{\partial x_i}\, f_i(t,x).$$

Теорема 2.1 (А.М. Ляпунов). *Если существуют функции $V(t,x)$ и $W(x)$ такие, что $V(t,0) = 0$, $W(x) > 0$ при $x \ne 0$, $W(0) = 0$, $V(t,x) \ge W(x)$*

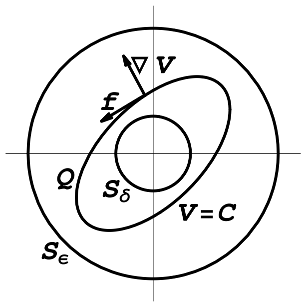

Рис. 3:

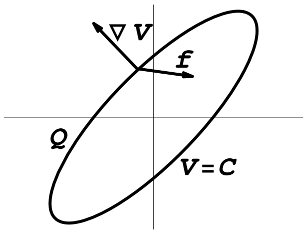

Рис. 4:

при $x \neq 0$, и если $\dot V(t,x) \le 0$, то нулевое решение устойчиво; если, к тому же $V(t,x) \rightrightarrows 0$ (равномерно по t), а $\dot V(t,x) < 0$ при $x \neq 0$, то решение асимптотически устойчиво.

Геометрическая трактовка. Пусть рассматриваемая система является автономной. Если $(\nabla V, f) \le 0$, где f – правая часть системы $\dot x = f(x)$, то траектория $x(t)$ этой системы остается в области $\mathrm{Q} = \{x : \ V(x) \le C\}$, которую, за счет выбора числа C, можно погрузить в заданный шар S_ε радиуса ε, а число δ, в свою очередь, можно выбирать из условия, чтобы шар S_δ радиуса δ принадлежал области Q (рис. 3). Поэтому траектория $x(t)$, начинающаяся в произвольной точке шара S_δ, не покидает области Q, а, следовательно, и шара S_ε, что означает устойчивость нулевого решения системы. Теорему об асимптотической устойчивости можно трактовать с точки зрения поиска минимума функции, что делает ее доказательство прозрачным. Рассмотрим задачу поиска минимума функции Ляпунова $V(x)$. Минимум этой функции достигается в точке нуль. Многие методы поиска минимума функции основаны на том, что в рассматриваемой произвольной точке x определяется направление f, в котором функция убывает. В этом случае вектор f направлен внутрь области, ограниченной поверхностью уровня, а следовательно, выполняется неравенство $\dot V = (\nabla V, f) < 0$ (рис. 4). В случае выполнения теоремы об асимптотической устойчивости это неравенство справедливо, следовательно, как отмечалось выше, нулевое решение устойчиво и при этом вектор f, являющийся правой частью системы, задан и таков, что это неравенство выполнено, и поэтому значение функции Ляпунова на траектории убывает и происходит приближение к ее точке минимума $x_{\min} = 0$.

Примеры. 1. Рассмотрим систему $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -\sin x$, описывающую колебания маятника. Выберем функцию Ляпунова $V = y^2/2 + (1 - \cos x)$. Так как

$$\dot{V} = y\dot{y} + \sin x \cdot \dot{x} = -y \sin x + y \sin x = 0,$$

то нулевое решение будет устойчивым.

2. Для уравнения $\ddot{x} + \dot{x} + \sin x = 0$ выберем функцию Ляпунова в виде

$$V = \dot{x}^2 + (x + \dot{x})^2 + 4(1 - \cos x).$$

Так как $\dot{V} = -2(\dot{x}^2 + x \sin x)$, то нулевое решение этого уравнения будет асимптотически устойчивым.

3. Рассмотрим систему $\dot{x} = (I(t) + A(t,x))x$, где $I(t)$ – диагональная матрица с непрерывными диагональными элементами $I_{ii}(t)$, $A(t,x)$ – кососимметрическая матрица с непрерывными по t, x элементами, удовлетворяющими условию Липшица по x. Выберем функцию Ляпунова в виде $V = (x,x)$. Тогда имеем $\dot{V} = 2(I(t)x,x)$. Если $I_{ii}(t) < 0$ $(i = 1,\ldots,n)$, то есть асимптотическая устойчивость. А если $I_{ii}(t) \leq 0$ $(i = 1,\ldots,n)$, то нулевое решение устойчиво.

Далее в пункте 2.3 будет показано, что для систем такого вида возможна устойчивость даже в случае, если $I_{ii}(t)$ не знакоопределены.

Метод функции Ляпунова является наиболее общим методом исследования устойчивости. Основная трудность, связанная с применением этого метода, состоит в построении функции Ляпунова. В этом всегда заключается основная проблема в прикладных исследованиях. Так, для линейных систем с постоянной матрицей $\dot{x} = Ax$ функцию Ляпунова можно искать в виде $V(x) = \frac{1}{2}(Fx,x)$, где F – положительно определенная матрица. Это связано со следующими рассуждениями. Используя формулу Тейлора, представим функцию $V(x)$ в виде

$$V(x) = V(0) + V'(0)x + \frac{1}{2}(V''(0)x,x) + r(x).$$

Так как $V(0) = 0$ и поскольку точка $x = 0$ является минимумом функции $V(x)$, то $V'(0) = 0$ и $V''(0) > 0$. Отбрасывая остаток и обозначая $F = V''(0)$, получаем, что функцию Ляпунова можно искать в виде $V(x) = \frac{1}{2}(Fx,x)$. Дифференцируя это равенство в силу системы, получаем

$$\dot{V}(x) = ((FA + A^*F)x,x).$$

Если найдется матрица $F > 0$ такая, что $((FA + A^*F)x,x) \leq 0$, то нулевое решение устойчиво, а если же $((FA + A^*F)x,x) < 0$, то нулевое решение асимптотически устойчиво. В этих случаях матрицу F можно искать из уравнения

$$FA + A^*F = -W,$$

которое называется уравнением Ляпунова, где $W > 0$ $(W \geq 0)$ – наперед заданная матрица. В случае асимптотической устойчивости нулевого решения системы матрица F имеет вид $F = \int\limits_0^\infty e^{A^*t}We^{At}dt$.

Один из возможных методов нахождения функции Ляпунова является метод Четаева [59] построения функции V в виде связки интегралов. Пусть для системы $\dot{x} = f(t,x)$ известны k первых интегралов: $c_1 \equiv \varphi_1(t,x)$, $\ldots$, $c_k \equiv \varphi_k(t,x)$. Следовательно, для функции

$$V(t,x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \left(\varphi_i(t,x) - \varphi_i(t_0,0)\right) + \sum_{i=1}^{k} \beta_i \left(\varphi_i^2(t,x) - \varphi_i^2(t_0,0)\right)$$

производная в силу системы удовлетворяет равенству $\dot{V}(t,x) = 0$ и $V(t_0,0){=}0$. При условии существования коэффициентов $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\beta_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1,\ldots,k)$ таких, что функция $V(t,x)$ будет положительно определенной (в случае автономной системы должно быть $V(x) > 0$ при $x \neq 0$, а в неавтономном случае должно выполняться неравенство $V(t,x) \geq w(x) > 0$ при $x \neq 0$ для некоторой непрерывной функции $w(x)$), нулевое решение исходной системы будет устойчиво. Более подробно методы построения функции Ляпунова для различного вида систем рассмотрены, например, в книге Е.А. Барбашина [4].

Как уже отмечалось, один из основных приемов исследования нелинейных систем основан на их линеаризации – исследование устойчивости по первому приближению. Работы Жуковского о прочности движения и ряда других авторов основывались на линейном приближении. Устойчивость (неустойчивость) нулевого решения первого приближения не означает устойчивость (неустойчивость) нулевого решения исходной нелинейной системы. Лишь в работах Пуанкаре, относящимся к системам 2-го и к некоторым системам 3-го порядков, был дано строгое обоснование. Ляпунов своим методом подробно исследовал случаи нелинейных систем произвольного порядка, когда по устойчивости (неустойчивости) решения первого приближения можно судить об устойчивости (неустойчивости) решения нелинейной системы.

Пусть правая часть системы $\dot{x} = f(t,x)$ имеет вид

$$f_s(t,x_1,\ldots,x_n) = \sum_{r=1}^{n} p_{sr} x_r + \sum_{m_1+\ldots+m_n \geq 2} P_s^{(m_1,\ldots,m_n)} x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n},$$

где p_{sr}, $P_s^{(m_1,\ldots,m_n)}$ некоторые постоянные. Если у всех собственных значений матрицы линейной части системы вещественные части меньше нуля, то нулевое решение асимптотически устойчиво. Если хотя бы одна из них положительна, то решение неустойчиво. В случае, когда p_{sr} являются функциями времени и периодичные, то с помощью линейного преобразования рассматриваемую систему можно отобразить на систему, линейная часть Px которой имеет постоянную матрицу P, при этом свойства устойчивости (неустойчивости) сохраняются. Если система приближения есть правильная, т.е. характеристические числа – отрицательные, то невозмущенное движение устойчиво для исходной нелинейной системы.

В решении задачи устойчивости нелинейной системы по первому приближению А.М. Ляпунов видел одно из своих главных достижений.

Теорема 2.2 (А.М. Ляпунов). *Пусть $\dot{x} = Ax + r(t,x)$. Если все собственные значения матрицы A имеют строго отрицательные вещественные части и $\|r(t,x)\|/\|x\| \to 0$ при $x \to 0$ равномерно относительно t, то нулевое решение асимптотически устойчиво.*

В качестве примера рассмотрим уравнение колебания маятника в сопротивляющейся среде $\ddot{x} + a\dot{x} + b\sin x = 0$ $(a > 0,\ b > 0)$, которое заменой $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ сводится к системе

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -b\sin x_1 - ax_2. \end{cases}$$

Поскольку $\sin x_1 = x_1 + r(x_1)$, то эта система принимает вид

$$\dot{x} = Ax + R(x), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}, \quad R(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -br(x_1) \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение матрицы A имеет вид $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$, а так как a и b положительны, то вещественные части собственных значений матрицы A отрицательны, и, следовательно, положение равновесия асимптотически устойчиво.

Ляпуновым получены результаты по неустойчивости движения. Рассмотрим теорему, которую часто называют *третьей теоремой Ляпунова.*

Теорема 2.3. *Если существует допускающая бесконечно малый высший предел функция V, т.е. $\lim\limits_{\|x\|\to 0} V(t,x) = 0$ (равномерно относительно $t \geq t_0$), производная которой по времени $\dot{V}$, взятая в силу системы $\dot{x} = f(t,x)$ $(f(t,0) = 0)$, является знакоопределенной во всех точках области $Q = \{(t,x) :\ t \geq t_0, \|x\| \leq h\}$, а сама функция V в любой подобласти области Q не является знакопостоянной, знака, противоположного с $\dot{V}$, то нулевое решение $x \equiv 0$ системы $\dot{x} = f(t,x)$ неустойчиво.*

Основными ее условиями является требование выполнения неравенства $\dot{V} > 0$ в некоторой окрестности нуля и требование существования точек x_0 таких, что $V(t_0,x_0)\dot{V}(t_0,x_0) > 0$.

Теорема 2.4 (А.М. Ляпунов). *Если существует функция $V(x) > 0$ при $x \neq 0$ такая, что $\dot{V} = \lambda V + W (\lambda > 0)$, где $W \geq 0$, то решение $x \equiv 0$ – неустойчиво.*

Ляпунов изучил вопрос неустойчивости положения равновесия по первому приближению.

Теорема 2.5 (А.М. Ляпунов). *Рассмотрим систему вида*

$$\dot{x} = Ax + r(t,x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\| \leq H.$$

Пусть при $\|x\| \leq H$ существуют постоянные $M > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что выполнена оценка $\|r(t,x)\| \leq M\|x\|^{1+\alpha}$. Пусть среди собственных значений ма-

трицы A существует хотя бы одно, имеющее положительную вещественную часть. Тогда положение равновесия $x \equiv 0$ неустойчиво.

А.М. Ляпунов решил вопрос об устойчивости нелинейной системы, когда характеристическое уравнения имеет один, равный нулю, корень или два чисто мнимых корня при остальных корнях с отрицательными вещественными частями. Им даны условия устойчивости по первому приближению для системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = X(x_1, \ldots, x_n), \\ \dfrac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + p_s x + X_s(x_1, \ldots, x_n), \quad s = 1, \ldots, n, \end{cases} \qquad (I)$$

и системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\lambda y + X(x_1, \ldots, x_n), \\ \dfrac{dx}{dt} = \lambda x + Y(x_1, \ldots, x_n), \quad \lambda \neq 0, \\ \dfrac{dx_s}{dt} = \alpha_s x + \beta_s y + p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + X_s(x_1, \ldots, x_n), \quad s = 1, \ldots, n, \end{cases} \qquad (II)$$

где $X, Y, X_1, \ldots, X_n$ – голоморфные функции переменных $x, y, x_1, \ldots, x_n$, разложения которых начинаются с членов, не ниже 2-го порядка, p_{sr}, p_s α_s, β_s – постоянные.

Матрица линейной части системы (I) имеет нулевое собственное значение, а матрица линейной части системы (II) имеет собственные значения $\pm i\lambda$,. Пусть вещественные части собственных значений матрицы $P = \left(p_{sr}\right)_{s,r=1}^{n}$ системы (I) являются отрицательными. В этом случае может быть как устойчивость, так и неустойчивость. В связи с этим такие случаи называются критическими. Приведем соответствующие примеры.

Рассмотрим *пример Ляпунова* [35, стр. 118] в случае наличия нулевого собственного значения. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = (3m-1)x^2 - (m-1)y^2 - (n-1)z^2 + (3n-1)yz - 2mzx - 2nxy, \\ \dot{y} = -y + x + (x - y + 2z)(y + z - x), \\ \dot{z} = -z + x - (x + 2y - z)(y + z - x). \end{cases}$$

Корни характеристического уравнения первого приближения это $0; -1; -1$.

Идея получения условий устойчивости состоит в следующем. В положении равновесия выполнены равенства $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$, $\dot{z} = 0$. Из второго и третьего уравнений исходной системы при $\dot{y} = 0$, $\dot{z} = 0$ находятся y и z в виде рядов по x, которые подставляются в правую часть первого уравнения. В случае устойчивости ряд в правой части должен начинаться со слагаемого, которое содержит x в нечетной степени (иначе будет неустойчивость, например, в случае $\dot{x} = -x^{2k}$, $k = 0, 1, \ldots$).

Положим $\dot{y} = 0, \dot{z} = 0$, тогда из двух последних равенств системы имеем

$$y = x + 2x^2 - 6x^3 - 30x^4 + \dots,$$
$$z = x - 2x^2 - 6x^3 + 30x^4 + \dots.$$

Подставляя эти выражения в правую часть первого уравнения для $\dot{x}$, получаем

$$\dot{x} = 4(5m - 7n)x^4 + 24(m - n)x^5 + \dots$$

Если $5m - 7n \neq 0$, то нулевое решение неустойчиво. Если $5m = 7n$, то нулевое решение неустойчиво при m и n положительных, а при m и n отрицательных нулевое решение устойчиво. Если $m = n = 0$, то

$$2\dot{x} = (z - 2y - x)\dot{y} + (y - 2z - x)\dot{z}.$$

Так как $\dot{y} = 0, \dot{z} = 0$, то из этого равенства следует, что $\dot{x} = 0$, и есть устойчивость.

Рассмотрим пример системы

$$\dot{x} = y + \alpha x^3, \quad \dot{y} = -x + \alpha y^3,$$

где α – постоянная. Матрица линейного приближения имеет собственные значения $\pm i$. Возьмем в качестве функции Ляпунова функцию $V = x^2 + y^2$. Её производная для линейной системы $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$ равна нулю, так как $\dot{V} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 2xy - 2yx = 0$. В силу исходной системы производная V равна

$$\dot{V} = 2x(y + \alpha x^3) + 2y(-x + \alpha y^3) = 2\alpha(x^4 + y^4).$$

Отсюда следует, что, если $\alpha < 0$, то выполнены условия теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. Если же $\alpha > 0$, то $\dot{V} > 0$ $(x^2 + y^2 \neq 0)$ и имеет место неустойчивость, а при $\alpha = 0$ – устойчивость.

Рассмотрим систему [35, стр. 165]

$$\dot{x} = -y + \alpha yz, \quad \dot{y} = x + \beta xz, \quad \dot{z} = -kz + \gamma xy.$$

Здесь $\lambda_{1,2} = \pm i$, $\lambda_3 = -k$, $k > 0$. При выполнении условия $(\alpha+\beta)\gamma > 0$ нулевое решение этой системы будет неустойчивым, а при выполнении условия $(\alpha + \beta)\gamma \leq 0$ нулевое решение будет устойчивым.

Особенно для прикладных исследований важно изучение критических случаев, поэтому им посвящено много работ.

При жизни у Ляпунова было немного учеников. Среди них знаменитый ученый – академик Владимир Андреевич Стеклов. А.М. Ляпунов приехал в Харьков когда В.А. Стеклов был уже на третьем курсе. Своими прекрасными лекциями он привил многим студентам университета любовь к математике. Благодаря А.М. Ляпунову, В.А. Стеклов нашел свое призвание в математике и начал научную деятельность. Но ни ученики А.М. Ляпунова ни его коллеги развитием теории устойчивости не занимались. И достаточно долгое время

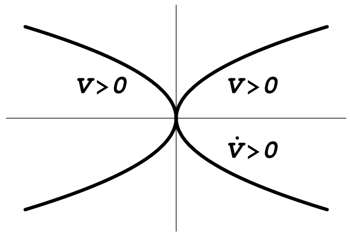

Рис. 5:

развития теории Ляпунова не было. Дальнейшее развитие его теории относится к 30-м годам прошлого века – это исследования Н.Г. Четаева, а также его коллег: Г.В. Каменкова, П.А. Кузьмина, И.Г. Малкина, П.П. Персидского и др.

В 1946 году Н.Г. Четаев опубликовал теперь хорошо известную теорему о неустойчивости, значительно усилившую теорему Ляпунова о неустойчивости.

Теорема 2.6 (Н.Г. Четаев [59]). *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что возможно найти функцию $V(t,x)$, ограниченную в области $V>0$, существующей при всяком $t \geq t_0$ и для сколь угодно малых по абсолютной величине значений переменных x_s, производная которых $\dot V$ в силу этих уравнений была бы определенно положительной в области $V>0$, то невозмущенное движение неустойчиво.*

Теорема Четаева о неустойчивости нашла широкое применение.

Пример к теореме Четаева. Рассмотрим систему [41]

$$\dot x_1 = x_1^2 + 2x_2^5, \quad \dot x_2 = x_1 x_2^2.$$

Выберем функцию $V = x_1^2 - x_2^4$. Тогда $\dot V = 2x_1\dot x - 4x_2^3\dot x_2 = 2x_1^3$ $(x_1 > 0)$. В области $Q = \{(x1, x2) : x1 > x_2^2\}$ (рис. 5) будет $V>0$, $\dot V > 0$ и, следовательно, нулевое решение (движение) неустойчиво.

После публикации Н.Г. Четаевым монографии "Устойчивость движения" и возникновения Казанской школы по устойчивости движения усилился интерес к теории устойчивости как в СССР, так и за рубежом.

Исследования устойчивости движения проводились Н.П. Еругиным, Н.Н. Красовским, В.М. Матросовым, П.П. Персидским и многими другими. Широко известно обобщение теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости – теорема Барбашина-Красовского в случае автономной системы. Одно из основных условий в модификации теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости является то, что производная функции Ляпунова в силу системы $\dot V$ может обращаться в нуль на многообразии, не содержащих целых траекторий. Это иллюстрирует следующий пример.

Рассмотрим систему [41]

$$\dot x_1 = -x_1 + 3x_2^2, \quad \dot x_2 = -x_1 x_2 - x_2^3.$$

Выберем функцию Ляпунова в виде $V = (x_1^2 + x_2^2)/2$. Тогда $\dot{V} = -(x_1 - x_2^2)^2$ и $x_1 - x_2^2 = 0$ определяет многообразие, на котором производная функции Ляпунова обращается в нуль. Проверим, что это многообразие содержит только точку $(0,0)$. Действительно, дифференцируя в силу системы равенство $x_1 - x_2^2 = 0$, получаем

$$\dot{x}_1 - 2x_2\dot{x}_2 = (-x_1 + 3x_2) - (-x_1x_2 - x_2^3)2x_2 = 2x_2^2 + 4x_2^4 = 0 \quad \text{при} \quad x_2 = 0,$$

но тогда $x_1 = 0$.

2.1. Устойчивость по части переменных

Постановка задачи об устойчивости движения относительно части переменных принадлежит А.М. Ляпунову. При исследовании одного из критических случаев [36, стр. 272] Ляпунов отметил, что: "Можно рассматривать более общую задачу: об устойчивости того же движения, но по отношению не ко всем, а только к некоторым из величин $x_1, \ldots, x_n$, например – по отношению к величинам $x_1, \ldots, x_m$ $(m < n)$". Однако сам Ляпунов этой задачей не занимался. К исследованию этой задачи привлек внимание И.Г. Малкин [37, стр.\nobreakspace {}49-50], указавший условия модификаций теорем Ляпунова для случай устойчивости по части переменных. Регулярные исследования устойчивости движения по части переменных начаты В.В. Румянцевым [47] в 1957 году. Им доказаны теоремы об устойчивости, асимптотической устойчивости в терминах функции $V(t,x) = V(t, x_1, \ldots, x_n)$, знакоопределенной по отношению к переменным $x_1, \ldots, x_m$. Пусть $y = (x_{k_1}, \ldots, x_{k_m})$. Функция $V(t,x)$ называется y-положительно определенной, если существует положительно определенная $W(y)$ такая, что $V(t,x) \geq W(y)$. Понятие частичной устойчивости дает возможность расклассифицировать устойчивость по всем переменным, на устойчивость или асимптотическую устойчивость по одной части переменных и неустойчивость по другой, что значительно расширяет класс исследуемых прикладных задач. Подробное изложение по частичной устойчивости содержится в монографии Румянцева В.В. и Озиранера А.С. [48].

2.2. Устойчивость движения при постоянно действующих возмущениях

При решении конкретных прикладных задач имеет значение не только установление факта устойчивости положения равновесия $x = 0$ системы

$$\dot{x} = f(t,x), \quad f(t,0) = 0,$$

но и доказательство сохранения этого свойства для системы

$$\dot{x} = f(t,x) + r(t,x),$$

где $r(t,x)$ – возмущение, которое, как правило, предполагается малым. Это связано, например, с тем, что уравнение $\dot{x} = f(t,x)$ носит приближенный характер, либо $f(t,x)$ может быть первым приближением. Влияние малых сил $r(t,x)$ на устойчивость впервые изучалась Н.Г. Четаевым и С.С. Артемьевым. Г.Н. Дубошиным понятие устойчивости при постоянно действующих возмущениях введено в 1940 году.

Определение. *Невозмущенное движение $x = 0$ называется устойчивым при постоянно действующем возмущении, если для любого $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in [0,+\infty)$ существует $\delta(\varepsilon,t_0) > 0$ такое, что если $\|r(t,x)\| \le \delta$ и $\|x(t_0)\| < \delta$, то $\|x(t)\| < \varepsilon$ при $t \ge t_0$.*

Теорема 2.7 (И.Г. Малкин [37]). *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $a(\|x\|) \le V(t,x) \le b(\|x\|)$, где $a \ge 0$, $b \ge 0$, $a(0) = 0$, $b(0) = 0$, a и b – строго возрастающие функции;

2) $\dot{V}(t,x) \le -c(\|x\|)$, где $c \ge 0$, $c(0) = 0$, c – строго возрастающая функция;

3) $\|\partial V(t,x)/\partial x\| \le M$.

Тогда решение $x = 0$ устойчиво при постоянно действующих возмущениях.

2.3. Векторные функции А.М. Ляпунова

Метод сравнения. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f(t,0) = 0$$

и скалярное уравнение (уравнение сравнения) $\dot{u} = \omega(t,u)$. Метод сравнения исследует соотношения, которые должны существовать между этими уравнениями, чтобы свойства устойчивости нулевого решения уравнения сравнения влекло свойства устойчивости нулевого решения первого уравнения.

Лемма 2.1 ([58], [75]). *Пусть задача Коши для уравнения $\dot{u} = \omega(t,u)$ имеет единственное решение при $t \ge t_0 \ge 0$. Пусть скалярная функция $V(t)$ удовлетворяет условиям: 1) $\dot{V} \le \omega(t,V(t))$; 2) $V(t_0) \le u_0$.*

Тогда $V(t) \le u(t)$.

Теорема 2.8 (К. Кордуняну [17]). *Пусть существует функция $\omega(t,u)$, $\omega(t,0) = 0$, и существует функция $V(t,x)$ такая, что:*

1) $V(t,x) \ge a(\|x\|)$, $a(0) = 0$, a – строго возрастающая функция;

2) $\dot{V}(t,x) \le \omega(t,V(t,x))$.

Тогда устойчивость (асимптотическая устойчивость) решения $u = 0$ уравнения $\dot{u} = \omega(t,u)$ влечет устойчивость (асимптотическую устойчивость) нулевого решения уравнения $\dot{x} = f(t,x)$.

Пример. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = (I \sin t + A(t,x))x,$$

где I – единичная матрица, $A(t,x)$ – кососимметрическая матрица с непрерывными по t, x элементами, удовлетворяющими условию Липшица по x. Выберем $V=(x,x)$, тогда $\dot V = 2V(x)\sin t$ не является знакопостоянной, однако поскольку решение $u=0$ уравнения сравнения $\dot u = 2u\sin t$ устойчиво, то $x=0$ – устойчиво.

В 1962 году Р. Беллманом и В.М. Матросовым был предложен метод векторных функций Ляпунова. Он расширяет применение метода Ляпунова. Суть метода векторных функций состоит в следующем. Для системы $\dot x = f(t,x)$ вводится векторная функция Ляпунова $V=(V_1,\dots,V_k)$ и соответствующая ей вспомогательная система сравнения $\dot y = \varphi(t,y)$. Устойчивость (асимптотическая устойчивость) нулевого решения системы сравнения влечет устойчивость (асимптотическую устойчивость) нулевого решения исходной системы.

Теорема 2.9 (В.М. Матросов [39]). *Для устойчивости (асимптотической устойчивости) нулевого решения системы $\dot x = f(t,x)$ достаточно, чтобы существовала определенно положительная векторная функция Ляпунова $V(t,x)$, удовлетворяющая дифференциальному неравенству*

$$\dot V_s \le \varphi_s(t, V_1(t,x),\dots,V_k(t,x)), \quad \varphi_s(t,0)=0, \quad s=1,\dots,k,$$

где каждая из функций $\varphi_s(t,V)(s=1,\dots,k)$ не убывает по V_1, …, V_{s-1}, V_{s+1}, …, V_k (т.е. выполнены условия Важевского [75]), и чтобы:

1) $\|V(t,x)\| \le \beta\|x\|^\alpha$ $(\beta>0, \alpha\ge 1)$;

2) при условии, что $y_{10}\ge 0$, …, $y_{l0}\ge 0$ $(l\le k)$, нулевое решение системы сравнения $\dot y=\varphi(t,y)$ было устойчиво (асимптотически устойчиво) относительно y_1, …, y_l.

Пример. Рассмотрим систему [39]

$$\begin{cases} \dot x_1 = (\sin t + e^{-t})x_1 + (\sin t - e^{-t})x_2 - (x_1^3 + x_1x_2^2)\sin^2 t, \\ \dot x_2 = (\sin t - e^{-t})x_1 + (\sin t + e^{-t})x_2 - (x_2^3 + x_1^2x_2)\sin^2 t. \end{cases}$$

Квадратичная форма вида $w(x) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + 2Bx_1x_2 + Ax_2^2\right)$ при любых A и B не удовлетворяет теореме Ляпунова об устойчивости движения, т.е. не может быть функцией Ляпунова. Выберем вектор-функцию Ляпунова в виде

$$V(x) = (V_1(x), V_2(x)) = \left((x_1+x_2)^2/2,\ (x_1-x_2)^2/2\right).$$

Ни V_1, ни V_2 не является определенно положительной функцией и, следовательно, теорема К. Кардуняну не применима. Но две функции V_1, V_2 удовлетворяют теореме В.М. Матросова. Действительно, $V_1(x)\ge 0$, $V_2(x)\ge 0$ и $V_1+V_2 = x_1^2+x_2^2$ определенно положительна. Производные функций V_1 и V_2 в силу системы удовлетворяют дифференциальным неравенствам

$$\dot V_1 = 4V_1\left(\sin t - \frac{1}{2}\left(x_1^2+x_2^2\right)\sin^2 t\right) \le 4V_1\sin t,$$
$$\dot V_2 = 4V_2\left(e^{-t} - \frac{1}{2}\left(x_1^2+x_2^2\right)\sin^2 t\right) \le 4V_2 e^{-t},$$

а система сравнения имеет вид $\dot{y}_1 = 4y_1 \sin t$, $\dot{y}_2 = 4y_2 e^{-t}$. Функция $4V_1 \sin t$ не убывает по V_2, а функция $4V_2 e^{-t}$ не убывает по V_1. Нулевое решение системы сравнения устойчиво, следовательно, решение $x_1 = x_2 = 0$ устойчиво.

2.4. Уравнения с импульсными воздействиями

Исследованиями устойчивости решений дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями занимались А.М. Самойленко, Н.А. Перестюк [51].

2.5. Оптимальная стабилизация

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = f(x,u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \Omega \subset \mathbb{R}^r, \quad 0 \in \Omega, \quad f(0,0) = 0.$$

Задача стабилизации состоит в построении управления $u = u(x)$ такого, чтобы нулевое решение системы $\dot{x} = f(x, u(x))$ было асимптотически устойчивым. Такое управление называется *стабилизирующим*.

Рассмотрим задачу стабилизации для линейной управляемой системы $\dot{x} = Ax + Bu$ без ограничений на управление. Критерий стабилизируемости (существование стабилизирующего управления) заключается в том, что корневое подпространство K^+ матрицы A принадлежит подпространству управляемости, т.е. $K^+ \subset Lin(B, AB, \ldots, A^{n-1}B)$.

Построение стабилизирующего управления осуществляется следующим образом. Выберем функцию Ляпунова в виде квадратичной формы $V(x) = (Fx, x)$. Ищем управление в виде $u(x) = Px$ и таким, чтобы нулевое решение замкнутой системы $\dot{x} = (A + BP)x$ было асимптотически устойчиво. Для этого P и $F > 0$ выбираются как решения матричного неравенства Ляпунова

$$(A + BP)^* F + F(A + BP) < 0.$$

Полагая $P = -B^* F$, получаем неравенство относительно матрицы F^{-1}.

Теорема 2.10. *Пусть $F^{-1} > 0$ – решение матричного неравенства Ляпунова*

$$F^{-1}A^* + AF^{-1} - 2BB^* < 0.$$

Тогда управление $u(x) = -B^* Fx$ является стабилизирующим, а квадратичная форма $V(x) = (Fx, x)$ – функция Ляпунова для замкнутой системы.

Решение задачи стабилизации может быть неоднозначным. В связи с этим рассматривается задача оптимальной стабилизации, которая состоит в том, что стабилизирующее управление $u(x)$ требуется выбрать таким, чтобы на траектории $x(t)$, начинающейся в произвольной точке x_0, системы

$\dot{x} = f(x, u(x))$ функционал $\int\limits_0^\infty f_0(x(t), u(x(t)))dt$ достигал минимума. В прикладных задачах функционал может выражать расход энергии, отклонение от точки покоя и пр.

Для линейной управляемой системы $\dot{x} = Ax + Bu$ с функционалом качества вида $J(u) = \int\limits_0^\infty ((Qx, x) + (Ru, u))\, dt$, где матрицы $Q \geq 0$, $R > 0$, задача нахождения управления сводится к решению матричного уравнения Риккати относительно матрицы F вида

$$A^*F + FA - FBR^{-1}B^*F + Q = 0.$$

Тогда оптимальная стабилизация обеспечивается управлением $u(x) = -R^{-1}B^*Fx$ и наименьшее значение функционала $J(u(x)) = (Fx_0, x_0)$.

Пример. Рассмотрим задачу оптимальной стабилизации маятника в его неустойчивом (верхнем) положении равновесия. Решение будем рассматривать в линейном приближении. В этом случае движение маятника описывается уравнениями $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = x_1 + u$. Пусть функционал качества имеет вид $J(u) = \int\limits_0^\infty (x_1^2 + x_2^2 + u^2)dt$. Управление, решающее задачу оптимальной стабилизации, имеет вид $u(x_1, x_2) = -(1+\sqrt{2})x_1 - \sqrt{3+2\sqrt{2}}\,x_2$ и оптимальное значение функционала

$$J\left(u(x_1, x_2)\right) = V(x_1, x_2) = (6 + 4\sqrt{2})\; x_1^2 + (2 + 2\sqrt{2})x_1x_2 + \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}\; x_2^2.$$

В случае неавтономной системы $\dot{x} = f(t, x, u)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$, и функционала $\int\limits_{t_0}^\infty f_0(t, x(t), u(x(t)))dt$ управление находится следующим образом. Обозначим значение функционала на оптимальной траектории $x_0(t)$, начинающейся в момент времени t_0 в точке $x_0 = x(t_0)$, через

$$V(t_0, x_0) = \int\limits_{t_0}^{\infty} f_0(t, x_0(t), u_0(t, x_0(t)))dt.$$

Тогда относительно V, u_0 имеем уравнение

$$\min_u \{(dV/dt)_u + f_0(t, x, u)\} = 0,$$

из которого получаем следующую систему уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}\; f_i + f_0(t, x, u) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}\; \frac{\partial f_i}{\partial u_j} + \frac{\partial f_0}{\partial u_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, r.$$

Найденная функция V удовлетворяет всем условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости.

Основная теорема об оптимальной стабилизации, представляющую собой модификацию теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, с учетом идеи метода динамического программирования установлена Н.Н. Красовским [32].

К настоящему времени решению задачи стабилизации посвящено много работ, например, [13]–[15].

2.6. Стабилизация робастных систем

В настоящее время опубликовано большое количество работ, посвященных робастности. Несмотря на наличие значительного количества предшествующих результатов, основополагающим утверждением, определившим возникновение теории робастности, является теорема Харитонова, впервые сформулированная в работе [56], для неуправляемых систем.

Рассмотрим линейную управляемую систему с параметром g из некоторого множества G вида $\dot{x} = A(g)x + Bu$, $g \in G$. При фиксированном g матрица $A(g)$ постоянная матрица. Задача стабилизации в робастном варианте состоит в построении управления $u(x) = Px$ (P – постоянная матрица) такого, чтобы при любом $g \in G$ матрица $(A(g) + BP)$ была асимптотически устойчивой (задача *робастной* стабилизации).

При решении задачи робастной стабилизации строится функция Ляпунова, не зависящая от параметра q. Так для рассматриваемой системы решается система матричных неравенств

$$A(g)F^{-1} + F^{-1}A^*(g) - 2BB^* < 0, \quad g \in G,$$

относительно матрицы F^{-1}, не зависящей от g. Если существует решение $F^{-1} > 0$, то управление $u(x) = -B^*Fx$ решает задачу робастной стабилизации и квадратичная форма $V(x) = (Fx, x)$ является функцией Ляпунова системы $\dot{x} = (A(g) - BB^*F)x$ для всех $g \in G$.

Решение задачи робастной стабилизации с квадратичным критерием качества $J(u) = \int\limits_0^\infty ((Qx, x) + (Ru, u))\,dt$, где матрицы $Q \geq 0$, $R > 0$, рассмотрено, например, в [44].

2.7. Стабилизация в банаховых пространствах

Исследованиям устойчивости систем в банаховых пространствах посвящено много работ, например, Ю.Л. Далецкого и М.Г. Крейна [11].

Приведем результат Г.М. Скляра и В.Я. Ширмана, полученный ими в 1978 году и опубликованный в работе [53].

Теорема 2.11 [53]. *Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение* $\dot{x} = Ax$ *в банаховом пространстве* X, *где* $A \in [X, X]$, *в предположении, что* *множество $\sigma(A) \cap (i\mathbb{R})$ не более чем счетно, и для некоторого $C > 0$*

$$\left\|e^{At}x\right\| \le C\|x\|, \quad t \ge 0, \quad x \in X.$$

Тогда уравнение является асимптотически устойчивым, т.е.

$$\left\|e^{At}x\right\| \to 0 \ \text{ при } \ t \to +\infty \quad \text{для любого } \ x \in X,$$

тогда и только тогда, если сопряженный оператор A^* не имеет чисто мнимых собственных значений.

3. Развитие метода Ляпунова для решения задачи допустимого синтеза

Математическая теория управления начала интенсивно развиваться в середине XX столетия. Ее возникновение связано с необходимостью решать новые на то время задачи, прежде всего, задачи управления механическими объектами, движение которых описывается дифференциальными уравнениями. Значительный вклад в ее создание внесли Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко, Р. Калман, Р. Беллман и многие другие. Принцип максимума [45] послужил основой математической теории управляемых процессов. Дальнейшее развитие теории управления связано как с прикладными задачами (управление летающими объектами, в том числе космическими аппаратами, управление технологическими и экономическими процессами, и др.), так и с исследованием задач управления как чисто математических. Так возникли и сформировались такие направления в математической теории управления как управляемость, наблюдаемость, идентификация систем, теория оптимального управления, синтез управления для различных типов систем (обыкновенных дифференциальных, с распределенными параметрами, интегро-дифференциальных, стохастических, с запаздыванием) и другие.

С другой стороны, интенсивное развитие математической теории управляемых процессов привело к возникновению принципиально новых направлений в теории дифференциальных уравнений, что в значительной мере определяет ее настоящее состояние. Одним из таких направлений стал допустимый позиционный синтез управления для дифференциальных уравнений [23].

Задача допустимого позиционного синтеза управления для системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad t \in [t_0, t_1], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \Omega \subset \mathbb{R}^r, \quad 0 \in \operatorname{int} \Omega, \tag{1}$$

состоит в построении управления $u = u(t, x)$, которое удовлетворяет заданным ограничениям $u(t, x) \in \Omega$, такого, что траектория замкнутой системы

$$\dot{x} = f(t, x, u(t, x)), \tag{2}$$

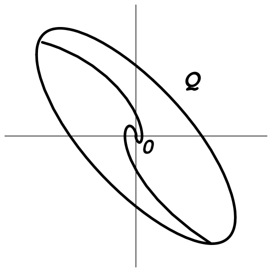

Рис. 6:

начинающаяся в произвольной точке x_0 из некоторой окрестности Q начала координат, попадает в начало координат за конечное время $T(x_0)$. При этом мы рассматриваем случай, когда начало координат является точкой покоя системы, т.е. $f(0, u_0) = 0$ при некотором $u_0 \in \Omega$. Если $\mathrm{Q} = \mathbb{R}^n$, то синтез называется глобальным, а если $\mathrm{Q} \neq \mathbb{R}^n$, то локальным.

Заметим, что к задаче синтеза допустимого управления приходим естественным образом от задачи оптимального синтеза управления, отказываясь от оптимизации некоторого критерия качества.

Отметим некоторые трудности решения этой задачи. Прежде всего, замкнутая система не может удовлетворять условиям теоремы Пикара существования и единственности решения в области, в которой решается задача синтеза, поскольку через конечную точку $x = 0$ проходит бесконечное множество траекторий (рис. 6). Эту трудность можно обойти, если рассматривать управления, непрерывные при $x \neq 0$ и липшицевые в каждом кольце $\{x : 0 < \rho_1 \le \|x\| \le \rho_2\}$, но такие, что при $\rho_1 \to 0$ константы Липшица неограниченно возрастают, либо необходимо рассматривать разрывные управления, что, в свою очередь, вносит дополнительные трудности в решение этой задачи. Кроме того, поскольку управление $u(x)$ удовлетворяет наперед заданным ограничениям вида $u \in \Omega$, то даже в линейном случае замкнутая система является нелинейной.

3.1. Методы решения задачи синтеза

Для решения задачи допустимого синтеза позиционных управлений в 1978 году был предложен метод функции управляемости [19, 20, 21].

Теорема 3.1 (В.И. Коробов [19, 20]). *Рассмотрим управляемый процесс, описываемый уравнением* $\dot{x} = f(x, u)$, *где* $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \Omega \subset \mathbb{R}^r$, *вектор-функция* $f(x, u)$ *в каждой точке области* $\{(x, u) : \ 0 < \rho_1 \le \|x\| \le \rho_2, \ u \in \Omega\}$ *удовлетворяет условию Липшица*

$$\|f(x', u') - f(x'', u'')\| \le L_1(\rho_1, \rho_2)(\|x'' - x'\| + \|u'' - u'\|).$$

Пусть существует функция $\Theta(x)$, *удовлетворяющая условиям:*
1) $\Theta(x) \ge 0$ *при* $x \neq 0$ *и* $\Theta(0) = 0$;

2) $\Theta(x)$ *непрерывна всюду и непрерывно-дифференцируема всюду за исключением, быть может, точки* $x = 0$;

3) существует число $c > 0$ *такое, что множество* $\mathbb{Q} = \{x : \ \Theta(x) \le c\}$ *является ограниченным и* $\mathbb{Q} \subset \{x : \ \|x\| < R\}$;

4) существует функция $u(x) \in \Omega$ *при* $x \in \mathbb{Q}$, *удовлетворяющая неравенству*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_i} f_i(x, u(x)) \le -\beta \Theta^{1-\frac{1}{\alpha}}(x) \tag{3}$$

при некотором $\alpha > 0$ *и* $\beta > 0$, *причем* $u(x)$ *в каждой области* $K(\rho_1, \rho_2) = \{x \in \mathbb{Q} : \ 0 < \rho_1 \le \|x\| \le \rho_2\}$ *удовлетворяет условию Липшица, т.е.*

$$\|u(x'') - u(x')\| \le L_2(\rho_1, \rho_2)\|x'' - x'\| \quad \forall \quad x', x'' \in K(\rho_1, \rho_2).$$

Тогда траектория $x(t)$ *системы* $\dot{x} = f(x, u(x))$, *начинающаяся в произвольной точке* $x_0 \in \mathbb{Q}$ *в момент времени* $t = 0$, *оканчивается в точке* $x_1 = 0$ *в некоторый момент времени* $T(x_0) \le (\alpha/\beta)\Theta^{\frac{1}{\alpha}}(x_0)$, $x(t) \in \mathbb{Q}$, $x(t) = 0$ *при* $t > T(x_0)$, *причем если* $\alpha = \infty$, *то* $x(t) \to 0$ *при* $t \to \infty$.

Этот метод был развит на случай неавтономных систем в работе [6].

Теорема 3.2 (Бессонов Г.А., Коробов В.И., Скляр Г.М. [6]). *Рассмотрим управляемый процесс (1). Предположим, что вектор-функция* $f(t, x, u)$ *непрерывна по совокупности переменных и в области*

$$\{(t, x, u) : \ t_0 \le t \le t_1, \ 0 < \rho_1 \le \|x\| \le \rho_2, \ u \in \Omega\}$$

удовлетворяет условию Липшица

$$\|f(t, x', u') - f(t, x'', u'')\| \le L_1(\rho_1, \rho_2)(\|x'' - x'\| + \|u'' - u'\|).$$

Пусть в замкнутой области $\mathbb{G} = [t_0, t_1] \times \{x : \ \|x\| \le R\}$ $(0 < R \le \infty)$ *существует функция* $\Theta(t, x)$, *удовлетворяющая условиям:*

1) $\Theta(t, x) > 0$ *при* $x \ne 0$, $t \in [t_0, t_1]$, *и* $\Theta(t, 0) = 0$ *для любого* $t \in [t_0, t_1]$;

2) $\Theta(t, x)$ *непрерывна всюду и непрерывно-дифференцируемая всюду, за исключением, быть может, точек вида* $(t, 0)$ *при* $t \in [t_0, t_1]$;

3) существует $c > 0$ *такое, что* $\mathbb{Q}(t) = \{x : \ \Theta(t, x) \le c\}$ *ограничено и* $\mathbb{Q}(t) \subset \{x : \ \|x\| < R\}$ *при всех* $t \in [t_0, t_1]$;

4) существует функция $u(t, x) \in \Omega$ *при* $x \in \mathbb{Q}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ *такая, что справедливо неравенство*

$$\frac{\partial \Theta(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Theta(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u(t, x)) \le -\beta \Theta^{1-\frac{1}{\alpha}}(t, x) \tag{4}$$

при некоторых $\alpha > 0$ *и* $\beta > 0$, *причем* $u(t, x)$ *в области*

$$K_t(\rho_1, \rho_2) = \{(t, x) : \ t_0 \le t \le t_1, \ 0 < \rho_1 \le \|x\| \le \rho_2\} \tag{5}$$

удовлетворяет условию Липшица

$$\|u(t,x'')-u(t,x')\| \le L_2(\rho_1,\rho_2)\|x''-x'\|; \tag{6}$$

5) справедливо неравенство $c \le (\beta(t_1-t_0)/\alpha)^{\alpha}$.

Тогда при $\alpha < +\infty$ *траектория системы* $\dot{x} = f(t,x,u(t,x))$, *начинающаяся в произвольной точке* $x_0 \in \mathbb{Q}(t_0)$ *в начальный момент времени* t_0, *оканчивается в точке* $x_1 = 0$ *в некоторый конечный момент времени* t_0+T, *где* $T \le (\alpha/\beta)\Theta^{\frac{1}{\alpha}}(t_0,x_0)$, *причем* $x(t) \equiv 0$ *при* $t > t_0+T$. *В случае* $\alpha = +\infty$ *решение* $x(t) \to 0$ *при* $t \to \infty$.

Теорема 3.3 (В.И. Коробов). *Пусть выполняются предположения теоремы 3.2 относительно функции* $f(t,x,u)$ *и условия 1) – 4), и пусть существует функция* $\Theta(t,x)$ *при* $(t,x) \in \mathbb{G}$ *такая, что справедливы неравенства*

$$-\beta_1\Theta^{1-\frac{1}{\alpha_1}}(t,x) \le \frac{\partial\Theta(t,x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Theta(t,x)}{\partial x_i}f_i(t,x,u(t,x)) \le -\beta_2\Theta^{1-\frac{1}{\alpha_2}}(t,x)$$

при некоторых положительных $\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2$, *причем* $u(t,x)$ *в области* $K_t(\rho_1,\rho_2)$ *вида (5) удовлетворяет условию Липшица (6) и пусть* $c < \beta_2(t_1-t_0)/\alpha_2$.

Тогда, если $\alpha_1 < \infty$, $\alpha_2 < \infty$, *то траектория системы (2), начинающаяся в произвольной точке* x_0 *в начальный момент времени* t_0, *оканчивается в точке* $x_1 = 0$ *в некоторый конечный момент времени* t_0+T, *причем*

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}\Theta(t_0,x_0)^{\frac{1}{\alpha_1}} \le T \le \frac{\alpha_2}{\beta_2}\Theta^{\frac{1}{\alpha_2}}(t_0,x_0);$$

если же $\alpha_2 = \infty$, *то траектория системы ни за какое конечное время не попадет в точку* $x_1 = 0$.

В случае автономной системы, вместо неравенства (3) можно требовать выполнение следующего дифференциального неравенства

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Theta(x)}{\partial x_i}f_i(x,u(x)) \le -\varphi(\Theta(x)), \tag{7}$$

где $\varphi(\Theta) > 0$ при $\Theta \ne 0$, $\varphi(0) = 0$ и $\int\limits_0^a \frac{d\Theta}{\varphi(\Theta)} < \infty$ $(a > 0)$.

Большой интерес представляет случай, когда при построении синтезирующих управлений удается найти время движения $T(x_0)$ из произвольной точки x_0 в начало координат. В случае, когда $\Theta(x)$ и $u(x)$ таковы, что выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Theta(x)}{\partial x_i}f_i(x,u(x)) = -1,$$

функция управляемости $\Theta(x)$ является временем движения $T(x)$ из точки x в точку 0, т.е. $\Theta(x) = T(x)$. Если, кроме того, управление $u(x)$ таково, что

$$\min_{u \in \Omega} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_i} f_i(x, u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_i} f_i(x, u(x)) = -1,$$

то обозначив $\omega(x) = -\Theta(x)$, получаем уравнение Беллмана

$$\max_{u \in \Omega} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_i} f_i(x, u) = 1$$

в теории динамического программирования.

Выбор управления с помощью уравнения Беллмана можно трактовать с позиции минимизации функции $\Theta(x)$: управление $u(x)$ выбирается таким образом, чтобы угол между направлением быстрейшего убывания $\Theta(x)$ и направлением движения был минимальным. В методе функции управляемости указанный угол не обязательно является минимальным.

При $\alpha = \infty$ имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_i} f_i(x, u(x)) \leq -\beta \Theta(x), \tag{8}$$

и функция $\Theta(x)$ является функцией Ляпунова $V(x)$. Неравенство (8) означает, что при достаточно малых Θ угол между направлением движения и направлением убывания функции $\Theta(x)$ не меньше, чем в методе функции управляемости, так как $\Theta(x) \leq \Theta^{1-\frac{1}{\alpha}}(x)$ при $\alpha \geq 1$. Таким образом, угол между направлением движения и направлением убывания функции $\Theta(x)$ в методе функции управляемости не меньше, чем соответствующий угол в методе динамического программирования, и не больше, чем в методе функции Ляпунова.

Метод функции управляемости может быть распространен на случай, когда начало координат не является точкой покоя системы. Тогда синтез является неустойчивым в том смысле, что после попадания в ноль траектория не только не остается в нуле, но покидает некоторую его окрестность и снова возвращается в ноль за конечное время. Такие задачи не исследуются в рамках теории устойчивости.

Для функции управляемости $\Theta(x)$ естественным способом ее задания является неявный способ, т.е. функция $\Theta = \Theta(x)$ определяется как некоторое решение уравнения $\Phi(\Theta, x) = 0$. Эту функцию $\Phi(\Theta, x)$ требуется выбрать таким образом, чтобы производная функции управляемости $\Theta(x)$ в силу замкнутой системы удовлетворяла неравенству (7). Это отличает построение функции управляемости от традиционного явного задания функции Ляпунова.

С другой стороны, в линейной задаче быстродействия оптимальное время движения (которое является функцией управляемости) также находится в неявной форме [26].

Способы построения функции управляемости $\Theta(x)$ и позиционного управления $u(x)$ для линейных систем, в том числе в бесконечномерных пространствах, и некоторых классов нелинейных систем приведены в [23]. Исследование задачи синтеза для нелинейных систем проводится двумя способами: с использованием первого приближения и с помощью отображения нелинейной системы на линейную.

Задача отображения нелинейных систем на линейные имеет и самостоятельное значение. Так, если нелинейная система оказывается отображаемой на линейную, то, во-первых, это позволяет установить ряд качественных свойств исходной нелинейной системы (управляемость, стабилизируемость и др.), и, во-вторых, получить конкретные решения различных задач, например, задачи синтеза или оптимального быстродействия.

Важный класс нелинейных систем, допускающих отображение на линейные системы, – это треугольные системы, которые описывают ряд физических процессов (ориентация спутника на орбите, управление роботом-манипулятором и другие). Класс треугольных систем был введен и впервые рассмотрен автором в 1973 году в работе [18], в которой предложен конструктивный метод отображения треугольной системы на линейную. Этот метод получил дальнейшее развитие, например, в работах [28], [33], [63], [64]–[66]. Заметим, что важной особенностью исходного подхода [18] являются минимальные требования к гладкости правых частей нелинейных систем. Исследование задачи линеаризуемости при минимальных требованиях к гладкости правых частей проведено в работе [73].

3.2. Способы решения задач локального и глобального синтеза

В 1990 году В.И. Коробовым и Г.М. Скляром в роботе [27] приведен метод построения довольно широкого класса управлений, решающих задачу локального и глобального синтеза. Для решения задачи синтеза также сформулирован *допустимый принцип максимума* [22, 27], который по форме подобен принципу максимума в оптимальном управлении, но при этом указывается сопряженная функция (без неоходимости решения краевой задачи для сопряженной системы), которая является функцией фазовых координат, а не времени, что позволяет определять позиционное управление.

Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad \operatorname{rang}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n, \quad u \in \{u : \|u\| \le d\} \subset \Omega. \tag{9}$$

Обозначим через $\mathcal{F}$ множество невозрастающих неотрицательных на полуоси $[0, +\infty)$ функций $f(s)$, имеющих, по крайней мере, m точек убывания, таких, что

$$\int\limits_0^\infty s^{2m+1} e^{-2\lambda_0' s\Theta} f(s)ds < \infty \quad \text{при} \quad 0 \le \Theta \le \bar{\Theta}_f,$$

где m – степень минимального полинома матрицы A, $\lambda_0' = \min\{0, \lambda_0\}$, λ_0 – минимальная вещественная часть собственных значений матрицы A.

Пусть $f \in \mathcal{F}$. Обозначим через $N_f(\Theta)$ при $0 < \Theta \leq \bar{\Theta}_f$ матрицу вида

$$N_f(\Theta) = \int\limits_0^\infty f(t/\Theta)e^{-At}BB^*e^{-A^*t}dt.$$

Для любого $x \in \mathrm{Q}^1 \setminus \{0\}$ ($\mathrm{Q}^1 = \{x : \|x\| \leq R\}$) уравнение

$$2a_0\Theta^\nu = (N_f^{-1}(\Theta)x, x), \quad a_0 > 0, \quad \nu \geq 1, \tag{10}$$

имеет единственное положительное непрерывно дифференцируемое решение $\Theta = \Theta(x)$. Доопределяя функцию $\Theta(x)$ значением $\Theta(0) = 0$, функция $\Theta(x)$ становится непрерывной в нуле. Существует постоянная $C > 0$ такая, что множество $\mathrm{Q} = \{x : \Theta(x) \leq C\}$ ограничено и $\mathrm{Q} \subset \mathrm{int}\ \mathrm{Q}^1$.

Зададим управление $u(x)$ формулой

$$u(x) = -\frac{1}{2}f(0)B^*N_f^{-1}(\Theta(x))x, \quad x \in \mathrm{Q}^1 \setminus \{0\}. \tag{11}$$

Теорема 3.4 (В.И. Коробов, Г.М. Скляр [27]). *При достаточно малых значениях коэффициента $a_0 : 0 < a_0 \leq a_f$ управление вида (11) решает для системы (9) задачу локального позиционного синтеза непрерывного управления, удовлетворяющего ограничению $u \in \{u : \|u\| \leq d\} \subset \Omega$.*

Теорема 3.5 [27]. *Пусть все собственные числа матрицы A имеют неположительную вещественную часть и $f(\tau)$ – финитная функция. Тогда при достаточно малых значениях коэффициента $a_0 : 0 < a_0 \leq \bar{a}_f$ и при $\nu = 1$ управление вида (11) решает для системы (9) задачу глобального позиционного синтеза непрерывного управления, удовлетворяющего ограничению $u \in \{u : \|u\| \leq d\}$.*

Допустимый принцип максимума. Пусть $\mathrm{Q}_\Theta = \{x : \Theta(x) \leq \Theta\}$, где функция управляемости $\Theta(x)$ определяется из уравнения (10), $\psi(x)$ – опорный вектор к границе множества Q_Θ, который имеет вид $\psi(x) = -N_f^{-1}(\Theta(x))x$. Будем выбирать управление $\bar{u}(x)$ из соотношения

$$(\psi(x), \varphi(x, \bar{u}(x))) = \max_{u \in \Omega}(\psi(x), \varphi(x, u(x))),\ x \neq 0;\ \bar{u}(0) = 0, \tag{12}$$

которое назовем *допустимым принципом максимума.* Равенство (12) определяет в области $\mathrm{Q}' = \{x : \Theta(x) \leq C_f'\}$, вообще говоря, разрывное и многозначное управление $\bar{u}(x)$ (функция $\bar{u}(x)$ многозначна в точках x, в которых максимум в этом равенстве достигается при не единственном значении u). Поэтому решение $x(t)$ уравнения будем понимать в смысле дифференциального включения

$$\dot{x} \in F(x) = \varphi(x, \bar{u}(x)), \quad x(0) = x_0 \in \mathrm{Q}'. \tag{13}$$

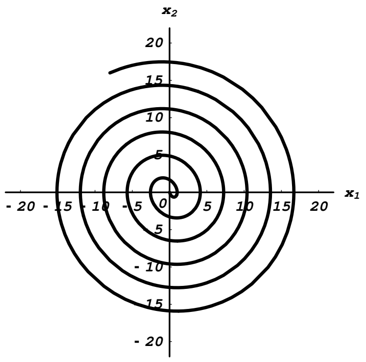

Рис. 7: Фазовая траектория.

Теорема 3.6 [22, 27]. *Пусть задача Коши (13) разрешима на отрезке* $[0, \Theta(x_0)/M_f]$ *и* $x(t)$ *– ее решение. Тогда существует* $0 \le T(x_0) \le \Theta(x_0)/M_f$ *такое, что* $x(t) \equiv 0$ *при* $t \ge T(x_0)$.

Доказательство теоремы непосредственно следует из неравенства

$$(\Theta'_x, \varphi(x, \bar{u}(x))) \le (\Theta'_x, \varphi(x, u(x))) \le -M_f, \quad M_f > 0,$$

в котором управление $u(x)$ определяется формулой (11).

В случае линейной по управлению системы $\dot{x} = \varphi(x) + Bu$ управление, определяемое из допустимого принципа максимума, принимает граничные значения $\bar{u}(x) \in \partial\Omega$. Если к тому же управление одномерно, т. е. система имеет вид $\dot{x} = \varphi(x) + bu$, $b \in \mathbb{R}^n$ и ограничение, например, имеет вид $u \in \Omega = [-1, 1]$, то

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} -\operatorname{sign} b^* N_f^{-1}(\Theta(x)x) & \text{при} \quad b^* N_f^{-1}(\Theta(x)x \ne 0, \\ [-1, 1] & \text{при} \quad b^* N_f^{-1}(\Theta(x)x = 0. \end{cases}$$

С помощью допустимого принципа максимума решается также задача глобального синтеза для линейной системы (9), в которой собственные значения матрицы A имеют неположительную вещественную часть.

Пример. Рассмотрим задачу допустимого синтеза для математического маятника. Решение будем искать в линейном приближении

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + u, \quad |u| \le 1.$$

Выберем функцию $f(s)$ равную e^{-s}. В этом случае

$$N_f(\Theta) = \frac{1}{1+4\Theta^2} \begin{pmatrix} 2\Theta^3 & -\Theta^2 \\ -\Theta^2 & \Theta + 2\Theta^3 \end{pmatrix}, \quad N_f^{-1}(\Theta) = \begin{pmatrix} (1+2\Theta^2)/\Theta^3 & 1/\Theta^2 \\ 1/\Theta^2 & 2/\Theta \end{pmatrix}.$$

Выберем $a_0 = 1/4$, тогда функция $\Theta(x_1, x_2)$ при $(x_1, x_2) \ne 0$ является положительным решением уравнения

$$\Theta^4/2 - (1 + 2\Theta^2)x_1^2 - 2x_1x_2\Theta - 2x_2^2\Theta^2 = 0. \tag{14}$$

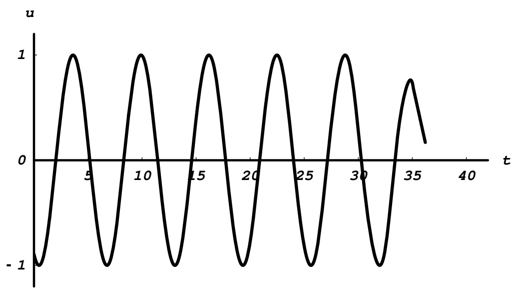

Рис. 8: Управление на траектории.

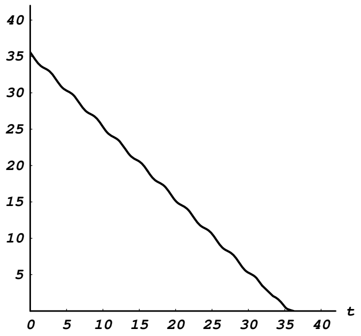

Рис. 9: График функции $\Theta(x(t))$.

Управление имеет вид

$$u(x_1,x_2) = -\frac{x_1}{\Theta^2(x_1,x_2)} - \frac{2x_2}{\Theta(x_1,x_2)}, \tag{15}$$

При таком выборе a_0 управление (15) решает задачу глобального синтеза, поскольку удовлетворяет заданному ограничению во всем пространстве $\mathbb{R}^2$.

Из (14) получаем, что производная функции $\Theta(x_1,x_2)$ в силу системы с управлением (15) задается равенством

$$\dot\Theta(x_1,x_2) = -\frac{(1+\Theta^2(x_1,x_2))x_1^2 + 3\Theta(x_1,x_2)x_1x_2 + 3\Theta^2(x_1,x_2)x_2^2}{2(1+\Theta^2(x_1,x_2))x_1^2 + 3\Theta(x_1,x_2)x_1x_2 + 2\Theta^2(x_1,x_2)x_2^2}\ .$$

Оценим снизу и сверху выражение для $\dot\Theta(x_1,x_2)$, представляющего собой отношение двух положительно определенных квадратичных форм относительно $y_1 = x_1$ и $y_2 = \Theta x_2$, т.е.

$$\dot\Theta(x_1,x_2) = -\frac{(Wy,y)}{(Vy,y)}, \quad W = \begin{pmatrix} 1+\Theta^2 & 3/2 \\ 3/2 & 3 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 2+2\Theta^2 & 3/2 \\ 3/2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Эта оценка имеет вид $-\lambda_{\max} \le -(Wy,y)/(Vy,y) \le -\lambda_{\min}$, где $\lambda_{\min}$, $\lambda_{\max}$ – наименьший и наибольший корни уравнения $\det(W-\lambda V) = 0$. Поскольку $\lambda_{\max} \le 1 + 2/\sqrt{7}$, $\lambda_{\min} \ge 1 - 2/\sqrt{7}$, то $-(1+2/\sqrt{7}) \le \dot\Theta(x_1,x_2) \le -(1-2/\sqrt{7})$.

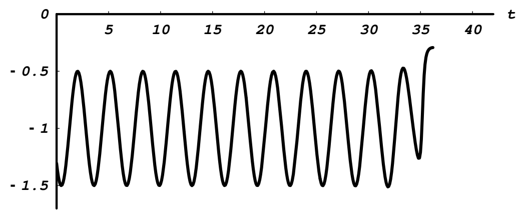

Рис. 10: График функции $\dot{\Theta}(x(t))$.

Отсюда получаем, что время движения $T(x_0)$ из произвольной точки x_0 в начало координат удовлетворяет оценке

$$\frac{7}{7+2\sqrt{7}}\,\Theta(x_1^0,x_2^0) \le T(x_1^0,x_2^0) \le \frac{7}{7-2\sqrt{7}}\,\Theta(x_1^0,x_2^0), \tag{16}$$

где $\Theta(x_1^0,x_2^0)$ – положительное решение уравнения (14) при $x = x_0$.

На рис. 7 изображена фазовая траектория, идущая из начальной точки $x_0 = (-8, 16)$ в начало координат, а график управления (15), отвечающего этой траектории, приведен на рис. 8. На рисунках 9, 10 приведены графики функции $\Theta(x)$ и ее производной в силу системы на этой траектории. При этом $\Theta(x_0) = 35.5768...$ и время движения $T(x_0) = 36.2024...$, хотя оценка (16) на время движения в данном случае имеет вид $20.26... \le T(x_0) \le 145.764...$.

Автором совместно с В.А. Скориком рассмотрена задача построения позиционного управления с ограничениями не только на управление, но и на его производные до заданного порядка (см., например, [68]). Такие управления были названы инерционными [45].

3.3. Функция управляемости как время движения

Рассмотрим случай матрицы интегрального вида. Пусть функция $f(s)$ имеет вид [27]

$$f(s) = \begin{cases} (1-s)^\nu & \text{при} \quad 0 \le s < 1, \\ 0 & \text{при} \quad s \ge 1, \end{cases} \qquad N_f(\Theta) = \int_0^\Theta \left(1 - \frac{t}{\Theta}\right)^\nu e^{-At}BB^*e^{-A^*t}dt.$$

В этом случае управление $u(x)$ из (11) и функция $\Theta(x)$, определяемая уравнением (10), таковы, что выполняется равенство $\dot{\Theta}(x) = -1$, являющееся частным случаем дифференциального неравенства (3) при $\alpha = \beta = 1$, и поэтому функция управляемости $\Theta(x)$ является временем движения из точки x в начало координат.

Нахождение более широкого множества таких пар функций – функции управляемости $\Theta(x)$, являющейся временем движения, и управления $u(x)$, решающих задачу допустимого синтеза приведено в работе [61].

Рассмотрим систему (9). Не ограничивая общности, будем считать, что rang $B=r$ и $b_1,\dots,A^{n_1-1}b_1,\ \dots,\ b_r,\dots,A^{n_r-1}b_r$ являются линейно независимыми векторами, где b_i – i-й столбец матрицы B, $n_1\ge\dots\ge n_r\ge 1$, $n_1+\dots+n_r=n$.

Пусть $\widetilde{P}=\operatorname{diag}(\widetilde{P}_1,\dots,\widetilde{P}_r)$, где $\widetilde{P}_i$ – $((n_i-1)\times(n_i-1))$-матрица вида

$$\widetilde{P}_i=\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{3\cdot 4} & \cdots & \frac{1}{n_i(n_i+1)}\\ 0 & \frac{1}{4\cdot 5} & \cdots & \frac{1}{(n_i+1)(n_i+2)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \frac{1}{(n_i+1)(n_i+2)} & \cdots & \frac{1}{(2n_i-2)(2n_i-1)}\end{pmatrix},\quad i=1,\dots,r.$$

Обозначим через $\Delta_i=\det\ \widetilde{P}_i$, а через $(\Delta'_j)_i$, $(\Delta''_j)_i$ $(j=1,\dots,n_i-1)$ – определители матрицы, полученной из матрицы $\widetilde{P}_i$, в которой вместо ее j-столбца стоят, соответственно, столбцы

$$d'_i=\left(-\frac{1}{(n_i+1)(n_i+2)},\ -\frac{1}{(n_i+2)(n_i+3)},\ \dots,\ -\frac{1}{(2n_i-1)2n_i}\right)^*,$$

$$d''_i=\left(-\frac{3+a_1^i}{2\cdot 3},\ -\frac{a_1^i}{3\cdot 4},\ \dots,\ -\frac{a_1^i}{n_i(n_i+1)}\right)^*;\quad a_1^i=-\frac{n_i(n_i+1)}{2}.$$

Предположим, что для $i=1,\dots,r$, параметры $c^i_{2n_i-2}$ и $a^i_{n_i}$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned}&c^i_{2n_i-2}>0,\\ &\frac{1}{\Delta_i}\left((\Delta'_1)_i\frac{(-1)^{n_i-1}}{(n_i-1)!}a^i_{n_i}+(\Delta''_1)_i\right)>\max\left\{\xi_0^i,\ \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n_i}\right)\xi_0^i+\frac{1}{4}-\frac{1}{4n_i}\right\},\end{aligned}\tag{17}$$

где ξ_0^i является корнем уравнения

$$\begin{vmatrix} \xi_0^i & \frac{1}{2\cdot 3} & \cdots & \frac{1}{n_i(n_i+1)}\\ \frac{1}{2\cdot 3} & \frac{1}{3\cdot 4} & \cdots & \frac{1}{(n_i+1)(n_i+2)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{1}{n_i(n_i+1)} & \frac{1}{(n_i+1)(n_i+2)} & \cdots & \frac{1}{(2n_i-1)2n_i}\end{vmatrix}=0.$$

Пусть $C=\operatorname{diag}(C_1,\dots,C_r)$, где C_i – $(n_i\times n_i)$-матрица вида

$$C_i=\begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta_i}\left((\Delta'_1)_i\frac{(-1)^{n_i-1}}{(n_i-1)!}a^i_{n_i}+(\Delta''_1)_i\right) & \frac{1}{2\cdot 3} & \cdots & \frac{1}{n_i(n_i+1)}\\ \frac{1}{2\cdot 3} & \frac{1}{3\cdot 4} & \cdots & \frac{1}{(n_i+1)(n_i+2)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{1}{n_i(n_i+1)} & \frac{1}{(n_i+1)(n_i+2)} & \cdots & \frac{1}{(2n_i-1)2n_i}\end{pmatrix}\times$$

$$\times(2n_i-1)2n_i\,c^i_{2n_i-2},\quad i=1,\dots,r.$$

Рассмотрим положительно определенную матрицу $F(\Theta)$ вида

$$F(\Theta) = D(\Theta)D_n^{-1}C^{-1}D_n^{-1}D(\Theta) = D(\Theta)FD(\Theta), \tag{18}$$

где $D(\Theta) = \mathrm{diag}(D_1(\Theta), \dots, D_r(\Theta))$, $D_n = \mathrm{diag}\,(D_{n_1}, \dots, D_{n_r})$,

$$D_i(\Theta) = \mathrm{diag}\left(\Theta^{-\frac{2k-1}{2}}\right)_{k=1}^{n_i}, \quad D_{n_i} = \mathrm{diag}\left(\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\right)_{k=1}^{n_i}, \quad i = 1, \dots, r.$$

Выберем векторы $c_1, \dots, c_r$ как решения систем $K^*c_i = e_{s_i}$, $i = 1, \dots, r$, где матрица $K = (b_1, \dots, A^{n_1-1}b_1, \dots, b_r, \dots, A^{n_r-1}b_r)$, а e_{s_i} – s_i-й единичный орт пространства $\mathbb{R}^n$ ($s_0 = 0$, $s_i = n_1 + \dots + n_i$, $i = 1, \dots, r$), и рассмотрим матрицу $L = \left(A^{*n_1-1}c_1, \dots, A^*c_1, c_1, \dots, A^{*n_r-1}c_r, \dots, A^*c_r, c_r\right)^*$. Определим функцию управляемости $\Theta(x)$ при $x \neq 0$ как положительное решение уравнения

$$2a_0\Theta = (L^*F(\Theta)Lx, x)\,, \quad a_0 > 0. \tag{19}$$

Пусть $\bar{\Theta}$ – произвольное положительное число и

$$0 < c \le \frac{\delta\,\bar{\Theta}}{\|L^{-1}\|^2\|L\|^2\|F(\bar{\Theta})\|\|F^{-1}(\bar{\Theta})\|}, \quad \delta \in (0, 1).$$

Зададим управление $u(x)$ формулой

$$u(x) = M^{-1}\left(\Theta^{-\frac{1}{2}}(x)P_0D(\Theta(x))L - B_0^*LA\right)x, \tag{20}$$

где M – верхнетреугольная $(r{\times}r)$-матрица, элементы главной диагонали которой $m_{ii} = 1$ и $m_{ij} = c_i^*A^{n_i-1}b_j$ при $i < j \le r$, $i = 1, \dots, r$, а матрица

$$P_0 = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_{n_1}^1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_1^2 & \dots & a_{n_2}^2 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1^r & \dots & a_{n_r}^r \end{pmatrix},$$

в которой $a_1^i, \dots, a_{n_i}^i$ $(i = 1, \dots, r)$ – элементы n_i-мерного вектора вида

$$a^i = \left(-\frac{n_i(n_i+1)}{2},\ -\frac{1}{\Delta_i}\left((\Delta_2')_i\frac{(-1)^{n_i-1}}{(n_i-1)!}a_{n_i}^i + (\Delta_2'')_i\right),\ \dots,\right.$$

$$\left.\dots, (-1)^{n_i-2}(n_i-2)!\ \frac{1}{\Delta_i}\left((\Delta_{n_i-1}')_i\frac{(-1)^{n_i-1}}{(n_i-1)!}a_{n_i}^i + (\Delta_{n_i-1}'')_i\right),\ a_{n_i}^i\right)^*,$$

$B_0 = (e_{s_0+1}, \dots, e_{s_{r-1}+1})$.

Теорема 3.7 (Коробов В.И., Скорик В.А., Чоке Риверо А.Е. [61]). *Пусть числа $c_{2n_i-2}^i$, $a_{n_i}^i$ $(i = 1, \dots, r)$ удовлетворяют условиям (17), число a_0 удовлетворяет условию*

$$0 < a_0 \le \frac{d^2}{2\|F^{-1}\|\|M^{-1}\|^2\left(\|P_0\| + \|B_0^*LAL^{-1}\|\max\{c, c^{n_1}\}\right)^2}.$$

Пусть функция управляемости $\Theta(x)$ при $x \neq 0$ определена уравнением (19), $\Theta(0) = 0$ и область $\mathrm{Q} = \{x : \Theta(x) \le c\}$.

Тогда для системы (9) управление $u(x)$ вида (20) в области $\mathrm{Q} \setminus \{0\}$ решает задачу допустимого синтеза и удовлетворяет ограничениям $\|u(x)\| \le d$, причем время движения $T(x_0)$ из произвольной точки $x_0 \in \mathrm{Q}$ в начало координат по траектории системы (9) с управлением $u(x)$ равно $\Theta(x_0)$.

Отметим, что в случае, когда функция управляемости $\Theta(x)$ является временем движения, аналитически находятся траектории, по которым происходит движение из точки x в начало координат.

3.4. Управление нелинейными системами

Рассмотрим введенную автором в [18] треугольную систему

$$\dot{x} = f(x,u), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R},\ \ f(x,u) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ . \quad . \quad . \\ f_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) \\ f_n(x_1, \ldots, x_n, u) \end{pmatrix}, \tag{21}$$

заданную в некоторой области $\mathrm{Q} \subset \mathbb{R}^n$. Приведем результаты работы [18].

Теорема 3.8 (В.И. Коробов [18]). *Пусть в (21) функции $f_i(x_1, \ldots, x_{i+1})$, $i = 1, \ldots, n$ $(x_{n+1} = u)$, имеют непрерывные частные производные до $(n-i+1)$-го порядка включительно и пусть $\left|\dfrac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}}\right| \ge a > 0$, $i = 1, \ldots, n$, при всех $x_1, \ldots, x_{n+1}$, где a – постоянная, не зависящая от $x_1, \ldots, x_{n+1}$. Тогда система (21) полностью управляемая за время T.*

Теорема 3.9 [18]. *Пусть выполнены условия теоремы 3.8 и пусть функции $f_i(0, \ldots, 0)$, $i = 1, \ldots, n$.*

Тогда можно выбрать управление $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ таким образом, чтобы нулевое решение системы (21) с этим управлением было асимптотически устойчивым.

В этой работе был впервые предложен конструктивный метод отображения треугольной системы на линейную. Развитие этого результата приведено в следующей теореме. Для $k = 1, \ldots, n$ обозначим

$$\mathrm{Q}_k = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_k)^* \in \mathbb{R}^k : (x_1, \ldots, x_k, \widetilde{x}_{k+1}, \ldots, \widetilde{x}_n)^* \in \mathrm{Q} \right\}, \ \ \mathrm{Q}_{n+1} = \mathrm{Q} \times \mathbb{R}.$$

Теорема 3.10 (Е.В. Скляр [55]). *Для того чтобы система (21) (с функциями f_k класса $\mathrm{C}^{n-k+1}(\mathrm{Q}_{k+1})$, $k = 1, \ldots, n$) отображалась локально в области Q на каноническую систему с помощью замены переменных $z = F(x)$ (класса $\mathrm{C}^2(\mathrm{Q})$ с невырожденным якобианом) и аддитивной замены управления $v = G(x_1, \ldots, x_n) + u$ (класса $\mathrm{C}^1(\mathrm{Q})$), необходимо и достаточно, чтобы* *для любых* $x = (x_1, \dots, x_n)^* \in \mathrm{Q}$, $u \in \mathbb{R}$ *выполнялось равенство*

$$\frac{\partial f_n(x_1, \dots, x_n, u)}{\partial u} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f_i(x_1, \dots, x_{i+1})}{\partial x_{i+1}} = c(x_1), \tag{22}$$

где $c(x_1)$ – n *раз непрерывно-дифференцируемая функция, не обращающаяся в нуль в области* Q_1.

Пример. Рассмотрим для треугольной системы вида

$$\dot{x}_1 = \frac{25x_2}{27x_1^2+9}, \quad \dot{x}_2 = x_1 + \frac{1}{3}x_3^3 + x_3, \quad \dot{x}_3 = -\frac{25x_2}{9(1+x_3^2)(3x_1^2+1)} + \frac{u}{1+x_3^2} \tag{23}$$

задачу быстродействия из точки $x^0 = (4/3, 0, -1)^*$ в точку $x^1 = (0, 0, 0)^*$ с ограничениями на управление $|u| \le 1$. Условие (22) выполняется, так как

$$\frac{\partial f_3}{\partial u} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{25}{27x_1^2 + 9} = c(x_1).$$

Тогда

$$F_1'(x_1) = \frac{1}{c(x_1)} = \frac{9}{25}(3x_1^2 + 1), \quad F_1(x_1) = \frac{9}{25}(x_1^3 + x_1).$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} \ge \frac{9}{25}, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = x_3^2 + 1 \ge 1.$$

Система (23) отображается на каноническую систему

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = z_3, \quad \dot{z}_3 = u, \quad |u| \le 1, \tag{24}$$

с помощью замены переменных

$$z_1 = \frac{9}{25}\,(x_1^3 + x_1), \quad z_2 = x_2, \quad z_3 = x_1 + \frac{1}{3}\,x_3^3 + x_3.$$

Таким образом, задача быстродействия из точки x^0 в точку x^1 для системы (23) при ограничениях на управление $|u| \le 1$ свелась к задаче быстродействия для системы (24) из точки $z^0 = (4/3, 0, 0)^*$ в точку $z^1 = (0, 0, 0).^*$

Воспользовавшись результатами работы [26], в которой дается уравнение для нахождения времени быстродействия и моментов переключения, получаем, что в нашем случае это уравнение имеет вид $3\Theta^4 - 128\Theta = 0$, откуда время быстродействия $\Theta_0 = 4\sqrt[3]{2/3}$, а моменты переключения соответственно равны: $t_1 = \sqrt[3]{2/3}$, $t_2 = 3\sqrt[3]{2/3}$; на интервалах $(0, t_1)$, (t_2, Θ_0) управление равно -1, а на интервале (t_1, t_2) управление равно $+1$. Это управление будет оптимальным по быстродействию, переводящее точку x^0 в точку x^1 для системы (23).

3.5. Синтез управлений в банаховых пространствах

Исследование задачи синтеза проводится с помощью функционала $\Theta(x)$ – функционала управляемости, играющего роль, аналогичную функционалу Ляпунова в задачах устойчивости.

Общая теорема о решении задачи синтеза – *метод функционала управляемости* (В.И. Коробов, Г.М. Скляр, 1983 г.) имеет следующий вид.

Теорема 3.11 [24, 25]. *Рассмотрим уравнение* $dx/dt = Ax + f(x,u)$, *где* $x \in X$, $u \in U$, X *и* U *– банаховы пространства, оператор* A *порождает сильно непрерывную группу операторов* $\{e^{At}\}_{-\infty<t<\infty}$, *функция* $f(x,u)$ *непрерывна на* $X \times U$ *и в любой области* $\{(x,u) : 0 < \rho_1^2 \le \|x\|^2 + \|u\|^2 \le \rho_2^2 < \infty\}$ *удовлетворяет условию Липшица*

$$\|f(x'',u'') - f(x',u')\| \le L_1(\rho_1,\rho_2)(\|x''-x'\| + \|u''-u'\|).$$

Пусть в замкнутой области Q^1, $0 \in \mathrm{int}\ \mathrm{Q}^1$, *существует непрерывный функционал* $\Theta(x)$, *удовлетворяющий условиям:*

1) $\Theta(x) > 0$ *при* $x \ne 0$ *и* $\Theta(0) = 0$;

2) если $\Theta(x) \to 0$, *то* $x \to 0$, *т.е. для любого числа* $\varepsilon > 0$ *существует число* $\delta > 0$ *такое, что из* $\Theta(x) < \delta$ *следует* $\|x\| < \varepsilon$;

3) существует $C > 0$ *такое, что множество* $\mathrm{Q} = \{x : \Theta(x) \le C\}$ *ограничено и* $\mathrm{Q} \subset \mathrm{int}\ \mathrm{Q}^1$;

4) $\Theta(x)$ *– непрерывно дифференцируемым (производные в смысле Фреше) в области* Q^1 *за исключением, быть может, точки* $x = 0$;

5) существует управление $u(x)$, $x \in X$, *удовлетворяющее ограничению* $u(x) \in \Omega \subset U$, $x \in \mathrm{Q}$, *и такое, что в любом кольце*

$$K(\rho_1,\rho_2) = \{x : 0 < \rho_1 \le \|x\| \le \rho_2 < \infty\}$$

выполняется условие Липшица

$$\|u(x'') - u(x')\| \le L_2(\rho_1,\rho_2)\|x''-x'\|;$$

6) функция $\Phi(x_0,t) = \Theta(x(t))$ *непрерывно дифференцируема по* t, *если* $x(t)$ *является обобщенным решением задачи Коши*

$$dx/dt = Ax + f(x,u(x)), \quad x(0) = x_0 \in \mathrm{Q} \setminus \{0\}$$

и функционал $\Psi(x_0) = \Phi_t(x_0,0)$ *непрерывен по* x_0 *в* $\mathrm{Q} \setminus \{0\}$;

7) при $x \in D(A) \bigcap (\mathrm{Q} \setminus \{0\})$ *при некоторых* $\alpha > 0$ *и* $\beta > 0$

$$\Psi(x) = \langle \Theta_x, Ax + f(x,u(x)) \rangle \le -\beta\Theta^{1-\frac{1}{\alpha}}(x). \qquad (25)$$

Тогда для любого $x_0 \in \mathrm{Q} \setminus \{0\}$ *существует* $0 < T(x_0) \le \alpha\Theta^{\frac{1}{\alpha}}(x_0)/\beta$ *(если* $\alpha = \infty$, *то* $0 < T(x_0) \le \infty$*) такое, что:*

а) существует единственное на полуинтервале $[0, T(x_0))$ *обобщенное решение* $x(t)$ *задачи Коши* $dx/dt = Ax + f(x, u(x))$, $x(0) = x_0$;

б) $\lim\limits_{t \to T(x_0)} x(t) = 0$ *и* $x(t) \in \mathrm{Q}$ *при* $t \in [0, T(x_0))$.

Справедлива следующая теорема о локальном решении задачи синтеза ограниченных управлений для линейной системы.

Теорема 3.12 [24]. *Рассмотрим уравнение*

$$dx/dt = Ax + Bu, \quad x \in X,\ u \in U, \tag{26}$$

где X *и* U *– гильбертовы пространства,* $A \in [X, X]$, $B \in [U, X]$. *Предположим, что уравнение (26) точно* 0*-управляемое. Пусть* $\mathrm{Q}^1 = \{x : \|x\| \le R\}$ *и* $\Theta(x)$ *– функционал, определяющийся уравнением* $2a_0\Theta = \big(N^{-1}(1/\Theta)x, x\big)$ *в области* $\mathrm{Q}^1 \setminus \{0\}$, $\Theta(0) = 0$. *Тогда существует* $C > 0$ *такое, что* $\mathrm{Q}_c \subset \mathrm{int}\ \mathrm{Q}^1$, *где* $\mathrm{Q}_c = \{x : \Theta(x) \le C\}$, *и для любого* $x_0 \in \mathrm{Q}_c \setminus \{0\}$ *единственное решение* $x(t)$ *уравнения (26) с управлением*

$$u(x) = -B^* N^{-1}(1/\Theta(x))x, \quad x \in \mathrm{Q}_c \setminus \{0\},$$

и начальным условием $x(0) = x_0$ *определено на некотором полуинтервале* $[0, T(x_0))$ *и удовлетворяет условию* $\lim\limits_{t \to T(x_0)} x(t) = 0$, *где* $T(x_0) \le \gamma\Theta(x_0)$ *(*$\gamma > 0$*). При этом для любого* $d > 0$ *и числа* a_0, *удовлетворяющего условию*

$$0 < a_0 \le \frac{d^2}{2^{k+2} + 2^{k+1} r_2/\gamma - 4},$$

в котором k *определено соотношением*

$$Bu_0 + ABu_1 + \ldots + A^k Bu_k = X,$$

управление $u(x)$ *удовлетворяет ограничению* $\|u(x)\| \le d$ *для всех* $x \in \mathrm{Q}_c \setminus \{0\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдуллин Р.З., Анапольский Л.Ю., Воронов А.А., Земляков А.С., Козлов Р.И., Маликов А.И., Матросов В.М. Метод функций Ляпунова в теории устойчивости. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 312 с.
2. Александр Михайлович Ляпунов (1857-1918): Библиографический указатель: Биографический очерк и обзор основных научных результатов. Труды А. М. Ляпунова. Литература о жизни и деятельности ученого / Авт. ст.: Кизилова Н.Н.; Сост.: Глибицкая С.Б., Марченко С.Р.; Науч. ред.: Кизилова Н.Н.; Библиогр. ред.: Полякова Ю.Ю. – Х., 2007. – 73 с.
3. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. – М.: Наука, 1967.
4. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. – М.: Наука, 1970.

5. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во иностр. лит., 1954. – 215 с.
6. Бессонов Г.А., Коробов В.И., Скляр Г.М. Задача устойчивого синтеза ограниченных управлений для некоторого класса нестационарных систем // Прикладная математика и механика.– 1988.– Т. 52.– Вып. 1.– С. 9–15.
7. Благодатских В.И. Линейная теория оптимального управления. – М.: Изд-во МГУ, 1978.
8. Веретенников В.Г. Устойчивость и колебания нелинейных систем. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
9. Галлиулин А.С. Некоторые вопросы устойчивости программного движения. – Казань: Таткнигоиздат, 1960. – 86 с.
10. Гелих А.Х., Лонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
11. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. – М.: Наука, 1970. – 536 с.
12. Жуковский Н.Е. О прочности движения. – Уч. зап. Моск. ун-та, отд. физ.-мат., вып. 4, 1882; Собр. соч., Т. 1. – М.-Л.: Гостехиздат, 1948.
13. Зубов В.И. Методы А.М. Ляпунова и их применение. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1957.
14. Зубов В.И. Устойчивость движения. – М.: Высшая школа, 1973. – 272 с.
15. Зубов В.И. Лекции по теории управления. – М.: Наука, 1975. – 495 с.
16. Зубов С.В., Зубов Н.В. Математические методы стабилизации динамических систем. – Санкт-Петербург: Изд-во Санкт-Петербургского университета, 1996. – 288 с.
17. Кордуняну К. Применение дифференциальных неравенств к теории устойчивости // Analete Stitifice Univ. A.J. Cusa din Jasi. Sec. I. – 1960. – Vol. 6, No. 1. – P. 47–58.
18. Коробов В.И. Управляемость, устойчивость некоторых нелинейных систем // Дифференциальные уравнения. – 1973. – Т. 9, № 4. – С. 614–619.
19. Коробов В.И. Общий подход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости // Математический сборник. – 1979. – Т. 109(151), № 4(8). – С. 582–606.
20. Коробов В.И. Решение задачи синтеза с помощью функции управляемости// Доклады АН СССР. – 1979. – Т. 248, № 5. – С. 1051–1055.
21. Коробов В.И. Общий метод решения задачи синтеза ограниченных управлений // Вестник ХГУ, серия "Прикладная математика и механика". – 1980. – № 205. – С. 59–73.
22. Коробов В.И. Решение задачи синтеза для управляемых процессов с возмущениями с помощью функции управляемости // Дифференциальные уравнения, 1987. – Т. 23, № 2. – С. 236–243.
23. Коробов В.И. Метод функции управляемости: Монография. – М.-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2007. – 576 с.

24. Коробов В.И., Скляр Г.М. Решение задачи синтеза с помощью функционала управляемости для систем в бесконечномерных пространствах // Доклады АН УССР, сер. А. – 1983. – № 5. – С. 11–14.
25. Коробов В.И., Скляр Г.М. Синтез управлений в уравнениях, содержащих неограниченный оператор // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – 1986. – Вып. 45. – С. 45–63.
26. Коробов В.И., Скляр Г.М. Оптимальное быстродействие и степенная проблема моментов // Математический сборник. – 1987.– Т. 134(176), № 2(10). – С. 186 – 206.
27. Коробов В.И., Скляр Г.М. Методы построения позиционных управлений и допустимый принцип максимума // Дифференциальные уравнения. – 1990. – Т. 26, № 11. – С. 1914–1924.
28. Ковалев А.М. Нелинейные задачи управления и наблюдения в теории динамических систем. – К.: Наукова думка, 1980. – 174 с.
29. Красовский Н.Н. Об устойчивости решений системы двух дифференциальных уравнений // Прикладная математика и механика. – 1953. – Т. 17. – Вып. 6. – С. 651–672.
30. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движением. – М.: Физматгиз, 1959.
31. Красовский Н.Н. Теория управления движением. – М.: Наука, 1968. – 465 с.
32. Красовский Н.Н. Проблемы стабилизации управляемых движений // Малкин И.Г. Теория устойчивости движения; Дополнение 4. – М.: Наука, 1966. – С. 475–514.
33. Кунцевич В.М., Лычак М.М. Синтез систем автоматического управления с помощью функции Ляпунова. – М.: Наука, 1977. – 390 с.
34. Летов А.М. Динамика полета и управления. – М.: Наука, 1969. – 395 с.
35. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения // Собрание сочинений. – М.: Изд-во АН СССР, 1956. – Т. 2. – 473 с.
36. Ляпунов А.М. Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения // Собрание сочинений. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1956. – Т. 2. – С. 272–331.
37. Малкин И.Г. Об устойчивости движения в смысле Ляпунова // Математический сборник. – 1938. – Т. 3(45), № 1. – С. 47–101.
38. Мартынюк А.А. Устойчивость движений сложных систем. – Киев: Наукова думка, 1975. – 352 с.
39. Матросов В.М. // Прикладная математика и механика. – 1962. – Т. XXVI. – Вып. 6. – С. 992–1000.
40. Матросов В.М., Васильев С.Н. Метод функций Ляпунова и его приложения. – Новосибирск: Наука, 1984. – 258 с.
41. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. – М.: Наука, 1971. – 304 с.
42. Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. – М.: Наука, 1995.

43. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. – М.: Наука, 1965.
44. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость управления. – М.: Наука, 2002. – 304 с.
45. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальних процессов. – М.: Наука, 1961.– 391 с.
46. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями: Пер. с франц. – М.-Л.: Гостехиздат. – 1947. – 392 с.
47. Румянцев В.В. Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестник Московского университета, серия "Математики, механики, астрономии, физики, химии". – 1957. – № 4. – С. 9–16.
48. Румянцев В.В., Озиранер А.С. Устойчивость и стабилизация движения по части переменных. – М.: Наука, 1987. – 256 с.
49. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости: Пер. с англ. – М.: Мир, 1980.
50. Савченко А.Я. Устойчивость стационарных движений механических систем. – Киев: Наукова думка, 1977.
51. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К.: Выща школа, 1987. – 286 с.
52. Сиразетдинов Т.К. Устойчивость систем с распределенными параметрами. – Новосибирск: Наука, 1987. – 232 с.
53. Скляр Г.М., Ширман В.Я. Об асимптотической устойчивости линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Теория функций, функциональнй анализ и приложения.– 1982. – Вып. 37. – С. 127–132.
54. Скляр Е.В. О классе нелинейных управляемых систем, отображающихся на линейные // Математическая физика, анализ, геометрия. – 2001. – № 2/4. – С. 205 – 214.
55. Скляр Е.В. Отображение треугольных управляемых ситем на линейные без замены управления // Дифференциальные уравнения. – 2002. – Т. 38, № 1. – С. 34–43.
56. Харитонов В.Л. Асимптотическая устойчивость положения равновесия семейства систем дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. —- 1978. —- № 11. —- С. 2086—2088.
57. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их парметров. – М.: Наука, 1969.
58. Чаплыгин С.А. Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений // Избранные труды по механике и математике. – М.: Гостехиздат, 1954. – С. 490–538.
59. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. – 1-е изд. – М.-Л.: Гостехиздат, 1946; 2-е изд., 1955; 3-е изд., 1965. – 207 с.
60. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962.

61. Чоке Риверо А.Е., Коробов В.И., Скорик В.А. Функция управляемости как время движения. II // Математическая физика, анализ, геометрия. – 2004. – Т. 11, № 3. – С. 341–354.
62. Bellman R. // SIAM J. Control, Ser. A. – 1962. – № 1. – P. 32–34.
63. Celikovsky S., Nijmeijer H. Equivalence of nonlinear systems to triangular form: the singular case // Systems and Control Letters. – 1996. – No. 27. – P. 135–144.
64. Celikovsky S. Global linearization of nonlinear systems – a survey // in: Geom. in Nonlin. Control and Diff. Incl. – Warszawa, 1995. – P. 123–137.
65. Celikovsky S. Topological linearization of nonlinear systems: application to nonsmooth stabilization // Kybernetika. – 1985. – Vol. 31. – P. 141–150.
66. Celikovsky S. Numerical algorithm for the nonsmooth stabilization of triangular form systems // Kybernetika. – 1986. – Vol. 32. – P. 261–279.
67. Korobov V.I., Krutin' V.I., Sklyar G.M. On optimal control problem with a mixed cost function // SIAM J.Control and Optimiz. – 1993. – Vol. 31, No. 3. – P. 624–645.
68. Korobov V.I., Skoryk V.O. Synthesis of restricted inertial controls for systems with multivariate control // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2002. – Vol. 275, No. 1. P. 84–107.
69. Lakshmikantham V., Leela S. Differential and itegral inequalities. Theory and applications. Vol. 1, 2. – N. Y.: Acad. Press, 1969.
70. Mitropolski Yu.A., Born P., Martynyuk A.A. Alexander Mikhailovich Liapunov // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. – 2002. – Vol. 7(2). – P. 113–120.
71. Routh E.J. A treatise on the stsbility of a given stste of motion. – London, 1877.
72. Routh E.J. The advanced part of a treatise on the Dynamics of a system of rigid bodies. – London, Part II, 4 eddition, 1884.
73. Sklyar G.M., Sklyar K.V., Ignatovich S.Yu. On the extension of the Korobov's class of linearizable triangular systems by nonlinear control systems of the class C^1 // Systems Control Letters. – 2005. – Vol. 54. – P. 1097–1108.
74. Thomson W., Tait P. Treatise on Natural Phylosophy. – Cambridge University Press. – 1879. – Vol. I. – Part I.
75. Wazewski T. System des equations et des inegalites differentiles ordinaires aux deuxiemes members monotones et leurs applications // Ann. Soc. Polonaise Math. – 1950. – Vol. 23. – P. 112–166.
76. Yoshizawa T. Stability theory by Liapounov's second method. – Tokyo: Math. Soc. Japan, 1966.