

Влияние диссипативного и постоянного моментов на  
устойчивость равномерного вращения в  
сопротивляющейся среде волчка Лагранжа с идеальной  
жидкостью

Ю.Н. Кононов, Н. В. Киселёва

*Донецкий национальный университет, Украина*

Оценено влияние диссипативного и постоянного моментов на устойчивость равномерного вращения волчка Лагранжа с произвольной осесимметричной полостью, полностью заполненной идеальной жидкостью. На примере эллипсоидальной полости проведены численные исследования областей устойчивости.

*2000 Mathematics Subject Classification 70E06.*

Волчок Лагранжа с полостью, содержащей жидкость, и находящийся в различных силовых полях и различных закреплениях, является хорошей физической и математической моделью для исследования поведения многих реальных объектов (летательных аппаратов, гироскопических устройств и др.).

Рассмотрим задачу о вращении в сопротивляющейся среде симметричного твёрдого тела с произвольной осесимметричной полостью, целиком заполненной идеальной однородной несжимаемой жидкостью. Сопротивляющаяся среда будет моделироваться диссипативным  $\vec{M}_d = -fD\vec{\omega}$  ( $D = \text{diag}(D_1, D_1, D_3)$ ) моментом, а так же будем считать, что к внешней рамке безынерционного карданова подвеса приложен постоянный момент  $\vec{M}_p = fP\vec{\gamma}$  [1]. Здесь  $\vec{\omega}$  - угловая скорость волчка,  $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$  - единичный вектор вертикали,  $f$  - положительный параметр,  $D_1, D_3, P$  - постоянные. В невозмущенном движении твердое тело и жидкость вращаются как одно целое с угловой скоростью  $\vec{\omega}_0$ .

Угловую скорость твёрдого тела представим в виде

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\Omega}.$$

Здесь  $\vec{\Omega}$  - угловая скорость твердого тела в возмущенном движении, являющаяся величиной первого порядка малости по сравнению с  $\omega_0$ .

Уравнения движения волчка Лагранжа с идеальной жидкостью допускают решения [1]

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \gamma_3 = 1, \Omega_1 = \Omega_2 = 0, \omega_0 = P/D_3, S_{in} = 0, (i = 1, 2), \quad (1)$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \gamma_3 = -1, \Omega_1 = \Omega_2 = 0, \omega_0 = -P/D_3, S_{in} = 0, (i = 1, 2), \quad (2)$$

отвечающие равномерным вращениям волчка с угловой скоростью  $\omega_0$  вокруг вертикально расположенной оси динамической симметрии. При этом решению (1) соответствует случай спящего волчка (центр масс системы находится выше неподвижной точки ( $\Gamma > 0$ )), а решению (2) – случай статически устойчивого волчка (центр масс системы находится ниже неподвижной точки ( $\Gamma < 0$ )).

Линеаризованные уравнения движения волчка Лагранжа с полостью, содержащей идеальную жидкость, относительно невозмущенного движения имеют вид, аналогичный [1-3]

$$\begin{aligned} A\dot{\Omega}_1 + (C - A)\omega_0\Omega_2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\dot{S}_{1n} - \omega_0 S_{2n}) &= f P\gamma_1 - f D_1\Omega_1 + \Gamma\gamma_2, \\ A\dot{\Omega}_2 - (C - A)\omega_0\Omega_1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\dot{S}_{2n} + \omega_0 S_{1n}) &= f P\gamma_2 - f D_1\Omega_2 - \Gamma\gamma_1, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} N_n^2(\dot{S}_{1n} - \lambda_n S_{2n}) + a_n \dot{\Omega}_1 &= 0, \\ N_n^2(\dot{S}_{2n} + \lambda_n S_{1n}) + a_n \dot{\Omega}_2 &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_1 &= \omega_0\gamma_2 - \Omega_2, \\ \dot{\gamma}_2 &= -\omega_0\gamma_1 + \Omega_1. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $J = \text{diag}(A, A, C)$  – тензор инерции твёрдого тела с жидкостью относительно неподвижной точки;  $\Gamma = mgc$  – опрокидывающий ( $\Gamma > 0$ ) или восстанавливающий ( $\Gamma < 0$ ) момент;  $m$  – масса волчка;  $c$  – расстояние от неподвижной точки до центра масс системы;  $g$  – ускорение свободного падения;  $S_{in}(t)$  – коэффициенты разложения относительной скорости жидкости в ряд по собственным векторным функциям,  $\kappa_n$  – соответствующие им собственные числа ( $\lambda_n = 2\omega_0/\kappa_n$ ). Величины  $a_n$  и  $N_n^2$  определяются только геометрией полости [3].

Исследуем устойчивость решений (1)-(2). Характеристическое уравнение для системы (3)-(5) имеет вид

$$\begin{aligned} A + (iC\omega_0 + fD_1)/(\lambda - i\omega_0) - (\Gamma - ifD_3\omega_0)/(\lambda - i\omega_0)^2 - \\ - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} (E_n/(\lambda - i\lambda_n)) = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $E_n = 2a_n^2/N_n^2$ .

В большинстве практически важных случаев основной эффект влияния жидкости на движение твердого тела можно учесть, исследуя только основной тон колебания жидкости ( $n = 1$ ) [3]. В дальнейшем будем рассматривать именно этот случай.

Преобразуя уравнение (6), получим:

$$[A - E_1] \lambda^3 + \left[ fD_1 + i(C\omega_0 - A\omega_0\tilde{\lambda}_1 - 2\omega_0(A - E_1)) \right] \lambda^2 + \\ + \left[ ((E_1 - A\tilde{\lambda}_1) + (C - A)(1 + \tilde{\lambda}_1))\omega_0^2 - \Gamma + if\omega_0(D_3 - D_1(1 + \tilde{\lambda}_1)) \right] \lambda + \\ + f(D_3 - D_1)\omega_0^2\tilde{\lambda}_1 + i(\omega_0^3\tilde{\lambda}_1(A - C) + \Gamma\omega_0\tilde{\lambda}_1) = 0. \quad (7)$$

Для существования асимптотически устойчивых решений необходимо и достаточно, чтобы матрица пятого порядка

$$\begin{pmatrix} 1 & -a_2'' & -a_1' & a_0'' & 0 \\ 0 & 1 & -a_2'' & -a_1' & a_0'' \\ 0 & 0 & a_2' & -a_1'' & -a_0' \\ 0 & a_2' & -a_1'' & -a_0' & 0 \\ a_2' & -a_1'' & -a_0' & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

составленная из коэффициентов уравнения (7), была иннерно-положительной [4].

Здесь

$$a_2' = \frac{fD_1}{A^*}, \quad a_2'' = \frac{C\omega_0 - A\omega_0\tilde{\lambda}_1 - 2\omega_0A^*}{A^*}, \\ a_1' = \frac{(E_1 - A\tilde{\lambda}_1)\omega_0^2 + (C - A)(1 + \tilde{\lambda}_1)\omega_0^2 - \Gamma}{A^*}, \quad a_1'' = \frac{fD_3\omega_0 - fD_1\omega_0(1 + \tilde{\lambda}_1)}{A^*}, \\ a_0' = \frac{f(D_3 - D_1)\omega_0^2\tilde{\lambda}_1}{A^*}, \quad a_0'' = \frac{\omega_0^3\tilde{\lambda}_1(A - C) + \Gamma\omega_0\tilde{\lambda}_1}{A^*}, \\ \tilde{\lambda}_1 = \lambda_1/\omega_0, \quad A^* = A - E_1.$$

Условия асимптотической устойчивости решения (1) представляются в виде системы двух неравенств:

$$\omega_0^2 \left( D_1^2 E_1 \tilde{\lambda}_1 (\tilde{\lambda}_1 - 1) + D_1 D_3 (C - E_1 \tilde{\lambda}_1) - D_3^2 A^* \right) - D_1^2 \Gamma > 0, \quad (9)$$

$$\tilde{\lambda}_1 (\tilde{\lambda}_1 - 1)^2 \left[ \left( A^* D_3^3 + (A\tilde{\lambda}_1 - A^* - C) D_1 D_3^2 - C (\tilde{\lambda}_1 - 1) D_1^2 D_3 \right) \omega_0^2 + \right. \\ \left. + (D_1 \tilde{\lambda}_1 - D_1 + D_3) \Gamma D_1^2 \right] < 0. \quad (10)$$

Устойчивость решения (2) получается из приведенных выше неравенств при замене  $\Gamma$  на  $-\Gamma$ .

При отсутствии в твёрдом теле жидкости в неравенствах (9)-(10) полагаем  $E_1 = 0$  и  $\lambda_1 = 0$ . В этом случае второе неравенство вырождается, а первое совпадает с [2].

Если отсутствует постоянный момент  $\vec{M}_p = fP\vec{\gamma}$ , то, положив в формулах (9)-(10)  $D_3 = 0$ , получаем неравенства, совпадающие с [5].

На примере эллипсоидальной полости с полуосями  $a$  и  $c$  были исследованы неравенства (9) и (10). Следует отметить, что для эллипсоидальной полости из бесконечного спектра собственных частот  $\lambda_n$  возбуждается единственная гармоника  $\lambda_1$  ( $E_n = 0$  для  $n \neq 1$ ). Значения коэффициентов  $A$ ,  $C$ ,  $E_1$  и  $\lambda_1$  для волчка Лагранжа с эллипсоидальной полостью имеют вид [2]

$$\lambda_1 = \frac{2\omega_0}{1 + \beta^2}, \quad E_1 = 2\frac{J\beta^3}{1 + \beta^2}, \quad A = A_0 + \frac{1}{2}J\beta(1 + \beta^2),$$

$$C = C_0 + J\beta, \quad J = \frac{8}{15}\pi\rho a^5,$$

где  $A_0$  и  $C_0$  – главный экваториальный и осевой моменты инерции твёрдого тела;  $m_0$  – масса твёрдого тела;  $\beta = c/a$  (полуось  $c$  направлена по оси симметрии тела).

Были проведены численные расчёты для следующих значений параметров:  $\beta \in [0; 1]$ ,  $\omega_0^2/\Gamma \in [-50; 100]$ ,  $D_{13} = D_1/D_3 \in [0, 4; 4 \cdot 10^3]$ ,  $A_0 = C_0 = 0$ ,  $J = 1$ .

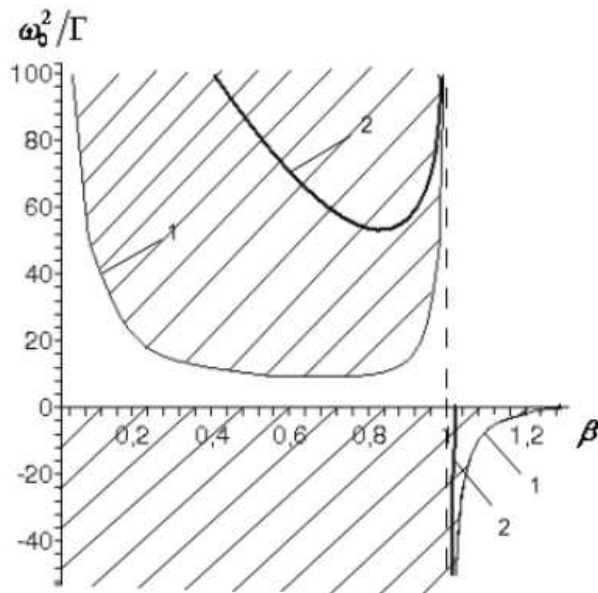


Рис. 1: Области устойчивости

На рис. 1 представлены границы областей устойчивости (зависимость  $\omega_0^2/\Gamma$  от  $\beta$ ), вычисленные для двух значений параметра  $D_{13}$ . Кривые 1 соответствует случаю  $D_{13} = 4$ , кривые 2 –  $D_{13} = 40$ . Области устойчивости заштрихованы.

На основании проведенных исследований и численных расчётов можно сделать следующие выводы:

1. При  $\beta > 1$  асимптотическая устойчивость возможна только при действии восстанавливающего момента ( $\Gamma < 0$ ).
2. Равномерное вращение волчка Лагранжа асимптотически устойчиво при отсутствии опрокидывающего момента ( $\Gamma = 0$ ), "поджатой" полости ( $0 < \beta < 1$ ) и  $D_{13} \geq 1$ .
3. При  $\beta = 1$  ( $\tilde{\lambda}_1 = 1$ ) левая часть неравенства (10) обращается в нуль, что соответствует отсутствию асимптотической устойчивости.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Карапетян А.В., Лагутина И.С. О влиянии диссипативного и постоянного моментов на вид и устойчивость стационарных движений волчка Лагранжа // Изв. СССР. Механика твёрдого тела. – 1998. – **5**. – С.29–33.
2. Кононов Ю.Н., Киселёва Н.В. Об устойчивости вращения в сопротивляющейся среде волчка Лагранжа с полостью, содержащей идеальную жидкостью. Вісник Донецького ун-ту. Сер.А. Природничі науки. – 2007. – **1**. – С.48–51.
3. Докучаев Л.В., Рвалов Р.В. Об устойчивости стационарного вращения твёрдого тела с полостью, содержащей жидкость // Изв. СССР. Механика твёрдого тела. – 1973. – **2**. – С.6–14.
4. Джури Э. Инноры и устойчивость динамических систем. - М.: Наука, – 1979. – 304с.
5. Кононов Ю.Н., Киселёва Н.В. Модальный анализ в задаче о вращении в сопротивляющейся среде волчка Лагранжа с полостью, содержащей идеальную жидкость. Сборник материалов международной научной школы-конференции "Тараповские чтения". – 2008, С.107–109.

Статья получена: 15.09.2008; окончательный вариант: 23.04.2009;  
принята: 27.04.2009.