Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.911.5 № 826, 2008, с.87–99

Теорема Красносельского - Крейна для дифференциальных уравнений с многозначными решениями

Н.В. Скрипник

Одесский национальный университет имени И.И.Мечникова, Украина

В статье рассматривается возможность обоснования теоремы о непрерывной зависимости решений от параметра и метода усреднения для дифференциальных уравнений и включений с производной Хукухары в случае, когда правая часть не удовлетворяет условию Липшица по фазовой переменной. *2000 Mathematics Subject Classification* 34A60, 34C29.

В работах В.А.Плотникова [8, 10, 22], М.М.Хапаева, О.П.Филатова [13], А.Б.Васильева [1] рассмотрено обоснование метода усреднения для дифференциальных включений. При этом существенно использовалось выполнение условия Липшица по фазовой переменной для исходного или усредненного включения. Впоследствии T.Janiak и E.Luczak - Kumorek [19] получили аналогичные результаты по обоснованию метода усреднения для функционально - дифференциальных уравнений. В работах T.Dontchev [17] условие Липшица было заменено обносторонним условием Липшица.

M.Kisieliwicz [21] и А.В.Плотников [7] рассмотрели возможность применения некоторых схем усреднения для дифференциальных уравнений с производной Хукухары [14, 15, 20]. В [4] А.В.Плотниковым было введено понятие дифференциального включения с производной Хукухары, получены некоторые свойства их решений и рассмотрена возможность применения некоторых схем усреднения для такого типа включений в стандартной форме при выполнении условия Липшица [5, 6, 7]. R.Dabrowska и T.Janiak в [16] получили некоторые аналогичные результаты для дифференциальных включений с производной Хукухары с запаздыванием.

В связи с этим представляет интерес обоснование теорем о непрерывной зависимости решения от параметра, предложенное М.А.Красносельским и С.Г.Крейном в [3] для обыкновенных дифференциальных уравнений при менее ограничительных условиях, что позволяет получить обоснование принципа усреднения для более широкого класса дифференциальных уравнений. В [12] доказан аналог теоремы М.А.Красносельского - С.Г.Крейна для дифференциальных включений в терминах обычных решений и $R-$решений.

В данной работе рассмотрим возможность переноса полученных результатов на дифференциальные уравнения и включения с производной Хукухары.

Развитие теории многозначных отображений привело к вопросу о том, что понимать под производной от многозначного отображения. Основной причиной возникновения трудностей является нелинейность пространства $comp(\mathbb{R}^n)[conv(\mathbb{R}^n)]$ непустых компактных [и выпуклых] множеств евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, что приводит к отсутствию разности двух множеств. Поэтому существует несколько подходов к решению этой проблемы. Одним из них является определение разности, предложенной Хукухарой [18].

Определение 1 [18]. *Пусть $X,\ Y \in conv(\mathbb{R}^n)$. Множество $Z \in conv(\mathbb{R}^n)$ такое, что $X = Y + Z$, называется разностью множеств X и Y и обозначается $X \overset{h}{-} Y$.*

Определение 2 [14, 18]. *Многозначное отображение $X : \mathbb{R} \to conv(\mathbb{R}^n)$ называется дифференцируемым по Хукухаре в точке $t_0 \in \mathbb{R}$, если существует выпуклое компактное множество $D_hX(t_0)$ такое, что пределы*

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t}\left(X(t_0 + \Delta t) \overset{h}{-} X(t_0)\right) \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t}\left(X(t_0) \overset{h}{-} X(t_0 - \Delta t)\right)$$

существуют и равны $D_hX(t_0)$.

Отметим, что в данном определении предполагается, что при всех достаточно малых положительных Δt разности $X(t_0) \overset{h}{-} X(t_0 - \Delta t)$ и $X(t_0 + \Delta t) \overset{h}{-} X(t_0)$ существуют.

Первые результаты по дифференциальным уравнениям с производной Хукухары

$$D_hX = F(t, X),\ X(0) = X_0, \tag{1}$$

где $t \in I \subset \mathbb{R}-$ время, $F : I \times conv(\mathbb{R}^n) \to conv(\mathbb{R}^n)$ многозначное отображение, $X_0 \in conv(\mathbb{R}^n)-$ начальное состояние, были получены в работах F.S. de Blasi, F.Iervolino [14, 15] и охватывали круг вопросов, связанных с существованием решений, их единственностью и непрерывной зависимостью от начальных условий и параметров.

Определение 3 [15]. *Многозначное отображение $X(t)$, определенное на промежутке $J \subset I$, называется решением уравнения (1), если оно абсолютно непрерывно и удовлетворяет системе (1) почти всюду на J.*

Дифференциальное уравнение (1) эквивалентно [14] интегральному уравнению

$$X(t) = X_0 + \int_0^t F(s, X(s))\, ds,$$

интеграл в котором понимается в смысле Хукухары [18].

Имеет место следующая теорема существования и единственности:

Теорема 1 *[14, 15]. Пусть многозначное отображение $F(t, X)$ удовлетворяет условиям:*

1) $F(t, X)$ измеримо по $t \in I$ при каждом фиксированном $X \in conv(\mathbb{R}^n)$;

2) $F(t, X)$ непрерывно по $X \in conv(\mathbb{R}^n)$ при почти всех $t \in I$;

3) существует суммируемая функция $k(t)$ такая, что $h(F(t, X), \{0\}) \leq k(t)$ для почти всех $t \in I$.

Тогда задача (1) имеет по крайней мере одно решение.

Если, кроме того, многозначное отображение $F(t, X)$ удовлетворяет условию Липшица по $X \in conv(\mathbb{R}^n)$, то есть существует ограниченная суммируемая функция $\lambda(t) \geq 0$ такая, что

$$h(F(t, X_1), F(t, X_2)) \leq \lambda(t) h(X_1, X_2),$$

то задача (1) имеет единственное решение.

Здесь и в дальнейшем $h(A, B)-$ расстояние по Хаусдорфу между множествами $A, B \in comp(\mathbb{R}^n)$.

Рассмотрим вопрос о непрерывной зависимости решения от параметра.

Теорема 2 *Пусть для дифференциального уравнения с производной Хукухары*

$$D_h X = F(t, X, \lambda), \tag{2}$$

где многозначное отображение $F(t, X, \lambda)$, принимающее значения в $conv(\mathbb{R}^n)$, определено при $0 \leq t \leq T, X \in D, D-$ ограниченная область в $conv(\mathbb{R}^n), \lambda \in \Lambda, \Lambda-$ некоторое множество значений параметра λ, имеющее $\lambda_0 \in \Lambda$ предельной точкой, выполнены следующие условия:

а) многозначное отображение $F(t, X, \lambda)$ равномерно ограничено, непрерывно по t, равномерно непрерывно по X равномерно относительно t и λ;

б) многозначное отображение $F(t, X, \lambda)$ интегрально непрерывно по λ в точке λ_0, то есть для любых $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$ и любого $X \in D$ выполняется условие:

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} h\left(\int_{t_1}^{t_2} F(s, X, \lambda) ds, \int_{t_1}^{t_2} F(s, X, \lambda_0) ds\right) = 0; \tag{3}$$

в) решения $X(t, \lambda_0)$ уравнения

$$D_h X = F(t, X, \lambda_0), \tag{4}$$

удовлетворяющие начальному условию $X(0, \lambda_0) = X_0 \in D^1 \subset D$, определены при $0 \leq t \leq T$ и лежат вместе с некоторой $\rho-$ окрестностью в области D.

Тогда каждому $\eta > 0$ соответствует такая окрестность $U(\lambda_0)$ точки λ_0, что при $\lambda \in U(\lambda_0)$ для любого решения $X(t, \lambda)$ уравнения (2), определенного при $0 \leq t \leq T$ и удовлетворяющего начальному условию $X(0, \lambda) = X_0$, существует такое решение $X(t, \lambda_0)$ уравнения (4), что справедливо неравенство

$$h(X(t, \lambda), X(t, \lambda_0)) < \eta, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Доказательство. Из условий а),б) теоремы и ограниченности области D следует, что сходимость в (3) является равномерной относительно t_1, t_2 и X.

Покажем, что пределом любой равномерно сходящейся последовательности решений уравнения (2) является решение уравнения (4).

Пусть $X(t,\lambda)$ $(\lambda \to \lambda_0,\ \lambda \in \Lambda)-$ равномерно сходящаяся последовательность решений (2), удовлетворяющих начальному условию $X(0,\lambda) = X_0$. Следовательно, существует такое непрерывное многозначное отображение $Y(t)$, что

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \max_{t\in[0,T]} h(X(t,\lambda), Y(t)) = 0.$$

В силу эквивалентности дифференциального уравнения с производной Хукухары и соответствующего интегрального уравнения многозначное отображение $X(t,\lambda)$ является решением уравнения

$$X(t,\lambda) = X_0 + \int\limits_0^t F(s, X(s,\lambda), \lambda)\, ds. \tag{5}$$

Перейдем в (5) к пределу при $\lambda \to \lambda_0$.

Для этого сначала покажем, что для любых $0 \le \tau < t \le T$ справедливо равенство

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \int_0^t F(s, X(s,\lambda), \lambda) ds = \int_0^t F(s, Y(s), \lambda_0) ds. \tag{6}$$

Введем в рассмотрение кусочно - постоянное многозначное отображение $\overline{Y}(t)$ такое, что $\max\limits_{t\in[0,T]} h(Y(t), \overline{Y}(t)) < \delta$, где δ выбираем из условия равномерной непрерывности правой части таким образом, чтобы при всех $X, Y \in D$, удовлетворяющих условию $h(X,Y) < \delta$, выполнялось неравенство

$$h(F(s,X,\lambda), F(s,Y,\lambda)) < \frac{\varepsilon}{4T}.$$

Выберем окрестность $U(\lambda_0)$ точки λ_0 так, чтобы при $\lambda \in U(\lambda_0)$ и любых $s \in [0,T]$ была справедлива оценка $h(X(s,\lambda), Y(s)) < \delta$. Тогда

$$I_1 = h\left(\int_0^t F(s, X(s,\lambda), \lambda) ds, \int_0^t F(s, Y(s), \lambda) ds\right) \le$$

$$\le \int_0^t h(F(s, X(s,\lambda), \lambda), F(s, Y(s), \lambda)) ds \le \frac{\varepsilon}{4},$$

$$I_2 = h\left(\int_0^t F(s, Y(s), \lambda) ds, \int_0^t F(s, \overline{Y}(s), \lambda) ds\right) \le$$

$$\le \int_0^t h(F(s, Y(s), \lambda), F(s, \overline{Y}(s), \lambda)) ds < \frac{\varepsilon}{4},$$

$$I_4 = h\left(\int_0^t F(s, Y(s), \lambda_0) ds, \int_0^t F(s, \overline{Y}(s), \lambda_0) ds\right) \le$$

$$\leq \int_0^t h(F(s,Y(s),\lambda_0),F(s,\overline{Y}(s),\lambda_0))ds < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Сузим окрестность $U(\lambda_0)$, используя условие б) теоремы так, чтобы при $\lambda \in U(\lambda_0)$ выполнялось неравенство

$$I_3 = h\left(\int_\tau^t F(s,\overline{Y}(s),\lambda)ds, \int_\tau^t F(s,\overline{Y}(s),\lambda_0)ds\right) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Таким образом,

$$h\left(\int_\tau^t F(s,X(s,\lambda),\lambda)ds, \int_\tau^t F(s,Y(s),\lambda_0)ds\right) \leq I_1 + I_2 + I_3 + I_4 < \varepsilon,$$

то есть предельное равенство (6) доказано.

Тогда, переходя в (5) к пределу при $\lambda \to \lambda_0$, получаем

$$Y(t) = X_0 + \int_{t_0}^t F(s,Y(s),\lambda_0)ds,$$

то есть отображение $Y(t)$ является решением дифференциального уравнения (4).

Следовательно, показано, что предел любой равномерно сходящейся последовательности решений (2) является решением включения (4).

Покажем, что для любого η существует окрестность $U(\lambda_0)$ точки λ_0 такая, что для любого решения $X(t,\lambda), \lambda \in U(\lambda_0)$ включения (2), удовлетворяющего начальному условию $X(0,\lambda) = X_0$, существует решение $X(t,\lambda_0)$ включения (4) такое, что

$$h(X(t,\lambda),X(t,\lambda_0)) < \eta, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Предположим противное. Тогда существуют η_0 и последовательность решений $X(t,\lambda_k),\ \lambda_k \in U(\lambda_0),\ \lambda_k \to \lambda_0,\ k \to \infty$ включения (2) такие, что

$$\max_{t\in[0,T]} h(X(t,\lambda_k),X(t,\lambda_0)) \geq \eta_0 \tag{7}$$

для всех решений $X(t,\lambda_0)$ включения (4).

Так как семейство $X(t,\lambda)$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно, то по теореме Асколи [2] из него можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность, пределом которой в силу доказанного выше будет решение (4), что противоречит (7).

Замечание 1. Если $X(t,\lambda_0)-$ некоторое решение дифференциального уравнения (4), то может не существовать последовательности решений (2), сходящейся к $X(t,\lambda_0)$ при $\lambda \to \lambda_0$.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$D_h X = \left[\sqrt{\min_{x\in X} x}, \sqrt{\max_{x\in X} x}\right] + \lambda^2[1,4], \quad X(0,\lambda) = \{0\}. \tag{8}$$

Тогда при $\lambda_0 = 0$ уравнение (4) имеет вид

$$D_h X = \left[\sqrt{\min_{x \in X} x}, \sqrt{\max_{x \in X} x}\right], \quad X(0,0) = \{0\}. \tag{9}$$

Очевидно, что решения $X(t,\lambda)$ уравнения (8) сходятся к решению (9) вида $X(t,0) = \left\{\frac{t^2}{4}\right\}$. В то же время не существует последовательности $X(t,\lambda)$, сходящейся к тривиальному решению уравнения (9).

Замечание 2. Если уравнение (4) имеет единственное решение, то любая последовательность решений $X(t,\lambda)$ уравнения (2) сходится к этому решению при $\lambda \to \lambda_0$.

Из этой теоремы непосредственно следует теорема о принципе усреднения.

Теорема 3 *Пусть в области $Q = \{t \geq 0,\ X \in D \subset conv(\mathbb{R}^n), D-$ограниченная область$\}$ для дифференциального уравнения с производной Хукухары*

$$D_h X = \varepsilon F(t,X) \tag{10}$$

выполнены следующие условия:

а) многозначное отображение $F : Q \to conv(\mathbb{R}^n)$ равномерно ограничено, непрерывно по t и равномерно непрерывно по X равномерно относительно t;

б) для всех $X \in D$ существует предел

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(s,X) ds = F_0(X); \tag{11}$$

в) решения $Y(\tau),\ \tau = \varepsilon t$ уравнения

$$D_h Y = F_0(Y), \quad Y(0) = X_0 \in D^1 \subset D \tag{12}$$

определены при $0 \leq \tau \leq L$ и лежат вместе с $\rho-$ окрестностью в D.

Тогда для любого $\eta > 0$ существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ для любого решения $X(t,\varepsilon)$ уравнения (10), удовлетворяющего условию $X(0,\varepsilon) = X_0$, существует решение уравнения (12) такое, что на промежутке $[0, L\varepsilon^{-1}]$ справедливо неравенство

$$h(X(t,\varepsilon), Y(\varepsilon t)) < \eta.$$

В справедливости этой теоремы легко убеждаемся, если в уравнении (10) произведем замену $\varepsilon t = t_1,\ \varepsilon = \lambda$. Вместо (10) имеем уравнение

$$D_h X = F(t_1, X, \lambda), \tag{13}$$

где принято обозначение $F\left(\frac{t_1}{\lambda}, X\right) = F(t_1, X, \lambda)$.

Существование среднего (11) эквивалентно интегральной непрерывности по λ в точке $\lambda = 0$ правой части уравнения (13), то есть эквивалентно соотношению

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_0^{t_1} F\left(\frac{t_1}{\lambda}, X\right) dt_1 = \int_0^{t_1} F_0(X) dt_1. \quad (14)$$

Действительно, полагая в левой части соотношения (14) $\frac{t_1}{\lambda} = t$, имеем

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_0^{t_1} F\left(\frac{t_1}{\lambda}, X\right) dt_1 = \lim_{\lambda\to 0}\lambda\int_0^{t_1} F\left(\frac{t_1}{\lambda}, X\right) d\left(\frac{t_1}{\lambda}\right) = \lim_{\lambda\to 0}\lambda\int_0^{\frac{t_1}{\lambda}} F\left(t, X\right) dt =$$

$$= t_1 \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\frac{t_1}{\lambda}}\int_0^{\frac{t_1}{\lambda}} F\left(t, X\right) dt = t_1 \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{T} F(t, X) dt = t_1 F_0(X) = \int_0^{t_1} F_0(X) dt_1.$$

Перейдем к рассмотрению вопроса о непрерывной зависимости от параметра решений дифференциальных включений с производной Хукухары, а также метода усреднения.

Обозначим через $cc(\mathbb{R}^n)(cocc(\mathbb{R}^n))$ пространство, состоящее из всех непустых [и выпуклых] подмножеств пространства $conv(\mathbb{R}^n)$ с метрикой

$$d(A, B) = \max\{\max_{a\in A}\min_{b\in B} h(a, b), \max_{b\in B}\min_{a\in A} h(a, b)\}.$$

Определим также скалярную функцию $dist(a, B), a \in conv(\mathbb{R}^n), B \in cc(\mathbb{R}^n)$ следующим образом

$$dist(a, B) = \min_{b\in B} h(a, b).$$

Определение 4. *Под интегралом Ауманна - Хукухары от многозначного отображения $F : [t_0, T] \to cc(\mathbb{R}^n)$ будем понимать множество $G \in cc(\mathbb{R}^n)$, определяемое следующим образом*

$$G = \left\{ g \in conv(\mathbb{R}^n),\ g = \int_{t_0}^{T} f(t) dt : f(\cdot) \in F(\cdot) \right\},$$

где $f : [t_0, T] \to conv(\mathbb{R}^n)$ и интеграл от многозначного отображения $f(\cdot)$ понимается в смысле Хукухары [18].

Теорема 4 *[7]. Пусть многозначное отображение $F : [t_0, T] \to cocc(\mathbb{R}^n)$ ограничено и интегрируемо. Тогда множество $G = \int_{t_0}^{T} F(s) ds$ выпукло и компактно.*

Рассмотрим дифференциальное включение с производной Хукухары

$$D_h X \in F(t, X), \quad (15)$$

где $F : I \times conv(\mathbb{R}^n) \to cc(\mathbb{R}^n)-$ многозначное отображение.

Определение 5. *Решением дифференциального включения (15) называется абсолютно непрерывное многозначное отображение $X(t)$, определенное на промежутке $J \subset I$, производная которого удовлетворяет включению (15) почти всюду на I.*

Имеет место следующая теорема существования и непрерывной зависимости решения от параметра:

Теорема 5 *[5, 7]. Пусть*

1) отображение $F : [t_0, T] \times conv(\mathbb{R}^n) \to cc(\mathbb{R}^n)$ измеримо по t, удовлетворяет условию Липшица по X с суммируемой функцией $\lambda(t)$ и существует суммируемая функция $k(t)$ такая, что $d(F(t,x), \{\{0\}\}) \leq k(t)$ для почти всех t;

2) отображение $Y(\cdot)$ абсолютно непрерывно на $[t_0, T]$ и

$$dist(D_h Y(t), F(t, Y(t))) < \rho(t)$$

почти всюду на $[t_0, T]$, где $\rho(\cdot)-$ суммируемая функция на $[t_0, T]$;

3) для некоторого $X_0 \in conv(\mathbb{R}^n)$ выполнено условие $h(Y(t_0), X_0) \leq \delta$.

Тогда существует решение $X(\cdot)$ задачи (15) определенное на $[t_0, T]$ такое, что:

1) $X(t_0) = X_0$;

2) $h(X(t), Y(t)) \leq \xi(t),\ t \in [t_0, T]$;

3) $h(D_h X(t), D_h Y(t)) \leq \lambda(t)\xi(t) + \rho(t)$ почти всюду на $[t_0, T]$, где

$$\xi(t) = \delta e^{m(t)} + \left| \int_{t_0}^{t} e^{m(t)-m(s)} \rho(s) ds \right|,\ m(t) = \left| \int_{t_0}^{t} \lambda(s) ds \right|,\ t \in [t_0, T].$$

Рассмотрим теперь вопрос о непрерывной зависимости от параметра в случае, когда правая часть включения (15) не удовлетворяет условию Липшица по X.

Теорема 6 *Пусть для дифференциального включения*

$$D_h X \in F(t, X, \lambda), \tag{16}$$

где многозначное отображение $F(t, X, \lambda)$, принимающее значения в $cocc(\mathbb{R}^n)$, определено при $0 \leq t \leq T, X \in D, D-$ ограниченная область в $conv(\mathbb{R}^n), \lambda \in \Lambda, \Lambda-$ некоторое множество значений параметра λ, имеющее $\lambda_0 \in \Lambda$ предельной точкой, выполнены следующие условия:

а) многозначное отображение $F(t, X, \lambda)$ равномерно ограничено, непрерывно по t, равномерно непрерывно по X равномерно относительно t и λ;

б) многозначное отображение $F(t, X, \lambda)$ интегрально непрерывно по λ в точке λ_0, то есть для любых $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$ и любого $X \in D$ выполняется условие:

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} d\left(\int_{t_1}^{t_2} F(s, X, \lambda) ds, \int_{t_1}^{t_2} F(s, X, \lambda_0) ds \right) = 0; \tag{17}$$

в) решения $X(t,\lambda_0)$ включения

$$D_h X \in F(t, X, \lambda_0), \tag{18}$$

удовлетворяющие начальному условию $X(0,\lambda_0) = X_0 \in D^1 \subset D$, определены при $0 \le t \le T$ и лежат вместе с некоторой $\rho-$ окрестностью в области D.

Тогда каждому $\eta > 0$ соответствует такая окрестность $U(\lambda_0)$ точки λ_0, что при $\lambda \in U(\lambda_0)$ для любого решения $X(t,\lambda)$ включения (16), определенного при $0 \le t \le T$ и удовлетворяющего начальному условию $X(0,\lambda) = X_0$, существует такое решение $X(t,\lambda_0)$ включения (18), что справедливо неравенство

$$h(X(t,\lambda), X(t,\lambda_0)) < \eta, \quad 0 \le t \le T.$$

Доказательство. Из условий а),б) теоремы и ограниченности области D следует, что сходимость в (17) является равномерной относительно t_1, t_2 и X.

Пусть $X(t,\lambda)$ $(\lambda \to \lambda_0,\ \lambda \in \Lambda)-$ равномерно сходящаяся последовательность решений (16), удовлетворяющих начальному условию $X(0,\lambda) = X_0$. Следовательно, существует такое непрерывное многозначное отображение $Y(t)$, что

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \max_{t \in [0,T]} h(X(t,\lambda), Y(t)) = 0.$$

Покажем, что для любых $0 \le \tau < t \le T$ справедливо равенство

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \int_\tau^t F(s, X(s,\lambda), \lambda) ds = \int_\tau^t F(s, Y(s), \lambda_0) ds. \tag{19}$$

Очевидно, что

$$d\left(\int_\tau^t F(s, X(s,\lambda), \lambda) ds, \int_\tau^t F(s, Y(s), \lambda_0) ds\right) \le I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

где

$$I_1 = d\left(\int_\tau^t F(s, X(s,\lambda), \lambda) ds, \int_\tau^t F(s, Y(s), \lambda) ds\right),$$

$$I_2 = d\left(\int_\tau^t F(s, Y(s), \lambda) ds, \int_\tau^t F(s, \overline{Y}(s), \lambda) ds\right),$$

$$I_3 = d\left(\int_\tau^t F(s, \overline{Y}(s), \lambda) ds, \int_\tau^t F(s, \overline{Y}(s), \lambda_0) ds\right),$$

$$I_4 = d\left(\int_\tau^t F(s, Y(s), \lambda_0) ds, \int_\tau^t F(s, \overline{Y}(s), \lambda_0) ds\right),$$

$\overline{Y}(t)-$ кусочно-постоянное многозначное отображение, такое, что

$$\max_{t \in [0,T]} h(Y(t), \overline{Y}(t)) < \delta,$$

где δ выбираем из условия равномерной непрерывности правой части таким образом, чтобы при $h(X,Y)<\delta$ выполнялось неравенство

$$d(F(s,X,\lambda),F(s,Y,\lambda))<\frac{\varepsilon}{4T}.$$

Оценим каждое слагаемое в отдельности. Окрестность $U(\lambda_0)$ выберем так, чтобы была справедлива оценка $h(X(s,\lambda),Y(s))<\delta$ при $\lambda\in U(\lambda_0)$ и любых $s\in[0,T]$.

Тогда

$$I_1\le\int_\tau^t d(F(s,X(s,\lambda),\lambda),F(s,Y(s),\lambda))ds\le\frac{\varepsilon}{4},$$

$$I_2\le\int_\tau^t d(F(s,Y(s),\lambda),F(s,\overline{Y}(s),\lambda))ds<\frac{\varepsilon}{4},$$

$$I_4\le\int_\tau^t d(F(s,Y(s),\lambda_0),F(s,\overline{Y}(s),\lambda_0))ds<\frac{\varepsilon}{4}.$$

Сузим окрестность $U(\lambda_0)$, используя условие б) теоремы так, чтобы при $\lambda\in U(\lambda_0)$ выполнялось неравенство

$$I_3=d\left(\int_\tau^t F(s,\overline{Y}(s),\lambda)ds,\int_\tau^t F(s,\overline{Y}(s),\lambda_0)ds\right)<\frac{\varepsilon}{4}.$$

Таким образом, доказано предельное равенство (19).

Множество обычных решений дифференциального включения с производной Хукухары (16) совпадает со множеством обобщенных решений [5, 7, 11], которое определяется как множество непрерывных многозначных отображений $X(t,\lambda)$, удовлетворяющих включению

$$X(t,\lambda)\overset{h}{—}X(\tau,\lambda)\in\int_\tau^t F(s,X(s,\lambda),\lambda)ds$$

для любых $t,\tau\in[0,T],\ \tau<t$.

Тогда, переходя к пределу при $\lambda\to\lambda_0$, получаем

$$Y(t)\overset{h}{—}Y(\tau)\in\int_\tau^t F(s,Y(s),\lambda_0)ds,$$

то есть $Y(t)$– обобщенное, а следовательно [5, 7, 11], и обычное решение включения (18).

Таким образом, показано, что предел любой равномерно сходящейся последовательности решений включения (16) является решением включения (18).

Покажем, что для любого η существует окрестность $U(\lambda_0)$ точки λ_0 такая, что для любого решения $X(t,\lambda),\lambda\in U(\lambda_0)$ включения (16), удовлетворяющего начальному условию $X(0,\lambda)=X_0$, существует решение $X(t,\lambda_0)$ включения (18) такое, что

$$h(X(t,\lambda),X(t,\lambda_0))<\eta,\quad 0\le t\le T.$$

Предположим противное. Тогда существуют η_0 и последовательность решений $X(t, \lambda_k),\ \lambda_k \in U(\lambda_0),\ \lambda_k \to \lambda_0,\ k \to \infty$ включения (16) такие, что

$$\max_{t\in[0,T]} h(X(t,\lambda_k), X(t,\lambda_0)) \geq \eta_0 \tag{20}$$

для всех решений $X(t, \lambda_0)$ включения (18).

Так как семейство $X(t, \lambda)$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно, то по теореме Асколи [2] из него можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность, пределом которой в силу доказанного выше будет решение (18), что противоречит (20).

Замечание 3. Если $X(t, \lambda_0)-$ некоторое решение дифференциального включения (18), то может не существовать последовательности решений (16), сходящейся к $X(t, \lambda_0)$ при $\lambda \to \lambda_0$.

Пример 2. Рассмотрим включение

$$D_hX \in \left\{ a\left(\left[\sqrt{\min_{x\in X} x}, \sqrt{\max_{x\in X} x} \right] + \lambda^2[1,4] \right),\ a \in [1,2] \right\}, \quad X(0,\lambda) = \{0\}. \tag{21}$$

Тогда при $\lambda_0 = 0$ включение (18) имеет вид

$$D_hX \in \left\{ a\left[\sqrt{\min_{x\in X} x}, \sqrt{\max_{x\in X} x} \right],\ a \in [1,2] \right\}, \quad X(0,0) = \{0\}. \tag{22}$$

Очевидно, что решения $X(t, \lambda)$ включения (21) сходятся к решениям (22) вида

$$X(t,0) = \left\{ \frac{a^2t^2}{4} \right\},\ a \in [1,2].$$

В то же время не существует последовательности $X(t, \lambda)$, сходящейся к тривиальному решению включения (22).

Замечание 4. Если включение (18) имеет единственное решение, то любая последовательность решений $X(t, \lambda)$ включения (16) сходится к этому решению при $\lambda \to \lambda_0$.

Из этой теоремы непосредственно следует теорема о принципе усреднения.

Теорема 7 *Пусть в области $Q = \{t \geq 0,\ X \in D \subset conv(\mathbb{R}^n), D-$ограниченная область$\}$ для дифференциального включения с производной Хукухары*

$$D_hX \in \varepsilon F(t, X) \tag{23}$$

выполнены следующие условия:

а) многозначное отображение $F : Q \to cocc(\mathbb{R}^n)$ равномерно ограничено, непрерывно по t и равномерно непрерывно по X равномерно относительно t;

б) для всех $X \in D$ существует предел

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(s,X)ds = F_0(X);$$

в) решения $Y(\tau)$, $\tau = \varepsilon t$ включения

$$D_h Y \in F_0(Y), \quad Y(0) = X_0 \in D^1 \subset D \tag{24}$$

определены при $0 \leq \tau \leq L$ и лежат вместе с $\rho-$ окрестностью в D.

Тогда для любого $\eta > 0$ существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ для любого решения $X(t,\varepsilon)$ включения (23), удовлетворяющего условию $X(0,\varepsilon) = X_0$, существует решение включения (24) такое, что на промежутке $[0, L\varepsilon^{-1}]$ справедливо неравенство

$$h(X(t,\varepsilon), Y(\varepsilon t)) < \eta.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев А.Б. О непрерывной зависимости по параметру решений дифференциальных включений // Укр. мат. журн. – 1983. – Т.35, № 5. – С. 607–611.

2. Келли Дж.Л. Общая топология. – М.: Наука, 1981. – С.

3. Красносельский М.А., Крейн С.Г. О принципе усреднения в нелинейной механике// Успежи матем. наук. – 1955. – Т.10, № 3(65). – С. 147–152.

4. Плотников А.В. Дифференциальные включения с производной Хукухары и некоторые задачи управления // Деп.ВИНИТИ, 26.04.82, № 2036 – 82. - 35 с.

5. Плотников А.В. Дифференциальные включения с производной Хукухары // ОГУ им. И.И.Мечникова. – Одесса, 1987. – 43 с. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ № 989 – Ук87.

6. Плотников А.В. Усреднение дифференциальных включений с производной Хукухары // Укр. мат. журн. – 1989. – Т.42, №1. – С. 121–125.

7. Комлева Т.А., Плотников А.В. Дифференциальные включения с производной Хукухары // Нелинейные колебания. – 2007. – Т.10, №2. – С. 229 – 246.

8. Плотников В.А. Усреднение дифференциальных включений // Укр. мат. журн. – 1979. – Т.31, №5.– С. 573–576.

9. Плотников В.А. Метод усреднения в задачах управления.– Киев – Одесса: Изд-во Лыбидь, 1992. – 188 с.

10. Плотников В.А., Плотникова Л.И. Усреднение дифференциальных включений с многозначными импульсами // Укр. мат. журн. – 1995. – Т.47, №11. – С. 1526–1532.

11. Плотников В.А., Плотников А.В., Витюк А.Н. Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. – Одесса: Астропринт, 1999. – 356 с.

12. Плотникова Н.В. Теорема Красносельского - Крейна для дифференциальных включений // Дифференц. уравнения.– 2005. – Т.41, №7. – С. 997–1000.

13. Филатов О.П., Хапаев М.М. Усреднение систем дифференциальных включений. – М.: Изд-во Моск.ун-та, 1998. – 160 с.

14. de Blasi F.S., Iervolino F. Equazioni differentiali con soluzioni a valore compatto convesso // Boll. Unione Mat.Ital. – 1969. – Vol.2, № 4-5. – P.491 – 501.

15. Brandao Lopes Pinto A.J., de Blasi F.S., Iervolino F. Uniqueness and existence theorems for differential equations with compact convex valued solutions // Boll. Unione Mat.Ital. – 1970. – V.4. – P.534 – 538.

16. Dabrowska R., Janiak T. Stability of functional - differentional equations with compact convex valued solutions // Discuss. Math. – 1993. – № 13. – P. 87–92.

17. Donchev T. Functional differential inclusions involving dissipative and compact multifunctions // Glas. Mat. – 1998. – № 33 (53). – P.51 – 60.

18. Hukuhara M. Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe // Functial. Ekvac. – 1967. – № 10. – P. 205 – 223.

19. Janiak T., Luczak-Kumorek E. The theorem of miiddling for functional – differential equations of neutral type // Discuss. Math. – 1991. – № 11. – P.63 – 73.

20. Kisielewicz M. Description of a class of differential equations with set - valued solutions // Lincei - Rend. Sc. fis. mat. e nat. – 1975. – Vol.58. – P. 158 – 162.

21. Kisielewicz M. Method of averaging for differential equations with compact convex valued solutions // Rend. Mat. – 1976. – Vol. 9, № 3. – P. 397–408.

22. Plotnikov V.A., Ivanov R.P., Kitanov N.M. Method of averaging for impulsive differential inclusions // Pliska Stud. Math. Bulgar. – 1998. – № 12.– P. 43–55.