Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.9:535.4 № 850, 2009, с.71–77

Дифракция плоской акустической волны на сфере с круговым отверстием

В.А. Резуненко

Харьковский национальный университет имени В.Н.Каразина, Украина

Найдена и обращена главная часть матричного оператора задачи дифракции плоской акустической волны на сфере с круговым отверстием. Регуляризация задачи базируется на использовании интегрального преобразования типа Абеля. В результате получена эффективно разрешимая бесконечная система алгебраических уравнений Фредгольма II рода с компактным оператором в гильбертовом пространстве l_2. Рассмотрены некоторые варианты постановки и обобщения задачи.
2000 Mathematics Subject Classification 65N12, 35A25,78A45.

1. Введение.

Известно, что в литературе по математической физике, по теории дифракции имеется сравнительно мало работ, посвященных решению задач акустики на сфере с круговым отверстием [1]–[4]. Однако, актуальность таких задач следует, в частности, из того, что замкнутая сфера и сфера с круговым отверстием применяется в качестве хорошего прототипа многих устройств: отражателей, резонаторов, узлов волноводов, преобразователей акустических колебаний в электрические. Многочисленные применения сферических поверхностей стимулируют развитие методов решения прямых и обратных задач математической физики, теории дифракции и вычислительной электродинамики [5]– [9].

В данной работе применяется и уточняется метод регуляризации для решения задачи дифракции плоской акустической волны на сфере с круговым отверстием произвольных геометрических параметров. В результате регуляризации задача отыскания акустического потенциала скоростей в трехмерном пространстве сведена сначала к решению интегрального уравнения типа Абеля I рода для вспомогательной функции, а затем к решению бесконечной системы алгебраических уравнений Фредгольма II рода с компактным оператором в гильбертовом пространстве l_2. В работе показана, в частности, эффективная разрешимость полученной системы алгебраических уравнений, в частности показано, что скорость сходимости метода редукции пропорциональна $N^{-3/2}$, где N порядок редукции системы. Рассмотрены некоторые варианты постановки и обобщения задачи.

2. Постановка задачи.

Пусть центр сферы с круговым отверстием (центр сферического кругового сегмента) размещён в начале декартовой и сферической систем координат, у которых совмещена полярная ось OZ. Полагаем a_0 - радиус сферического сегмента, θ_0 - полярный угол, измеряющий сегмент (на сегменте $0 \leq \theta < \theta_0$). Плоскость отверстия в сфере перпендикулярна оси OZ. Пусть плоская акустическая волна распространяется из бесконечности в R^3 вдоль оси OZ. Полагаем сферический сегмент тонким и жёстким, а окружающую его материальную среду - вакуумом. Требуется найти дифракционные вторичные поля и полные акустические поля. Зависимость полей от времени полагаем гармонической вида $exp(-i\omega t)$ (ω - круговая частота). Для рассматриваемых полей полные потенциалы скоростей U должны удовлетворять уравнению Гельмгольца $\Delta U + k^2 U = 0$, граничным условиям, например, частные производные по переменной r должны быть непрерывны на всей поверхности сегмента и на отверстии при $r = a_0, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, условию конечности интеграла акустической энергии Wв любой ограниченной области V пространства R^3: $W = \int_V |U|^2 dV < \infty$ и условию излучения на бесконечности. В такой постановке задача Неймана для уравнения Гельмгольца имеет единственное решение [10].

3. Парные сумматорные уравнения по полиномам Лежандра.

Плоскую акустическую волну зададим потенциалом скоростей U_0, который в сферической системе координат представим так:

$$U_0 = \sum_{n=0}^{\infty} F_n j_n(kr) P_n(\cos\theta), \quad 0 \leq r < \infty, \tag{1}$$

где $j_n(kr)$- сферические функции Бесселя (в обозначениях Дебая) первого рода порядка n аргумента kr, где $k = 2\pi/\lambda$, λ - длина волны, $P_n(\cos\theta)$ - полиномы Лежандра первого рода степени n порядка 0 аргумента $\cos\theta$. В (1) коэффициенты F_n характеризуют направление распространения плоской волны из верхнего $z > 0$ или нижнего $z < 0$ полупространства в R^3:

$$F_n = (2n+1)F_{n,0}; \quad F_{n,0} = i^n, z > 0; \quad F_{n,0} = (-i)^n, z < 0. \tag{2}$$

Пусть в R^3 выделены две области, для которых соответственно $0 \leq r < a_0$, $r > a_0$ и $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Вторичные потенциалы в этих областях представим рядами Фурье, аналогичными (1):

$$U_1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n F_n j_n(kr) P_n(\cos\theta), \quad 0 \leq r < a_0, \tag{3}$$

$$U_2 = \sum_{n=0}^{\infty} B_n F_n h_n(kr) P_n(\cos\theta), \quad a_0 < r < \infty. \tag{4}$$

Отметим, что в (4) используются сферические функции Ханкеля $h_n(kr)$ первого рода порядка n. Из граничных условий для отыскания коэффициентов $B_n, n = 0, 1, 2, ...$ ряда (4) устанавливаем парные сумматорные функциональные уравнения по полиномам Лежандра:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\{B_n F_n [h_n(ka_0)]' + F_n [j_n(ka_0)]'\} P_n(\cos\theta), \quad 0 \le \theta < \theta_0, \tag{5}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n F_n \frac{1}{[j_n(ka_0)]'} P_n(\cos\theta), \quad \theta_0 < \theta \le \pi, \tag{6}$$

в которых штрих $\{'\}$, как обычно, обозначает производную по аргументу ka_0. Системы вида (5), (6) встречаются во многих прикладных задачах на сферических и иных поверхностях. Каждый тип уравнений отличается видом коэффициентов при полиномах Лежандра и скоростью роста (или убывания) коэффициентов при $n \to \infty$ на частичных интервалах основного интервала. Так, в [7]–[9] применяется метод регуляризации матричного оператора задачи дифракции с помощью интегрального преобразования типа Абеля, в [5]–[7] применяется метод задачи Римана - Гильберта, в [11], аналог косинус-пребразования Фурье на конечном отрезке, в [12] -метод интегрального преобразования Канторовича - Лебедева. Общего эффективного метода решения таких уравнений пока не найдено. В данной работе применяется и уточняется метод регуляризации парных сумматорных уравнений [5]–[9]. В результате получаем систему алгебраических уравнений Фредгольма II рода с компактным оператором в l_2.

4. Интегральные уравнения первого рода.

Рассмотрим вспомогательную систему функциональных уравнений относительно искомых коэффициентов D_n :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1) D_n P_n(\cos\theta) = R1(\theta), \quad 0 \le \theta < \theta_0, \tag{7}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_n P_n(\cos\theta) = S1(\theta), \quad \theta_0 < \theta \le \pi, \tag{8}$$

где функции $R1(\theta), S1(\theta), \theta \in [0, \pi]$ полагаем заданными, допускающими разложения вида левых частей в (7),(8):

$$R1(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1) R_n P_n(\cos\theta), \quad 0 <\le \theta < \theta_0, \tag{9}$$

$$S1(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n P_n(\cos\theta)), \quad \theta_0 < \theta \le \pi. \tag{10}$$

Полагаем, что искомые коэффициенты D_n и коэффициенты Фурье $R_n, S_n, n \geq 0$ функций $R1(\theta), S1(\theta)$ в уравнениях (7), (8) принадлежат пространству l_2 с некоторым весом, так что ряды в (7), (8) есть ряды Фурье функций из $L_2[0,\pi]$. Поиск коэффициентов D_n сведём к решению интегральных уравнений типа Абеля и получим новую систему функциональных уравнений по элементарным функциям. Для этого преобразуем сначала уравнение (7). Используя связь между полиномами Лежандра и их производными

$$(2n+1)P_n(x) = \frac{d}{dx}P_{n+1}(x) - \frac{d}{dx}P_{n-1}(x), \tag{11}$$

заменим $(2n+1)P_n(\cos\theta)$ соответствующей разностью (11). Затем, используя принадлежность коэффициентов D_n и коэффициентов R_n пространству l_2, проинтегрируем уравнение (7) почленно. Возникающая константа интегрирования равна нулю, так как для $\theta = 0$ при $n \geq 0$ и при $n = -1$ все полиномы $P_n(\cos(0))$ равны 1. Заметим, если интегрировать по θ уравнение (8), то константа интегрирования не обращается в ноль и равна коэффициенту D_0, так как, в частности для $\theta = \pi$ при $n \geq 0$ все $P_n(\cos(\pi))$ равны $(-1)^n$, а при $n = -1$ $P_n(\cos(\pi)) = 1$. Факт отличия константы интегрирования от нуля приводит к усложнению алгоритма решения системы уравнений (7),(8) [10].

Теперь, в уравнение (8) и в проинтегрированное уравнение (7), подставим вместо полиномов Лежандра интегральные представления Мелера - Дирихле:

$$\pi/\sqrt{2}P_n(\cos\theta) = \int_0^\theta (\cos y - \cos\theta)^{(-1/2)}\cos[(n+\frac{1}{2})y]dy. \tag{12}$$

$$\pi/\sqrt{2}P_n(\cos\theta) = \int_\theta^\pi (\cos\theta - \cos y)^{(-1/2)}\sin[(n+\frac{1}{2})y]dy. \tag{13}$$

В уравнении (8) и в проинтегрированном уравнении (7) поменяем порядки суммирования и интегрирования, так как коэффициенты $D_n, R_n \in l_2$. Этим получаем интегральные уравнения Вольтерра первого рода типа Абеля вида:

$$\int_0^\theta F(y)(\cos y - \cos\theta)^{(-1/2)}dy = 0, \int_\theta^\pi G(y)(\cos\theta - \cos y)^{(-1/2)}dy = 0. \tag{14}$$

Здесь искомые функции $F(y), G(y)$ принадлежат пространству $L_2[0,\pi]$. Спектр интегральных операторов Абеля (14) имеет единственную предельную точку $\{0\}$. Решение уравнений (14) существует и единственно [14]. Решение уравнений [14] строится применением композиции с ядром вида $(\cos t - \cos z)^{(-1/2)}$, $t, z \in [0,\pi]$. В результате получаем однородные сумматорные уравнения по тригонометрическим функциям на взаимно дополняющих частях $[0,\theta_0)$ и $(\theta,\pi]$ сегмента $[0,\pi]$, которые запишем так:

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_n \sin[\left(n+\frac{1}{2}\right)y] = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} R1_n \sin[\left(n+\frac{1}{2}\right)y], y \in [0,\theta_0), \\ \sum_{n=0}^{\infty} S1_n \sin[\left(n+\frac{1}{2}\right)y], y \in (\theta_0,\pi]. \end{cases} \tag{15}$$

5. Системы алгебраических уравнений второго рода. Выводы.

Выполним переход от функциональных уравнений (5),(6) к функциональным уравнениям (7), (8), а затем к уравнению вида (15) – рядам по элементарным функциям. Для этого введём в (5),(6) обозначения

$$D_n^{(1)} = \frac{B_n F_n}{[j_n(ka_0)]'}, \quad \varepsilon_n = 1 + 4i(ka_0)^3 \frac{[j_n(ka_0)]'[h_n(ka_0)]'}{(2n+1)}, \tag{16}$$

$$R1_n^{(1)} = D_n^{(1)}\varepsilon_n + i4(ka_0)^3 \frac{[j_n(ka_0)]'}{(2n+1)}, \qquad S1_n = 0. \tag{17}$$

При этом отметим, что введение в (5),(6) параметра малости ε_n (16) выполняем разбиение матричного оператора A в функциональных уравнениях (5),(6) на две части $A = A1 + A2$, такие что $A1$ имеет обратный $A1^{-1}$, а произведение операторов $A1^{-1}A2$ является вполне непрерывным оператором в $L_2[0,\pi]$. Обратный оператор к оператору $A1$ строим методом, близким к методу задачи Римана - Гильберта. При этом используем полноту и ортогональность функций $sin[(n+1/2)y], n = 0,1,2,3,...$ в $L_2[0,\pi]$.

В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений второго рода

$$D_n^{(1)} = \sum_{m=0}^{\infty} D_m^{(1)}\varepsilon_m\beta_{n,m}^{(0)} + 4i(ka_0)^3 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{F_m[j_m(ka_0)]'}{2m+1}\beta_{n,m}^{(0)}, \tag{18}$$

в которой

$$\beta_{n,m}^{(0)} = \pi^{-1}\{\frac{\sin(n-m)\theta_0}{n-m} - \frac{\sin(n+m+1)\theta_0}{n+m+1}\}, \quad n \neq m, \tag{19}$$

$$\beta_{n,n}^{(0)} = \pi^{-1}\{\theta_0 - \sin(2n+1)\theta_0/(2n+1)\}, |\beta_{n,m}^{(0)})| \leq \theta_0, n = m = 0,1,2,... \tag{20}$$

В системе (18)(СЛАУ-11)матричный оператор вполне непрерывен в l_2 и правый столбец принадлежит l_2. Это обеспечивается тем, что для величин $\beta_{n,m}^{(0)}$ (19) выполняются оценки сверху (20), а параметр малости ε_n (16) имеет асимптотическое представление

$$\varepsilon_n = K_0(n+1/2)^{-2} + O(n^{-4}), |\ K_0 \ | < \infty, n \to \infty. \tag{21}$$

Система (18)имеет единственное решение в l_2. Отметим, что спектр матричного оператора этой системы не содержит единицу. Для произвольных параметров ka_0 и θ_0 система разрешима численно, например, методом редукции. Заметим, что зависимость матричных элементов системы (18) от параметра θ_0 по строкам и столбцам симметрична, так как $\beta_{n,m} = \beta_{m,n}$.

Зависимость матричных элементов от параметра ka_0 симметризуется асимптотически при $n \to \infty$ линейной подстановкой $D_n^{(2)} = D_n^1/(n+1/2)$. Элементы правого столбца систеы (18) есть быстро и равномерно сходящиеся ряды по θ_0 на $[0,\pi]$. Поэтому скорость сходимости метода редукции для системы (18) пропорциональна $N^{-3/2}$, где N - порядок редукции, $N \to \infty$

Система разрешима и аналитически - методом последовательных приближений для малых углов θ_0, близких к нулю, и больших углов, близких к π. Так, для случая больших углов, когда $(\pi - \theta_0) \ll 1$, резонансные вынужденные акустические колебания сферы с отверстием описываются приближённо функциями $j_n(kr)P_n(\cos\theta)$, Для замкнутой сферы приведенные резонансные частоты $x = ka_0$, как известно, есть решения уравнений $[j_n(x)]' = 0, n = 0, 1, 2, ...$ [16, 17], а отклонения частот вынужденных колебаний незамкнутой сферы от частот замкнутой сферы пропорциональны третьей степени величины отверстия в сфере $O((\pi - \theta_0)^3)$. Отметим факт быстрого убывания параметра малости ε_n , $n \to \infty$ (21), входящего в систему функциональных уравнений (15), в которых в правой части следует мспользовать коэффициент $R1_n^1$ (17), содержащий ε_n. Это факт позволяет выполнить выделение и обращение следующей главной части системы функциональных уравнений (7), (8), эквивалентной (18) и получить новую СЛАУ-11, у которой убывание матричных элементов по строке будет быстрее, пропорционально $n^{-4}, n \to \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Скучик Е. Основы акустики.Т. 2. - М.: -Мир, - 1976. - 542 с.

2. Thomson D.P. Diffraction by a spherical cap.//Proc. Cambrige Philos. Soc. - 1963.-T.59 - C. 197-209.

3. Савин В.Г., Моргун П.О. Преобразование акустических импульсов в электрические сферической пьезокерамической оболочкой. // Электроника и связь. - 2006. - N. 6. - С. 36-42.

4. Морс Ф.М. и Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т.2. -М.: ИЛ. -1960. -493 с.

5. Агранович З.С., Марченко В.А., Шестопалов В.П. Дифракция электромагнитных волн на плоских металлических решетках. // Журн. техн. физ . - 1962. - Т. 32,**4**. - С. 381-394.

6. Шестопалов В.П., Литвиненко Л.Н., Масалов С.А., Сологуб В.Г. Дифракция волн на решетках. - Харьков: Изд. ХГУ, - 1973. - 288 с.

7. Шестопалов В.П., Тучкин Ю.А., Поединчук А.Е., Сиренко Ю.К. Новые методы решения прямых и обратных задач теории дифракции. - Харьков: Основа, - 1997. - 284 с.

8. Свищев Ю.В., Тучкин Ю.А. Векторная задача дифракции электромагнитных волн на двух сферических сегментах.// ДАН УССР, сер. А. - 1987. - Т. 12. - с. 56-60.

9. Радин А.М., Резуненко В.А., Шестопалов В.П. Излучение волн сферой с круговым отверстием. //Журн. вычисл. матем.и матем. физ.- 1977. - Т.17,2. С. 394-406.

10. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. - М.: Мир, - 1987. - 312 с.

11. Резуненко В.А. Электростатическое поле сферического сегмента и секционированного закругления конуса.//Вiсник ХНУ. "Математика, прикладна математика i механiка". Харкiв, ХНУ iм. В. Н. Каразiна, 2007, № 57, випуск 580, с.114-123.

12. Куриляк Д.Б., Назарчук З.Т. О симметричном облучении конечного конуса.// Радиофизика и электроника. -2000. -Т.35.4. -С.29-37.

13. Виноградов С.С. Мягкая сферическая "шапка"в поле плоской звуковой волны. Журн. вычисл. матем.и матем. физ.- 1978. - Т.18,5. С. 1320-1324.

14. Садовничий В.А. Теория операторов.- М.: Высшая школа, - 1999. - 368 с.

15. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. -Киев: Наукова Думка, - 1977. - 362 с.

16. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. -М.:Гостехиздат - 1957. -251 с. (English translation: Kevin B.Ya. Distribution of zeros of entier functions. AMS. R.I. -1980. 680p.)

17. Справочник по специальным функциям.Под ред. Абрамовиц М., Стиган И. -М.: ИЛ. -1979. -790 с.

Статья получена: 10.04.2009; окончательный вариант: 21.04.2009;
принята: 27.04.2009.