Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.948 № 826, 2008, с.100–114

О задаче рассеяния для функциональной модели Л. де Бранжа

О. В. Розуменко

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, Украина

Для функциональной модели недиссипативного оператора построена схема рассеяния Лакса – Филлипса. Вычислены волновые операторы и оператор рассеяния.

2000 Mathematics Subject Classification 47A40.

Функциональная модель для оператора сжатия T ($\|T\| \leq 1$), действующего в гильбертовом пространстве H, впервые была построена Б. Секефальви-Надем и Ч. Фояшем [5]. Данная модель реализуется оператором умножения на независимую переменную в специальном пространстве функций и базируется на исследовании известной схемы рассеяния П. Лакса и Р. Филлипса [7]. Другие функциональные модели были также получены Б. С. Павловым [9] и Л. де Бранжем – Дж. Ровняком [10].

В [1] предложен подход к построению функциональных моделей недиссипативных операторов, основанный на применении техники теории пространств Л. де Бранжа. В данной работе на базе построенной в [6] дилатации построена схема рассеяния П. Лакса и Р. Филлипса для этой функциональной модели: вычислены полугруппа $Z_t = \exp(itA)$, её дилатация, волновые операторы и оператор рассеяния, а также — характеристическая оператор-функция.

I. Напомним [1], что через $[H, G]$ принято обозначать множество ограниченных линейных операторов, действующих из гильбертова пространства H в гильбертово пространство G.

Совокупность гильбертовых пространств H, E и операторов $A \in [H, H]$, $\varphi \in [H, E]$, $J \in [E, E]$, где J — инволюция, $J = J^* = J^{-1}$, называется [1] локальным узлом

$$\Delta = (A, H, \varphi, E, J), \tag{1}$$

если выполняется условие

$$A - A^* = i\varphi^* J\varphi. \tag{2}$$

Оператор A называется основным оператором узла Δ, φ — каналовым оператором, а J — метрическим оператором узла Δ [4]. Пространство H называется внутренним, а E — внешним пространствами узла Δ.

Предположим, что внешнее пространство E узла Δ (1) конечномерно, $\dim E = r < \infty$. И пусть $\{f_\alpha\}_1^r$ — ортонормированный базис в E, тогда вектора

$$g_\alpha = \varphi^* f_\alpha \quad (1 \le \alpha \le r)$$

в H называются каналовыми векторами, а узловое соотношение (2) можно записать следующим образом:

$$\frac{A - A^*}{i} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{r} \langle \cdot, g_\alpha \rangle \, J_{\alpha,\beta} g_\beta, \tag{3}$$

где $J_{\alpha,\beta} = \langle J f_\alpha, f_\beta \rangle$ — матричные элементы матрицы σ, отвечающей оператору σ в базисе $\{f_\alpha\}_1^r$.

Совокупность

$$\Delta = (A, H, \{g_\alpha\}_1^r, J) \tag{4}$$

называется операторным комплексом [4], если выполняется условие (3), где $J = J^* = J^{-1}$.

Комплекс (4) называется простым [1], если $H_1 = H$, где

$$H_1 = \operatorname{span} \{A^n g_\alpha : 1 \le \alpha \le r \text{ и } n \ge 0\}.$$

Определим на линейном многообразии непрерывных на $[0, l]$ вектор-функций $f(x) = (f_1(x); ...; f_r(x))$ со значениями в евклидовом пространстве E^r эрмитово неотрицательную билинейную форму

$$\langle f, g \rangle_F = \int_0^l f(x) dF_x g^*(x), \tag{5}$$

где F_t — матричнозначная неубывающая функция на $[0, l]$, для которой $\operatorname{tr} F_t \equiv t$. Обозначим через $L^2_{r,l}(F_x)$ гильбертово пространство, полученное в результате замыкания введенного линейного многообразия вектор-функций $f(x)$ относительно метрики (5), для которых $\langle f, f \rangle_F < \infty$, с надлежащей факторизацией по ядру метрики (5).

Рассмотрим операторный комплекс

$$\Delta = \left(A, H, \{g_1, g_2\}, J_N = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \right). \tag{6}$$

Обозначим через $M_x(\lambda)$ — матрицу-функцию, являющуюся решением интегрального уравнения

$$M_x(\lambda) + i\lambda \int_0^x M_t(\lambda) dF_t J_N = I, \tag{7}$$

где $x \in [0, l]$, $\lambda \in \mathbb{C}$, которое в случае $dF_t = a_t dt$ эквивалентно задаче Коши

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx} M_x(\lambda) + i\lambda M_x(\lambda) a_x J_N = 0; \\ M_0(\lambda) = I. \end{cases}$$

Рассмотрим вектор-строку

$$L_x(\lambda) = [1, 0] M_x(\lambda) = [A_x(\lambda), B_x(\lambda)],$$

которая, в силу (7), является решением интегрального уравнения

$$L_x(\lambda) + i\lambda \int\limits_0^x L_t(\lambda) dF_t J_N = [1, 0]. \tag{8}$$

Пусть $2P_\pm = I \pm J_N$, тогда $P_\pm^2 = P_\pm = P_\pm^*$; $P_+ P_- = 0$; $P_+ + P_- = I$. Выделим следующие важные свойства вектор-строки $L_x(z)$:

$$L_x(\lambda) P_+ = E_x(\lambda) L_0^+, \quad L_x(\lambda) P_- = \tilde{E}_x(\lambda) L_0^-,$$

где $L_0^\pm = L_0 P_\pm$, $L_0^+ = \dfrac{1}{2}[1, i]$, $L_0^- = \dfrac{1}{2}[1, -i]$ ($L_0 = [1, 0]$), а функции $E_x(\lambda)$ и $\tilde{E}_x(\lambda)$ равны

$$E_x(\lambda) = A_x(\lambda) - iB_x(\lambda), \quad \tilde{E}_x(\lambda) = A_x(\lambda) + iB_x(\lambda). \tag{9}$$

Функцию $\tilde{E}_x(\lambda)$ назовем сопряжённой функцией по отношению к $E_x(\lambda)$ (так как в случае вещественности матрицы-функции F_t будем иметь $\tilde{E}_x(\lambda) = \overline{E_x\left(\bar{\lambda}\right)}$ [1, 2]).

Справедлива следующая теорема [1].

Теорема 1. *Вектор-функция $L_x(\lambda) = [A_x(\lambda), B_x(\lambda)]$, являющаяся нетривиальным ($L_x(\lambda) \not\equiv [1, 0]$) решением интегрального уравнения (8), такова что:*

1) $L_t(\lambda) \in L^2_{2,a}(F_t)$ для любого $a \in [0, l]$ и $\lambda \in \mathbb{C}$;

2) функции $E_x(\lambda) = A_x(\lambda) - iB_x(\lambda)$ и $\tilde{E}_x(\lambda) = A_x(\lambda) + iB_x(\lambda)$ не имеют корней в полуплоскостях $\operatorname{Im}\lambda > 0$ и $\operatorname{Im}\lambda < 0$ соответственно, причем

$$|E_x(\lambda)| - \left|\tilde{E}_x(\lambda)\right| = \begin{cases} > 0, & \operatorname{Im}\lambda > 0; \\ = 0, & \operatorname{Im}\lambda = 0; \\ < 0, & \operatorname{Im}\lambda < 0; \end{cases}$$

и $E_x(0) = \tilde{E}_x(0) = 1$ при всех $x \in [0, l]$.

Напомним [1, 2], что функция $g(\lambda)$ называется функцией ограниченного вида в $\operatorname{Im}\lambda > 0$, если она является частным двух голоморфных ограниченных в $\operatorname{Im}\lambda > 0$ функций. Нетрудно видеть [2], что если $\operatorname{Re} g(\lambda) \geq 0$ в $\operatorname{Im}\lambda > 0$ и $g(\lambda)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda > 0$, то $g(\lambda)$ является функцией ограниченного вида. Отсюда легко получить [2] следующее представление аналитических ограниченного вида в $\operatorname{Im}\lambda > 0$ функций $g(\lambda)$:

$$g(\lambda) = B(\lambda)e^{-i\lambda h}G(\lambda),$$

где $B(\lambda)$ — произведение Бляшке, отвечающее нулям $g(\lambda)$; число $h \in \mathbb{R}$ называется средним типом $g(\lambda)$; а $G(\lambda)$ является голоморфной в $\operatorname{Im}\lambda > 0$ функцией, для которой

$$\operatorname{Re} G(x+iy) = \frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu(t)}{(t-x)^2+y^2} \quad (\lambda = x+iy;\ y>0);$$

причем вещественная функция $\mu(t)$ такова, что $\mu(0) = 0$ и

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|d\mu(t)|}{1+t^2} < \infty.$$

Рассмотрим пару целых функций $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ такую, что функции $E(\lambda) = A(\lambda) - iB(\lambda)$ и $\tilde{E}(\lambda) = A(\lambda) + iB(\lambda)$ не имеют корней в полуплоскостях $\operatorname{Im}\lambda > 0$ и $\operatorname{Im}\lambda < 0$ соответственно, причем

$$|E(\lambda)| - \left|\tilde{E}(\lambda)\right| = \begin{cases} >0, & \operatorname{Im}\lambda > 0; \\ =0, & \operatorname{Im}\lambda = 0; \\ <0, & \operatorname{Im}\lambda < 0. \end{cases}$$

Ассоциируем с такой парой функций гильбертово пространство $\mathcal{B}(A,B)$ [2].

Пространством Л. де Бранжа $\mathcal{B}(A,B)$ называется линейное многообразие целых функций $F(\lambda)$ таких, что:

а) $\dfrac{F(\lambda)}{E(\lambda)}$ $\left(\dfrac{F(\lambda)}{\tilde{E}(\lambda)}\right)$ является функцией ограниченного вида и неположительного среднего типа в верхней, $\operatorname{Im}\lambda > 0$ (нижней, $\operatorname{Im}\lambda < 0$), полуплоскости;

б) имеет место

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{F(t)}{E(t)}\right| dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{F(t)}{\tilde{E}(y)}\right| dt < \infty.$$

Пространство $\mathcal{B}(A,B)$ является гильбертовым [2]. Скалярное произведение в $\mathcal{B}(A,B)$ задаётся естественным образом:

$$\langle F(\lambda), G(\lambda)\rangle_{\mathcal{B}(A,B)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(t)\bar{G}(t)\frac{dt}{|E(t)|^2}.$$

Теорема Л. де Бранжа 2. [2] *Рассмотрим семейство гильбертовых пространств Л. де Бранжа $\mathcal{B}\left(A_x(\lambda), B_x(\lambda)\right)$, где вектор-строка $L_x(\lambda) =$*

$[A_x(\lambda), B_x(\lambda)]$ является решением интегрального уравнения (8) на отрезке $x \in [0, l]$ для некоторой матричнозначной меры F_t. Сопоставим каждой строке $[f(t), g(t)] \in L^2_{2,l}(F_t)$ функцию

$$F(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^a [f(t), g(t)] dF_t L_t^* \left(\bar{\lambda}\right), \tag{10}$$

где a — внутренняя точка отрезка $[0, l]$, $0 < a < l$. Тогда $F(\lambda) \in \mathcal{B}\left(A_a(\lambda), B_a(\lambda)\right)$, причем справедливо "равенство Парсеваля"

$$\pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|F(t)|^2}{|E_a(t)|^2} dt = \int\limits_0^a [f(t), g(t)] dF_t \left[\begin{array}{c} \tilde{f}(t) \\ \tilde{g}(t) \end{array} \right].$$

Для любой функции $G(\lambda) \in \mathcal{B}\left(A_a(\lambda), B_a(\lambda)\right)$ существует вектор-функция $[\varphi(t), \psi(t)] \in L^2_{2,l}(F_t)$ с носителем на $[0, a]$, такая что для $G(\lambda)$ имеет место представление (10).

II. Оператор-функция $Z_t \in [H, H]$ аргумента $t \in \mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$ называется полугруппой [3], если

$$Z_0 = I, \quad Z_{t+s} = Z_t \cdot Z_s.$$

Если Z_t непрерывна в равномерной топологии H, то $Z_t = \exp(itA)$, где $A \in [H, H]$ — инфинитезимальный оператор полугруппы Z_t [3] задается формулой

$$iA = s - \lim_{t \to 0} \frac{Z_t - I}{t}.$$

Полугруппа U_t, действующая в пространстве $\mathcal{H}$, называется дилатацией полугруппы Z_t в H [5], если

$$\mathcal{H} \supseteq H; \quad Z_t = P_H U_t|_H \quad (t \geq 0), \tag{11}$$

где P_H — ортопроектор на H.

Рассмотрим комплекс [1]

$$\Delta = \left(A, \mathcal{B}\left(A_l(\lambda), B_l(\lambda)\right), \{e_1(\lambda), e_2(\lambda)\}, J_N\right), \tag{12}$$

где

$$AF(\lambda) = \frac{F(\lambda) - F(0)}{\lambda}, \quad F(\lambda) \in \mathcal{B}\left(A_l(\lambda), B_l(\lambda)\right), \tag{13}$$

$$e_1(\lambda) = \frac{B_l^*(\bar{\lambda})}{\lambda}, \quad e_2(\lambda) = \frac{1 - A_l^*(\bar{\lambda})}{\lambda}. \tag{14}$$

Теорема 3. [1] *Пусть спектр $\sigma(A)$ оператора A операторного комплекса Δ (6) сосредоточен в нуле, $\sigma(A) = \{0\}$. Тогда в случае простоты комплекс (6) унитарно эквивалентен комплексу (12).*

Вычислим полугруппу

$$Z_t F(\lambda) = e^{iAt} F(\lambda), \quad F(\lambda) \in \mathcal{B}\left(A_l(\lambda), B_l(\lambda)\right).$$

Так как

$$F(\lambda) = f_0 + \lambda f_1 + \frac{\lambda^2}{2!} f_2 + ...;$$

$$AF(\lambda) = f_1 + \frac{\lambda}{2!} f_2 + \frac{\lambda^2}{3!} f_3 + ...;$$

$$A^2 F(\lambda) = \frac{1}{2!} f_2 + \frac{\lambda}{3!} f_3 + \frac{\lambda^2}{4!} f_4 + ...;$$

и т. д., имеем

$$Z_t F(\lambda) = e^{iAt} F(\lambda) = \sum_0^\infty \frac{(iA)^k t^k}{k!} F(\lambda) =$$

$$= F(\lambda) + itAF(\lambda) + \frac{i^2 t^2}{2!} A^2 F(\lambda) + ... = f_0 + (\lambda + it) f_1 +$$

$$+ \left(\frac{\lambda^2}{2!} + it\frac{\lambda}{2!} + \frac{i^2 t^2}{2!} \cdot \frac{1}{2!} \right) f_2 + ... = f_0 + \lambda \left(1 + \frac{it}{\lambda} \right) f_1 +$$

$$+ \left(1 + \frac{it}{\lambda} + \frac{i^2 t^2}{2! \lambda^2} \right) \frac{1}{2!} \lambda^2 f_2 + ... + \left(1 + \frac{it}{\lambda} + ... + \frac{1}{n!} \left(\frac{it}{\lambda} \right)^n \right) \frac{\lambda^n}{n!} f_n + ...$$

Итак,

$$e^{\frac{it}{\lambda}} (F(\lambda) - F(0)) = \left(1 + \frac{it}{\lambda} + \frac{1}{2!} \left(\frac{it}{\lambda} \right)^2 + ... \right) \left(\lambda f_1 + \lambda^2 f_2 + \lambda^3 f_3 + ... \right).$$

Теорема 4. *Полугруппа* $Z_t = \exp(itA)$*, где* A *имеет вид (13), на функции* $F(\lambda) \in \mathcal{B}\left(A_l(\lambda), B_l(\lambda)\right)$ *действует следующим образом:*

$$Z_t F(\lambda) = F(0) + P_+ e^{\frac{it}{\lambda}} (F(\lambda) - F(0)), \tag{15}$$

где P_+ *— ортопроектор на подпространство функций, аналитически продолжаемых в верхнюю полуплоскость.*

Рассмотрим линейное многообразие вектор-функций $f(t)$ со значениями в гильбертовом пространстве G при $t \in [0, T]$. Обозначим через $L^2_{(0,T)}(G)$ гильбертово пространство, полученное в результате замыкания данного многообразия вектор-функций по норме

$$\|f\|^2 = \int_0^T \|f(t)\|^2_G dt < \infty.$$

Открытая система $F_\Delta = \{R_\Delta, S_\Delta\}$ называется [1] ассоциированной открытой системой с узлом Δ (1), если R_Δ и S_Δ задаются формулами

$$F_\Delta : \left\{ \begin{array}{l} R_\Delta\,(h_0, u(t)) = h(t); \\ S_\Delta\,(h_0, u(t)) = (h_T, v(t))\,; \end{array} \right. \qquad t \in [0, T]. \tag{16}$$

При этом $h(t)$ является решением задачи Коши

$$R_\Delta : \left\{ \begin{array}{l} i\dfrac{d}{dt}h(t) + Ah(t) = \varphi^* Ju(t); \\ h(0) = h_0 \end{array} \right. \qquad (0 \le t \le T), \tag{17}$$

а отображение S_Δ задается формулами

$$S_\Delta : \left\{ \begin{array}{l} v(t) = u(t) - i\varphi h(t); \\ h_T = h(T), \end{array} \right. \tag{18}$$

где $h(t)$ — решение задачи (17).

Обозначим через $\mathcal{M}$ линейную оболочку вектор-функций вида

$$f(\xi) = (u_+(\xi), h(\lambda), u_-(\xi)), \tag{19}$$

где $u_\pm(\xi)$ — вектор-функции из E такие, что $\operatorname{supp} u_\pm(\xi) \in \mathbb{R}_\mp$, а $h(\lambda) \in \mathcal{B}\,(A_l(\lambda), B_l(\lambda))$. Зададим на $\mathcal{M}$ норму

$$\|f\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{0} \|u_+(\xi)\|_E^2 d\xi + \|h(\lambda)\|^2 + \int\limits_{0}^{\infty} \|u_-(\xi)\|_E^2 d\xi < \infty. \tag{20}$$

Замыкание многообразия $\mathcal{M}$ в этой метрике и образует гильбертово пространство, которое мы обозначим через $\mathcal{H}$. Через P_M обозначим [1] оператор сужения на множество M, а именно:

$$(P_M f)(\xi) = f(\xi)\chi_{_M}(\xi),$$

где $\chi_{_M}(\xi)$ — характеристическая функция множества M $(M \subset \mathbb{R})$ $(\chi_{_M}(\xi) = 1$ при $\xi \in M$, и $\chi_{_M}(\xi) = 0$ при $\xi \notin M)$. Определим в $\mathcal{H}$ $J-$метрику, $\langle J., .\rangle$, где

$$Jf(\lambda, \xi) = (Ju_+(\xi), h(\lambda), Ju_-(\xi)). \tag{21}$$

Зададим [1] в пространстве $\mathcal{H}$ полугруппу $U_t, -$

$$(U_t f)(\lambda, \xi) = f_t(\lambda, \xi) = (u_+(t, \xi), h_t(\lambda), u_-(t, \xi)), \quad (t \ge 0). \tag{22}$$

Вектор-функция $u_-(t, \xi)$ имеет вид:

$$u_-(t, \xi) = P_{\mathbb{R}_+} u_-(\xi + t). \tag{23}$$

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} i\dfrac{d}{d\xi}y_t(\lambda,\xi)+\dfrac{y_t(\lambda,\xi)-y_t(0,\xi)}{\lambda}=\sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{2}\left\langle P_{(-t,0)}u_-(\xi+t),e_\alpha\right\rangle_{\mathcal{B}}J_{\alpha\beta}e_\beta; \\ y_t(\lambda,-t)=h(\lambda);\ \xi\in(-t,0); \end{cases} \tag{24}$$

и положим $h_t(\lambda)=y_t(\lambda,0)$. Наконец,

$$u_+(t,\xi)=u_+(\xi+t)+P_{(-t,0)}\left\{u_-(\xi+t)-i\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\left\langle y_t(\lambda,\xi),e_\alpha\right\rangle e_\beta\right\}, \tag{25}$$

где $y_t(\lambda,\xi)$ — решение задачи Коши (24).

Справедливо следующее равенство [1]:

$$\int\limits_{-t}^{0}\left\langle J\left[u_-(\xi+t)-i\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\left\langle y_t(\lambda,\xi),e_\alpha\right\rangle e_\beta\right],u_-(\xi+t)\right.$$

$$\left.-i\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\left\langle y_t(\lambda,\xi),e_\alpha\right\rangle e_\beta\right\rangle d\xi+\|h_t(\lambda)\|^2=\int\limits_{0}^{t}\left\langle Ju_-(\xi),u_-(\xi)\right\rangle d\xi+\|h(\lambda)\|^2.$$

Легко видеть, что $y_t(\lambda,\xi)$, решение задачи Коши (24), имеет вид

$$y_t(\lambda,\xi)=h(0)+P_+e^{\frac{i(\xi+t)}{\lambda}}(h(\lambda)-h(0))-$$

$$-i\int\limits_{-t}^{\xi}e^{iA(\xi-\theta)}\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\left\langle u_-(\theta+t),e_\alpha(\lambda)\right\rangle_{\mathcal{B}}J_{\alpha\beta}e_\beta d\theta,$$

$\xi\in(-t,0)$. Полугруппа U_t является дилатацией Z_t,

$$P_HU_t(0,h(\lambda),0)=(0,h_t(\lambda),0)=Z_th(\lambda),$$

так как $h_t(\lambda)=y_t(\lambda,0)=h(0)+P_+e^{\frac{it}{\lambda}}(h(\lambda)-h(0)$, в силу задачи Коши (24). Сопряженная полугруппа U_t^* определяется в $\mathcal{H}$ следующим образом:

$$(U_t^*\tilde f)(\lambda,\xi)=\tilde f_t(\lambda,\xi)=\left(\tilde u_+(t,\xi),\tilde h_t(\lambda),\tilde u_-(t,\xi)\right), \tag{26}$$

где

$$\tilde u_+(t,\xi)=P_{\mathbb{R}_-}\tilde u_+(\xi-t),$$

а $\tilde h_t(\lambda)=\tilde y_t(\lambda,0)$, функция же $\tilde y_t(\lambda,\xi)$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} i\dfrac{d}{d\xi}\tilde y_t(\lambda,\xi)+\dfrac{\tilde y_t(\lambda,\xi)-\tilde y_t(0,\xi)}{\bar\lambda}=\sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{2}\left\langle P_{(0,t)}u_+(\xi-t),e_\alpha\right\rangle J_{\alpha\beta}e_\beta; & \xi\in(0,t); \\ \tilde y_t(\lambda,t)=\tilde h(\lambda); \end{cases}$$

и задается выражением

$$\tilde{y}_t(\lambda,\xi)=\tilde{h}(0)+P_+e^{\frac{i(\xi-t)}{\lambda}}+i\int\limits_{\xi}^{t}e^{iA^*(\theta-\xi)}\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\langle u_+(\theta-t),e_\alpha(\lambda)\rangle_{\mathcal{B}}\,J_{\alpha\beta}e_\beta(\lambda)d\theta, \tag{27}$$

где $\xi\in(0,t)$. И наконец

$$\tilde{u}_-(t,\xi)=\tilde{u}_-(\xi-t)+P_{(0,t)}\left[\tilde{u}_-(\xi-t)+i\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\langle\tilde{y}_t(\lambda,\xi),e_\alpha\rangle\,e_\beta\right].$$

Введем метрику

$$\langle f(\xi,\lambda)\rangle_J^2=\int\limits_{\mathbb{R}_-}\langle Ju_+(\xi),u_+(\xi)\rangle_E\,d\xi+\|h(\lambda)\|^2+\int\limits_{\mathbb{R}_+}\langle Ju_-(\xi),u_-(\xi)\rangle_E\,d\xi. \tag{28}$$

Полугруппа U_t называется J-унитарной [1], если U_t унитарна в J-метрике (28),

$$U_t^*JU_t=J,\quad U_tJU_t^*=J\quad(\forall t\in\mathbb{R}_+).$$

Нетрудно видеть [6], что U_t (22) является J-унитарной дилатацией.

Теорема 5. *Полугруппа Z_t в $\mathcal{B}\,(A_l(\lambda),B_l(\lambda))$, где A действует по формуле (13), обладает J-унитарной дилатацией U_t (22) в $\mathcal{H}$.*

III. Подпространства D_+ и D_- в $\mathcal{H}$ называются [7] уходящим и приходящим подпространствами группы U_t в $\mathcal{H}$ в смысле П. Лакса и Р. Филлипса, если $D_-\perp D_+$ и

$$\begin{aligned}U_tD_+\subset D_+\quad&(\forall t\in\mathbb{R}_+);\\ U_{-t}D_-\subset D_-\quad&(\forall t\in\mathbb{R}_+).\end{aligned} \tag{29}$$

Отметим, что подпространства

$$D_+=\{f(\xi)=(u_+(\xi),0,0)\in\mathcal{H}\};\quad D_-=\{f(\xi)=(0,0,u_-(\xi))\in\mathcal{H}\}$$

являются уходящим и приходящим подпространствами для U_t, кроме того имеет место

$$\mathcal{H}=D_+\oplus H\oplus D_-. \tag{30}$$

Зададим в гильбертовом пространстве

$$L^2_{\mathbb{R}}(E)=\left\{g(\xi)\in E:\xi\in\mathbb{R}:\int\limits_{-\infty}^{\infty}\|g(\xi)\|_E^2d\xi<\infty\right\} \tag{31}$$

свободную [8] унитарную группу сдвигов

$$(V_tg)(\xi)=g(\xi+t). \tag{32}$$

Естественное отождествление позволяет считать, что $D_{\pm} = L^2_{\mathbb{R}_{\mp}}(E) \subset L^2_{\mathbb{R}}(E)$. Определим [8] волновые операторы $W_{\mp}$,

$$W_{\mp} = s - \lim_{t\to\pm\infty} U_t P_{D_{\mp}} V_{-t}. \tag{33}$$

Нетрудно видеть [1], что имеют место следующие важные соотношения:

$$W_{\pm} P_{D_{\pm}} = P_{D_{\pm}}, \quad U_t W_{\pm} = W_{\pm} V_t \quad (t \in \mathbb{R}). \tag{34}$$

Определим гильбертовы пространства

$$L^2_{\mathbb{R}}\left(E, \alpha^-\right) = \left\{ g(\xi) \in E : \xi \in \mathbb{R}; \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-2\alpha^- \xi} \left\| g(\xi) \right\|^2_E d\xi + \int\limits_{0}^{\infty} \| g(\xi) \|^2_E d\xi < \infty \right\}, \tag{35_-}$$

где $\alpha^- > \beta$, и

$$L^2_{\mathbb{R}}\left(E, \alpha^+\right) = \left\{ g(\xi) \in E : \xi \in \mathbb{R}; \int\limits_{0}^{\infty} e^{-2\alpha^+ \xi} \left\| g(\xi) \right\|^2_E d\xi + \int\limits_{-\infty}^{0} \| g(\xi) \|^2_E d\xi < \infty \right\}; \tag{35_+}$$

где $\alpha^+ > \beta' > 0$, причем $\|U_{-t}\| \le e^{\beta' t}$.

Имеют место

$$\begin{aligned} \langle J W_+ v, W_+ v' \rangle_{\mathcal{H}} &= \langle J v, v' \rangle_{L^2(E)}; \\ \langle J W_- u, W_- u' \rangle_{\mathcal{H}} &= \langle J u, u' \rangle_{L^2(E)} \end{aligned} \tag{36}$$

для любых u, $u' \in L^2_{\mathbb{R}}\left(E, \alpha^-\right)$ (35_+) и v, $v' \in L^2_{\mathbb{R}}\left(E, \alpha^+\right)$ (35_-).

Справедлива следующая теорема [6].

Теорема 6. [6] *Пусть для дилатации U_t имеют место оценки $\|U_t\| \le e^{\beta t}$, $\|U_{-t}\| \le e^{\beta' t}$, где β, $\beta' > 0$. Тогда существуют волновые операторы W_- и W_+ (33), действующие соответственно из $L^2_{\mathbb{R}}\left(E, \alpha^+\right)$ (35_+) и из $L^2_{\mathbb{R}}\left(E, \alpha^-\right)$ (35_-) (где $\alpha^- > \beta$, $\alpha^+ > \beta'$) в пространство $\mathcal{H}$, $W_{\pm}$ обладают J-изометричностью (36), при этом имеют место соотношения (34).*

Найдем явный вид волнового оператора W_-. Пусть $g(\xi) \in L^2_{\mathbb{R}}\left(E, \alpha^-\right)$, тогда

$$U_t P_{D_-} V_{-t} g(\xi) = \left(u_+(t,\xi), h_t(\lambda), u_-(t,\xi) \right),$$

где $u_-(t,\xi) = P_{D_-} g(\xi)$; $h_t(\lambda) = y_t(\lambda, 0)$, где $y_t(\lambda,\xi)$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} i \dfrac{d}{d\xi} y_t(\lambda,\xi) + \dfrac{y_t(\lambda,\xi) - y_t(0,\xi)}{\lambda} = \displaystyle\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \left\langle P_{(-t,0)} g(\xi), e_\alpha \right\rangle J_{\alpha\beta} e_\beta; \\ y_t(\lambda, -t) = 0; \end{cases}$$

и имеет вид

$$y_t(\lambda,\xi) = -i \int\limits_{-t}^{\xi} e^{iA(\xi-\theta)} \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \langle g(\theta), e_\alpha(\lambda) \rangle J_{\alpha\beta} e_\beta(\lambda) d\theta;$$

и, наконец,

$$u_+(t,\xi) = P_{(-t,0)} \left\{ g(\xi) - i \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \langle y_t(\lambda,\xi), e_\alpha \rangle \, e_\beta \right\}.$$

Таким образом,

$$W_- g(\xi) = \left(P_{\mathbb{R}_-} \left\{ g(\xi) - i \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \langle y_{+\infty}(\lambda,\xi), e_\alpha \rangle \, J_{\alpha\beta} e_\beta \right\}, y_{+\infty}(\lambda,0), P_{D_-} g(\xi) \right),$$

где

$$y_{+\infty}(\lambda,\xi) = -i \int_{-\infty}^{\xi} e^{iA(\xi-\theta)} \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \langle g(\theta), e_\alpha(\lambda) \rangle \, J_{\alpha\beta} e_\beta(\lambda) d\theta.$$

Оператор рассеяния S определим [1, 6, 7] следующим образом:

$$S = W_+^* W_- \quad \left(L^2_{\mathbb{R}} \left(E, \alpha^- \right) \to L^2_{\mathbb{R}} \left(E, \alpha^+ \right) \right). \tag{37}$$

Для оператора рассеяния S выполняется [1] соотношение

$$SV_t = V_t S. \tag{38}$$

Найдем явный вид оператора рассеяния в $L^2_{\mathbb{R}}(E,\alpha^-)$. Из определения волновых операторов следует, что

$$S = s - \lim_{t\to\infty} V_{-t} P_{D_+} U_{2t} P_{D_-} V_{-t}.$$

Пусть $g(\xi) \in L^2_{\mathbb{R}}(E,\alpha^-)$, тогда

$$V_{-t} P_{D_+} U_{2t} P_{D_-} V_{-t} g(\xi) = V_{-t} P_{D_+} U_{2t} \left(0, 0, P_{\mathbb{R}_+} g(\xi - t) \right) =$$

$$= V_{-t} P_{D_+} \left(v_t(\xi), h_t(\lambda), P_{\mathbb{R}_+} g(\xi + t) \right) = v_t(\xi - t),$$

где $v_t(\xi) = P_{(-2t,0)} \{ g(\xi + t) - i \, \| \langle y_t(\xi,\lambda) e_\alpha, e_\beta \rangle \| \}$; $y_t(\lambda,\xi)$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} i \dfrac{d}{d\xi} y_t(\lambda,\xi) + \dfrac{y_t(\lambda,\xi) - y_t(0,\xi)}{\lambda} = \displaystyle\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \langle g(\xi+t), e_\alpha(\lambda) \rangle_{\mathcal{B}} \, J_{\alpha\beta} e_\beta(\lambda); \\ y_t(\lambda,-2t) = 0; \; \xi \in (-2t, 0); \end{cases}$$

а $P_{(-2t,0)}$ — оператор умножения на характеристическую функцию интервала $(-2t,0)$. Очевидно, что

$$y_t(\lambda,\xi) = \int_{-2t}^{\xi} e^{iA(\xi-\eta)} \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \langle g(\eta+t), e_\alpha(\lambda) \rangle_{\mathcal{B}} \, J_{\alpha\beta} e_\beta(\lambda),$$

поэтому

$$v_t(\xi - t) = P_{(-t,t)}\left\{ g(\xi) - \int\limits_{-t}^{\xi} J_N \left\| \left\langle e^{iA(\xi - x)} e_\alpha, e_\beta \right\rangle \right\| dx \right\}.$$

Таким образом, после предельного перехода $t \to \infty$ окончательно получим

$$Sg(\xi) = g(\xi) - \int\limits_{-\infty}^{\xi} J_N \left\| \left\langle e^{iA(\xi - x)} e_\alpha, e_\beta \right\rangle \right\| g(x)dx =$$

$$= g(\xi) - \int\limits_{-\infty}^{\xi} J_N \left\| \left\langle e_\alpha(0) + P_+ e^{\frac{i(\xi - x)}{\lambda}} \left(e_\alpha(\lambda) - e_\alpha(0)\right), e_\beta \right\rangle \right\| g(x)dx.$$

IV. Напомним [4], что функция

$$S_\Delta(\lambda) = I - i\varphi(A - \lambda I)^{-1}\varphi^* J \tag{39}$$

называется характеристической оператор-функцией М. С. Лившица узла Δ.

Характеристической матрицей-функцией комплекса называется [1]

$$S_\Delta(\lambda) = I - iJ \left\| \left\langle (A - \lambda I)^{-1} g_\alpha, g_\beta \right\rangle \right\|, \tag{40}$$

где $S_\Delta(\lambda) = \|\langle S_\Delta(\lambda) f_\alpha, f_\beta \rangle\|$ — матрица, отвечающая характеристической оператор-функции $S_\Delta(\lambda)$ в базисе $\{f_\alpha\}_1^r$.

Для комплекса (12) имеем

$$S_\Delta(z) = I - iJ_N \left\| \left\langle (A - zI)^{-1} \hat{e}_\alpha(\lambda), \hat{e}_\beta(\lambda) \right\rangle \right\| =$$

$$= \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix},$$

$$s_{11} = 1 + \left\langle (A - zI)^{-1} \frac{1 - A_l^*(\bar\lambda)}{\lambda}, \frac{B_l^*(\bar\lambda)}{\lambda} \right\rangle;$$

$$s_{21} = -\left\langle (A - zI)^{-1} \frac{B_l^*(\bar\lambda)}{\lambda}, \frac{B_l^*(\bar\lambda)}{\lambda} \right\rangle;$$

$$s_{12} = \left\langle (A - zI)^{-1} \frac{1 - A_l^*(\bar\lambda)}{\lambda}, \frac{1 - A_l^*(\bar\lambda)}{\lambda} \right\rangle;$$

$$s_{22} = 1 - \left\langle (A - zI)^{-1} \frac{B_l^*(\bar\lambda)}{\lambda}, \frac{1 - A_l^*(\bar\lambda)}{\lambda} \right\rangle.$$

Вычислим резольвенту $(A-zI)^{-1}$, пусть $(A-zI)^{-1}u=f$ или $Af-zf=u$, где $f(\lambda)\in\mathcal{B}\left(A_l(\lambda),B_l(\lambda)\right)$. Тогда для компоненты $f_i(\lambda,z)$ функции $f(\lambda,z)$ мы получим

$$\frac{f_i(\lambda,z)-f_i(0,z)}{\lambda}-zf_i(\lambda,z)=u_i(\lambda);\quad i=1,\,2;$$

следовательно,

$$f_i(\lambda,z)=\frac{\lambda u_i(\lambda)}{1-\lambda z}-\frac{1}{z(1-\lambda z)}u_i\left(\frac{1}{z}\right);\quad i=1,\,2.$$

Таким образом,

$$s_{11}=1+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{A_l^*\left(\frac{1}{\bar z}\right)-A_l^*(\bar\lambda)}{1-\lambda z}\cdot\frac{\overline{B_l^*(\bar\lambda)}}{\bar\lambda}\frac{d\lambda}{|E_l(\lambda)|^2},\tag{41}$$

$$s_{21}=-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{B_l^*(\bar\lambda)-B_l^*\left(\frac{1}{\bar z}\right)}{1-\lambda z}\cdot\frac{\overline{B_l^*(\bar\lambda)}}{\bar\lambda}\frac{d\lambda}{|E_l(\lambda)|^2}$$

;

$$s_{12}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{A_l^*\left(\frac{1}{\bar z}\right)-A_l^*(\bar\lambda)}{1-\lambda z}\cdot\frac{\overline{1-A_l^*(\bar\lambda)}}{\bar\lambda}\frac{d\lambda}{|E_l(\lambda)|^2};$$

$$s_{22}=1-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{B_l^*(\bar\lambda)-B_l^*\left(\frac{1}{\bar z}\right)}{1-\lambda z}\cdot\frac{\overline{1-A_l^*(\bar\lambda)}}{\bar\lambda}\frac{d\lambda}{|E_l(\lambda)|^2},$$

где $E_l(\lambda)$ имеет вид (9).

Пусть

$$dF_t=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}dt;$$

тогда уравнение (8) эквивалентно системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dl}A_l(\lambda)+\lambda B_l(\lambda)=0;\quad A_0(\lambda)=1;\\ \dfrac{d}{dl}B_l(\lambda)-\lambda A_l(\lambda)=0;\quad B_0(\lambda)=0,\end{cases}$$

решением которой являются функции $A_l(\lambda)=\cos l\lambda$, $B_l(\lambda)=\sin l\lambda$. Таким образом, $\mathcal{B}\left(A_l(\lambda),B_l(\lambda)\right)$ в этом случае совпадает с пространством Винера – Пэли [1, 2]. Рассмотрим случай $\lambda\in\mathbb{R}$. Тогда

$$s_{11}=1+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\frac{l}{z}-\cos l\lambda}{1-\lambda z}\cdot\frac{\sin l\lambda}{\lambda}d\lambda;$$

$$s_{12} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\frac{l}{z} - \cos l\lambda}{1-\lambda z} \cdot \frac{1-\cos l\lambda}{\lambda} d\lambda;$$

$$s_{21} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin l\lambda - \sin\frac{l}{z}}{1-\lambda z} \cdot \frac{\sin l\lambda}{\lambda} d\lambda; \tag{42}$$

$$s_{22} = 1 - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin l\lambda - \sin\frac{l}{z}}{1-\lambda z} \cdot \frac{1-\cos l\lambda}{\lambda} d\lambda.$$

Приведем явный вид характеристической функции для случая $l > 0, \operatorname{Im}\frac{1}{z} > 0$ (в остальных случаях характеристическая функция имеет аналогичный вид):

$$s_{11} = 1 + \cos\frac{l}{z}\left[\pi - \pi e^{i\frac{l}{z}}\right] - \frac{1}{2}\left[-\pi e^{i\frac{2l}{z}} + \pi\right];$$

$$s_{12} = \pi i e^{i\frac{l}{z}}\left(\cos\frac{l}{z} + 1\right) - \pi i e^{i\frac{2l}{z}};$$

$$s_{21} = \frac{1}{2}\pi i e^{i\frac{2l}{z}} - \sin lz\left[-\pi e^{i\frac{l}{z}} + \pi\right]; \tag{43}$$

$$s_{22} = 1 - \pi\left[1 - e^{i\frac{l}{z}}\right] + \frac{\pi}{2}\left[1 - e^{i\frac{2l}{z}}\right] + \sin\left(\frac{l}{z}\right)\pi i e^{i\frac{l}{z}}.$$

Теорема 7. *Характеристическая оператор-функция $S_\Delta(\lambda)$ комплекса Δ (12) имеет вид*

$$S_\Delta(\lambda) = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix},$$

где s_{ij} $(i,\ j = 1,\ 2)$ задаются формулами (41). Если

$$dF_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} dt;$$

s_{ij} $(i,\ j = 1,\ 2)$ задаются формулами (42), а в случае $l > 0$, $\operatorname{Im}\dfrac{1}{z} > 0$ — формулами (43).

Как известно, [1], преобразование Фурье оператора рассеяния (37) совпадает с оператором умножения на характеристическую матрицу-функцию $S_\Delta(\lambda)$.

Автор выражает благодарность В.А. Золотареву за внимание и полезные замечания к статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Золотарев В. А. Аналитические методы спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов. Харьков: Изд. ХНУ, — 2003. — 342 с.

2. De Branges L. Hilbert spaces of entire functions. London: Prentice-Hall, — 1968. — 326 pp.

3. Рисс Ф., Надь Б. С. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, — 1979. — 587 с.

4. Лившиц М. С., Янцевич А. А. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. Харьков: Изд. ХГУ, — 1971. — 160 с.

5. Секефальви-Надь Б., Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М: Мир, — 1970. — 431 с.

6. Золотарев В. А., Розуменко О. В. Функциональная модель Павлова ограниченного несамосопряженного оператора. // Харьков: Вiсник Харкiвського нацiонального унiверситету. Серiя "Математика, прикладна математика i механiка — 2006. — **749**. С. 30 - 49.

7. Лакс П. Д., Филлипс Р. С. Теория рассеяния. М: Мир, — 1971. — 312 с.

8. Адамян В. М., Аров Д. З. Об унитарных сцеплениях полуунитарных операторов. // Кишинев: Математические исследования, — 1966. — Т. 1, вып. 2. — С. 3 – 64.

9. Павлов Б. С. Спектральный анализ диссипативного оператора Шредингера в терминах функциональной модели. // Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. фундам. направления, ВИНИТИ, — 1991. — Т. 65. — С. 95–163.

10. De Branges L., Rovnyak J. Canonical models in quantum scattering theory. // New-York, Wiley: Perturb. Theory and Appl. in Quant. Mech., — 1966. — Pp. 295–392.