Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 531/534:57 № 850, 2009, с.83–90

Системы с нецелым числом степеней свободы

В. П. Трегубов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация

Представлены результаты исследования особенностей механических систем с нецелым числом степеней свободы. Установлено, что такие системы, в отличие от систем с традиционными упруговязкими свойствами, при любых значениях коэффициента вязкого трения имеют максимум амплитудно-частотной характеристики, а при обращении этих коэффициентов в бесконечность имеют дополнительные резонансные частоты.

2000 Mathematics Subject Classification 92C10.

1. Введение.

Термин "нецелое число степеней свободы"появился в первой половине XX века. В вышедшей в 1937 году книге А. А. Андронова и С. Э. Хайкина "Теория колебаний"были описаны линейные системы с $\frac{1}{2}$ степени свободы. Одна из них рассматривалась как вырождение линейного осциллятора с малой массой, другая — как электрический контур с малой индуктивностью. В обоих случаях поведение системы описывалось обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка. В связи с этим, здесь и позднее понятие нецелого числа степеней свободы связывалось с порядком уравнения (или системы уравнений), описывающего поведение системы. К сожалению, и в указанном первом издании, и в последующих изданиях (уже в соавторстве с А.А.Виттом) [1] обсуждение этих систем ограничилось особенностями задания начальных данных.

В 1964 году вышло первое издание книги Я. Г. Пановко и И. И. Губановой "Устойчивость и колебания упругих систем"[2]. В ней при изложении теории колебаний линейных систем были рассмотрены и системы с нецелым числом степеней свободы, в том числе системы с полутора степенями свободы, движение которых описывается дифференциальным уравнением третьего порядка. Эти системы по-прежнему рассматривались как вырождение систем с конечным числом степеней свободы при пренебрежимо малом значении одной из масс.

Однако существуют два класса систем, при описании которых мы приходим к уравнениям или системам уравнениям нечетного порядка, что и считается часто признаком нецелого числа степеней свободы. К первому классу относятся некоторые электромеханические, биомеханические и другие не чисто механические системы, в которых приходится учитывать процессы, описываемые уравнения первого порядка. Примером может служить работа [3], в которой поведение вибратора шлейфного осциллографа описывается уравнением третьего порядка. К другому классу относятся чисто механические системы, содержащие в своей структуре устройства или материалы, силовая характеристика которых включает не только силу, деформацию и скорость деформации, но и скорость изменения силы. Примеры таких систем и исследование некоторых их особенностей приводятся ниже.

2. Системы с полутора степенями свободы.

Мы будем рассматривать только механические системы с сосредоточенными параметрами цепной структры. Для систем с целым числом степеней свободы порядок соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений, равен $2n$, где n — число степеней свободы. Для механической системы цепной структуры, в которой силы, развиваемые деформируемыми элементами, являются линейными функциями смещения и скорости, система уравнений имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{ij}\ddot{x}_i + b_{ij}\dot{x}_i + c_{ij}x_i) = 0, \qquad j = \overline{1,n}. \tag{1}$$

В случае, если развиваемое усилие в деформируемом элементе зависит не только от деформации и скорости изменения деформации, но также и от скорости изменения самой силы,то эта зависимость в простейшем случае имеет вид:

$$\alpha\dot{F} + \beta F = -b\dot{x} - cx. \tag{2}$$

Такие зависимости были установлены, в частности, при исследовании механических свойств межпозвоночных дисков [4], стенки кровеносного сосуда [5] и некоторых электромеханических систем. В частности, соотношению (2) удовлетворяет сила, развиваемая комбинацией из трёх элементов, изображенной на рис.1 и являющейся одной из обобщенных реологических моделей.

В этом случае выражение (2) примет следующий конкретный вид:

$$\frac{b}{c_2}\dot{F} + \frac{c_1+c_2}{c_2}F = -b\dot{x} - c_1x. \tag{3}$$

Дифференциальное уравнение движения массы m под действием этой силы будет иметь третий порядок, а именно:

$$a\dddot{x} + d\ddot{x} + b\dot{x} + c_1x = 0, \tag{4}$$

а в случае кинематического возбуждения основания $y = A_0\sin(\omega t)$:

$$a\dddot{x} + d\ddot{x} + b\dot{x} + c_1x = b\dot{y} + c_1y, \tag{4'}$$

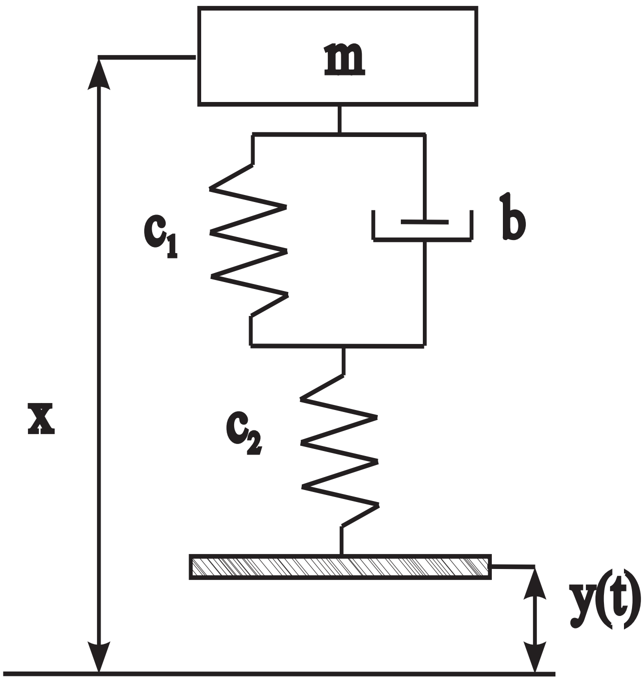

Рис. 1: Система с полутора степенями свободы

В уравнениях (4) и (4′) коэффициенты a и b задаются выражениями [1]:

$$a = m\frac{b}{c_2}, d = m\frac{c_1 + c_2}{c_2}.$$

К уравнению, аналогичному уравнению (4′), пришли также авторы работы [3] при исследовании свойств вибратора шлейфного осциллографа.

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) системы, изображенной на рис.1, может быть записана следующим образом [6]:

$$H(\omega) = \sqrt{\frac{b^2\omega^2 + c_1^2}{a^2\omega^6 + (d^2 - 2ab)\,\omega^4 + (b^2 - 2c_1 d)\,\omega^2 + c_1^2}}, \tag{5}$$

где $H(\omega) = \frac{A(\omega)}{A_0}$.

Записав производную от квадрата АЧХ убедимся, что наличие экстремумов определяется бикубическим уравнением:

$$e_3\omega^6 + e_2\omega^4 + e_1\omega^2 + e_0 = 0, \tag{6}$$

где

$$e_3 = \frac{-4m^2b^4}{c_2^2},$$

$$e_2 = \frac{2mb^2\left(2b^2c_2 - m\left((c_1+c_2)^2 + c_1^2\right)\right)}{c_2^2},$$

$$e_1 = \frac{4mc_1^2\left(2b^2c_2 - mc_1 + c_2^2\right)}{c_2^2},$$

$$e_0 = \frac{4m\left(c_1+c_2\right)c_1^3}{c_2^2}.$$

Воспользовавшись правилом Декарта для определения количества положительных корней уравнения (6), мы придем к выводу, что АЧХ такой системы имеет один максимум в области $\omega > 0$, и он существует всегда, то есть при любых $b \neq 0$. Это первое отличие системы с полутора степенями свободы от системы с одной степенью свободы, у которой при уменьшении b, начиная с некоторого его значения, АЧХ не имеет максимума в области $\omega > 0$.

В отсутствии трения ($b = 0$), как и для системы с одной степенью свободы, наблюдается явление резонанса на частоте $\omega^* = \sqrt{\frac{c_1c_2}{(c_1+c_2)m}}$. С ростом коэффициента b максимальное значение АЧХ уменьшается. Однако после достижения некоторого значения b^* максимальное значение АЧХ снова начинает расти и при $b = \infty$ обращается в бесконечность, теперь уже при $\omega^{**} = \sqrt{\frac{c_2}{m}}$ как это показано на рис.2.

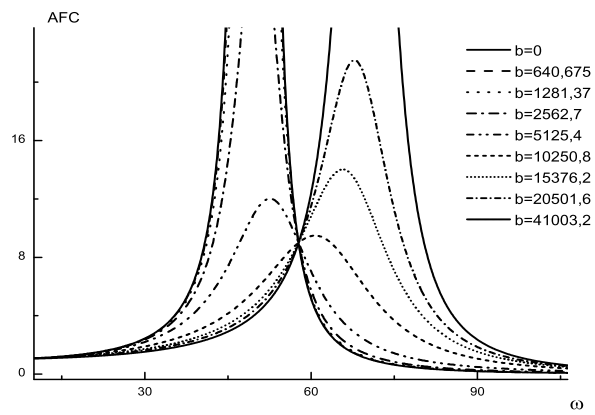

Рис. 2: АЧХ системы с полутора степенями свободы

Таким образом, система с полутора степенями свободы имеет две резонансные частоты: при $b = 0$ и при $b = \infty$.

Двухмассовые и многомассовые системы.

Далее было исследовано поведение АЧХ двухмассовой системы, построенной по аналогичному принципу (рис.3). Движение этой механической системы описывается системой двух дифференциальных уравнения третьего порядка:

$$\begin{cases} m_1\frac{b_1}{c_{12}}\dddot{x}_1+m_1\frac{c_{11}+c_{12}}{c_{12}}\ddot{x}_1+b_1\dot{x}_1+c_{11}x_1-b_1\dot{x}_2-c_{11}x_2=0, \\ m_2\frac{b_2}{c_{22}}\dddot{x}_2+m_2\frac{c_{21}+c_{22}}{c_{22}}\ddot{x}_2+b_2\dot{x}_2+c_{21}x_2+m_1\frac{b_1}{c_{22}}\dddot{x}_1+ \\ +m_1\frac{c_{21}+c_{22}}{c_{22}}\ddot{x}_1=b_2\dot{y}+c_{21}y. \end{cases} \tag{7}$$

Квадрат модуля передаточной функции (АЧХ) для массы m_1 при кинематическом возбуждении системы можно записать следующим образом:

$$|W_1(\omega)|^2=\frac{|\Delta_1|^2}{|\Delta|^2}, \tag{8}$$

а входящие сюда определители Δ_1 и Δ имеют следующий вид:

$$|\Delta_1|^2=\left(\left(c_{11}c_{21}-b_1b_2\omega^2\right)^2+\left(b_1c_{21}+b_2c_{11}\right)^2\omega^2\right),$$

$$|\Delta|^2=\left(-af\omega^6+(ab_2+fb_1+dg+hb_1)\,\omega^4-(gc_{11}+dc_{21}+b_1b_2+c_{11}k)\,\omega^2+c_{11}c_{21}\right)^2$$

$$+\left((ag+fd)\omega^5-(ac_{21}+fc_{11}+gb_1+db_2+hc_{11}+kb_1)\,\omega^3+(b_2c_{11}+b_1c_{21})\,\omega\right)^2.$$

При записи определителя Δ для краткости использованы следующие обозначения:

$$a=m_1\frac{b_1}{c_{12}}, d=m_1\frac{c_{11}+c_{12}}{c_{12}}, f=m_2\frac{b_2}{c_{22}}, g=m_2\frac{c_{21}+c_{22}}{c_{22}},$$

$$h=m_1\frac{b_2}{c_{22}}, k=m_1\frac{c_{21}+c_{22}}{c_{22}}.$$

При обращении в нуль обоих коэффициентов вязкого трения b_1 и b_2 АЧХ (8) обращается в бесконечность при значениях ω_1^* и ω_2^*, являющихся корнями полинома, стоящего в знаменателе: ;

$$|W_1(\omega,b_1,b_2)|\to\frac{1}{|a\omega^4-d\omega^2+1|}, b_1\to\infty, b_2\to\infty,$$

где $a=\frac{m_1m_2}{c_{12}c_{22}}$, $d=m_1\frac{c_{11}+c_{22}}{c_{11}c_{22}}+\frac{m_2}{c_{22}}$.

По существу эти значения ω_1^* и ω_2^* являются дополнительными резонансными частотами. Сама же механическая система, изображенная на Рис.3, в отличие от традиционных систем, сохраняет колебательные свойства при всех значениях b (Рис.4).

С помощью компьютерного моделирования было установлено, что это явление сохраняется и для многомассовых систем цепной структуры, построенных по той же схеме.Здесь следует заметить, что исследованные системы составлялись как последовательная комбинация элементов, каждый из которых обладал полутора степенями свободы. При этом порядок системы уравнений может быть и четным. Так, движение рассмотренной выше двухмассовой

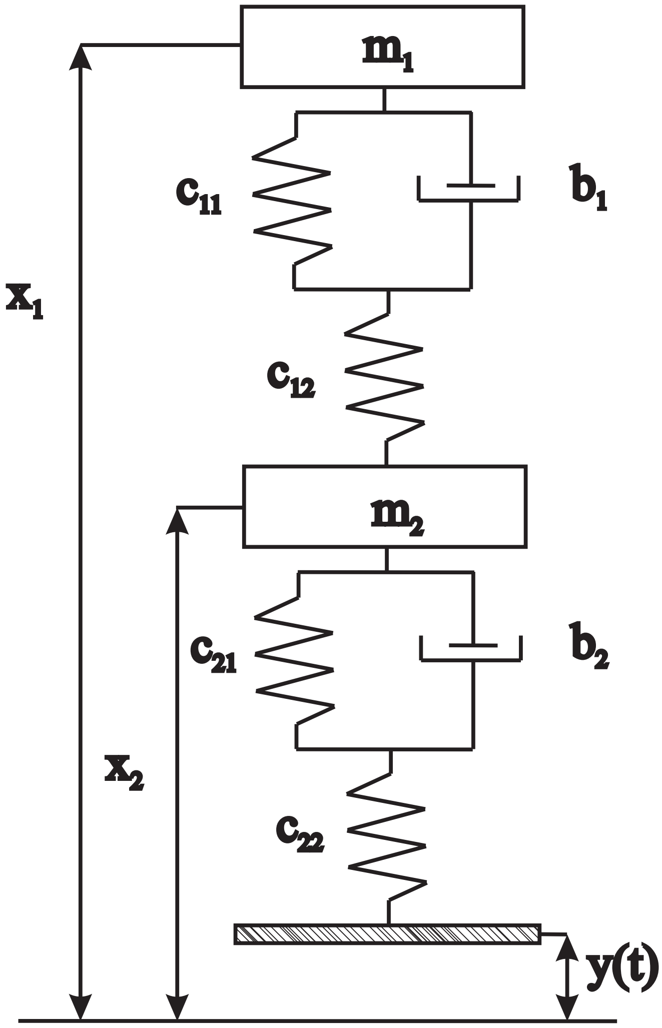

Рис. 3: Двухмассовая система

механической системы описывается системой дифференциальных уравнений шестого порядка (7), и значит число степеней свободы дожно равняться трем. В то же время ожидаемой третьей резонансной частоты не возникает и в отсутствии трения их по-прежнему две. Это означает, что сформулированное ранее правило, связывающее число степеней свободы с порядком системы уравнений, работает не всегда, поскольку, видимо, является слишком формальным.

3. Заключение.

Продемонстрированные в статье некоторые особенности систем с нецелым числом степеней свободы имеют практическое значение для двух типов задач. К первому типу относятся задачи, в которых нужно построить механическую модель объекта, в котором есть элементы с силовой характеристикой

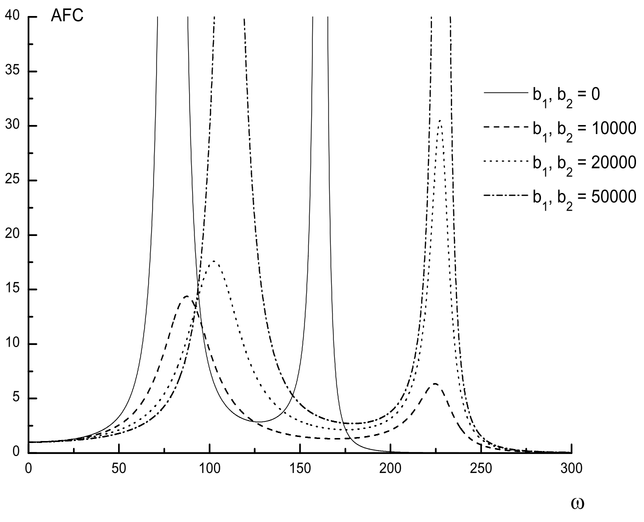

Рис. 4: АЧХ двухмассовой системы

вида (2). К таким задачам, в частности, относятся задачи моделирования живых систем, таких как моделирование динамики позвоночника при вибрационных воздействиях [7] и модельное изучение распространения пульсовой волны по кровеносным сосудам [8].Ко второму типу относятся такие задачи, при решении которых в последнее время особенности систем с нецелым числом степеней свободы преднамеренно используются для синтеза объкта с заданными свойствами.В качестве примера можно привести задачу о построении оптимальной системы подрессоривания [9]. Все это требует дальнейшего исследования особенностей систем с нецелым числом степеней свободы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А.А., Витт А.А. и Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М.: Физматгиз, 1959 – 915 с.

2. Пановко Я.Г. и Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. – М.: Наука, 1987 – 352 с.

3. Львович А.Ю., Сабанеев В.С. О выборе оптимальных параметров вибратора шлейфного осциллографа // Вестник Ленинградского университета, - 1963 г. - № 1. - С. 106-114.

4. Orne D., King. Y. Liu, A mathematical model of spinal response to impact // Journal of Biomechanics. - 1971. - Vol. 4, No. 1. - P. 49-71.

5. Левтов В.А., Регирер С.А., Шадрина Н.Х. Реология крови. – М.: Медицина, 1982 – 272 с.

6. Tregoubov V.P., Azanchevsky V.V. Some Peculiarities of Human Body Modelling in the Case of Vibration // Lecture Notes of the ICB Seminars. - 2006. - Vol.77. - P. 157-165.

7. Трегубов В.П., Азанчевский В.В.. Механические модели тела человека с нецелым числом степеней свободы // Тез. докл. VIII Всеросс. конф. по биомеханике. - 2006. - с. 39-40.

8. Kizilova N.N. Pressure wave propagation in liquid field // Fluid dynamics. - 2006. - Vol. 41, No. 3. - P. 434-446.

9. Сарач Е.Б. Повышение быстроходности транспортных машин путем использования систем подрессоривания с "нецелым числом степеней свободы". Сб. тр. каф. "Колесные машины"МГТУ им Н.Э.Баумана. - 2003. - С. 28-34.

Статья получена: 27.10.2008; окончательный вариант: 06.04.2009; принята: 27.04.2009.