

## Метод граничных интегральных уравнений в пространственных динамических задачах механики разрушения материалов с межслоевыми трещинами

В. А. Меньшиков

*Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины  
Киев, Украина*

Получена система граничных интегральных уравнений для материалов с трещинами на поверхности раздела сред при динамическом нагружении. В случае плоской поверхности раздела и гармонического нагружения представлены соотношения для сингулярных ядер интегральных уравнений. На основе метода граничных элементов рассчитаны параметры механики разрушения для биматериалов с круговыми трещинами в плоскости раздела при нагружении волнами растяжения-сжатия и сдвига.

*2000 Mathematics Subject Classification* 74R10, 74M99, 45E99.

**1. Введение.** Метод граничных интегральных уравнений в статических задачах механики твердого тела, по-видимому, был впервые использован в работах Rizzo и Cruse [1, 2]. Дальнейшее развитие он получил в работах А.Н. Гузя и его учеников [3, 4] применительно к динамическим задачам механики разрушения для однородных тел. Настоящая статья посвящена вопросам использования метода граничных интегральных уравнений при решении задач механики разрушения составных упругих сред с трещинами в границах их раздела при динамическом нагружении.

**2. Постановка задачи.** Под разрушением тела понимают исчерпание им несущей способности, которое происходит из-за нескольких факторов, в частности, вследствие накопления повреждений и неконтролируемого роста трещин. Согласно общифункциональному методу механики разрушения [5] локальное разрушение определяется критериями вида

$$f(K_I, K_{II}, K_{III}) = 0,$$

где  $f$  – некая функция, определяемая экспериментально,  $K_i$  – коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) нормального отрыва, поперечного и продольного сдвига (первой, второй и третьей моды соответственно).

Для коэффициентов интенсивности напряжений первой, второй и третьей моды при динамическом нагружении общеизвестны выражения

$$K_i = \max_t \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{ij}(r, t), \quad t \in T = [0, \infty), \quad (1)$$

где  $\sigma_{ij}(r, t)$  – компоненты напряжения на поверхности сцепления сред у фронта трещины;  $r$  – расстояние от фронта трещины до точки, где найдено напряжение;  $t$  – время.

Соотношения (1) могут быть использованы для трещин в композитах на границе раздела сред при условии, что  $r$  находится вблизи фронта в области корректности решения, которая определяется следующим условием из [5]

$$1 \gg \frac{r}{R} \gg e^{-\frac{1}{\beta}}. \quad (2)$$

Здесь  $R$  – характерный размер трещины,  $\beta$  – биупругая постоянная материалов

$$\beta = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\mu^{(1)} + \mu^{(2)}\gamma^{(1)}}{\mu^{(2)} + \mu^{(1)}\gamma^{(2)}}, \quad \gamma^{(m)} = \frac{\lambda^{(m)} + 3\mu^{(m)}}{\lambda^{(m)} + \mu^{(m)}}, \quad m = 1, 2.$$

Рассмотрим бесконечное упругое тело в трехмерном пространстве, которое состоит из двух однородных изотропных тел, занимающих подобласти-полупространства  $\Omega^{(m)}$  с разными физико-механическими характеристиками  $\lambda^{(m)}$ ,  $\mu^{(m)}$ ,  $\rho^{(m)}$  ( $m = 1, 2$ ).  $\Gamma^{(1)}$  и  $\Gamma^{(2)}$  – регулярные границы подобластей, характеризующиеся внешними нормальными  $\mathbf{n}_{\Gamma^{(1)}}$  и  $\mathbf{n}_{\Gamma^{(2)}}$ . Положим, что  $\Gamma^{(1)}$  и  $\Gamma^{(2)}$  состоят из бесконечных участков  $\Gamma^{*(1)}$  и  $\Gamma^{*(2)}$ , образующих общий участок границы  $\Gamma^* = \Gamma^{*(1)} \cap \Gamma^{*(2)}$ , а также конечных участков  $\Gamma^{p(1)}$  и  $\Gamma^{p(2)}$ , объединение которых  $\Gamma^p = \Gamma^{p(1)} \cup \Gamma^{p(2)}$  представляет собой трещину. Фронт трещины неподвижен и является замкнутой гладкой кривой на  $\Gamma^*$ .

Пусть составное тело с трещиной на границе раздела сред подвержено динамическому нагружению.

Напряженно-деформированное состояние каждого из тел описывается уравнениями линейной динамической теории упругости в перемещениях в отсутствие объемных сил

$$(\lambda^{(m)} + \mu^{(m)}) \text{grad div} \mathbf{u}^{(m)}(\mathbf{x}, t) + \mu^{(m)} \Delta \mathbf{u}^{(m)}(\mathbf{x}, t) = \rho^{(m)} \partial_t^2 \mathbf{u}^{(m)}(\mathbf{x}, t), \quad (3)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega^{(m)}, \quad t \in T,$$

На общем участке границы зададим условия плотного контакта

$$\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{p}^{(1)}(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{p}^{(2)}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma^*, \quad t \in T,$$

на поверхностях трещины – усилия

$$\mathbf{p}^{(1)}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{g}^{(1)}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma^{p(1)}, \quad t \in T,$$

$$\mathbf{p}^{(2)}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{g}^{(2)}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma^{p(2)}, t \in T,$$

а на бесконечности – условия, которые обеспечивают конечность энергии упругого тела, занимающего неограниченную область.

Начальные условия зададим в виде

$$\mathbf{u}^{(m)}(\mathbf{x}, 0) = \text{grad} \mathbf{u}^{(m)}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega^{(m)}.$$

Решение уравнений (3) с вышеприведенными краевыми условиями позволят получить параметры напряженно-деформированного состояния во всей области  $\Omega = \Omega^{(1)} \cup \Omega^{(2)}$ . Однако это является сложным, дорогостоящим и излишним делом, ибо для вычисления параметров механики разрушения (1) необходимо найти компоненты напряжений лишь на сцепленных поверхностях вблизи фронта трещины. Поэтому перейдем от задачи в трехмерной области к задаче на ее границе.

**3. Граничные интегральные уравнения.** В каждой из подобластей  $\Omega^{(m)}$  перемещения представим через граничные перемещения и поверхностные силы в виде соотношений Соммильяны, ибо в этом случае не возникает вопрос обоснования формулы представления решения [6]

$$u_j^{(m)}(\mathbf{y}, t) = \int_T \int_{\Gamma^{(m)}} p_i^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) U_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) - u_i^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) W_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) d\mathbf{x} d\tau,$$

$$\mathbf{y} \in \Omega^{(m)}, t \in T, j = 1, 2, 3, \tag{4}$$

аналогичные соотношения имеют место для компонент вектора нагрузки

$$p_j^{(m)}(\mathbf{y}, t) = \int_T \int_{\Gamma^{(m)}} p_i^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) K_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) - u_i^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) F_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) d\mathbf{x} d\tau,$$

$$\mathbf{y} \in \Omega^{(m)}, t \in T, j = 1, 2, 3, \tag{5}$$

здесь  $\mathbf{x}$  – точка наблюдения,  $\mathbf{y}$  – точка нагружения;  $U_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau)$ ,  $W_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau)$ ,  $K_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau)$ ,  $F_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau)$  – фундаментальные решения динамической теории упругости.

Учитывая, что  $\Gamma^{(1)}$ ,  $\Gamma^{(2)}$  – регулярные поверхности и полагая, что существует достаточная гладкость распределений плотностей граничных перемещений и поверхностных сил, в соотношениях (4) и (5) устремим точку пространства  $\mathbf{y}$  на  $\Gamma^{(m)}$ , получим уравнения на границе

$$\frac{1}{2} u_j^{(m)}(\mathbf{y}, t) = \int_T \int_{\Gamma^{(m)}} p_i^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) U_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) - u_i^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) W_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) d\mathbf{x} d\tau,$$

$$\frac{1}{2} p_j^{(m)}(\mathbf{y}, t) = \int_T \int_{\Gamma^{(m)}} p_i^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) K_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) - u_i^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) F_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) d\mathbf{x} d\tau,$$

$$\tag{6}$$

здесь  $\mathbf{y} \in \Gamma^{(m)}$ .

В эти равенства входят известные величины, которыми являются поверхностные силы на участках границ  $\Gamma^{p(m)}$  и неизвестные: перемещения на участках  $\Gamma^{p(m)}$ , а также поверхностные силы и перемещения на участках  $\Gamma^{*(m)}$ . Для нахождения указанных неизвестных построим систему граничных интегральных уравнений на основе (6).

Граничные интегральные уравнения на поверхностях областей  $\Omega^{(1)}$  и  $\Omega^{(2)}$  будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}g_j^{(m)}(\mathbf{y}, t) &= \int_{\Gamma} \int_{\Gamma^{p(m)}} g_i^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) K_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau) - u_i^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) F_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau) d\mathbf{x}d\tau + \\ &+ \int_{\Gamma} \int_{\Gamma^{*(m)}} p_i^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) K_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau) - u_i^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) F_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau) d\mathbf{x}d\tau, \quad \mathbf{y} \in \Gamma^{p(m)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}p_j^{(m)}(\mathbf{y}, t) &= \int_{\Gamma} \int_{\Gamma^{p(m)}} g_i^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) K_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau) - u_i^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) F_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau) d\mathbf{x}d\tau + \\ &+ \int_{\Gamma} \int_{\Gamma^{*(m)}} p_i^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) K_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau) - u_i^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) F_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau) d\mathbf{x}d\tau, \quad \mathbf{y} \in \Gamma^{*(m)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u_j^{(m)}(\mathbf{y}, t) &= \int_{\Gamma} \int_{\Gamma^{p(m)}} g_i^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) U_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau) - u_i^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) W_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau) d\mathbf{x}d\tau + \\ &+ \int_{\Gamma} \int_{\Gamma^{*(m)}} p_i^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) U_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau) - u_i^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) W_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau) d\mathbf{x}d\tau, \quad \mathbf{y} \in \Gamma^{*(m)}. \end{aligned}$$

Произведем замену переменных в этих уравнениях, используя условия плотного контакта:

$$\begin{aligned} u_i^{(1)}(\mathbf{x}, t) &= u_i^*(\mathbf{x}, t), \quad p_i^{(1)}(\mathbf{x}, t) = -p_i^*(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma^{*(1)}, \\ u_i^{(2)}(\mathbf{x}, t) &= u_i^*(\mathbf{x}, t), \quad p_i^{(2)}(\mathbf{x}, t) = p_i^*(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma^{*(2)}. \end{aligned}$$

В области плотного контакта перейдем к интегрированию по поверхности  $\Gamma^*$  такой, что  $\mathbf{n}_{\Gamma^*} = \mathbf{n}_{\Gamma^{*(2)}} = -\mathbf{n}_{\Gamma^{*(1)}}$ . Тогда после преобразований, описанных в работе [7] получим систему граничных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}g_j^{(1)}(\mathbf{y}, t) &- \int_{\Gamma} \int_{\Gamma^{p(1)}} g_i^{(1)}(\mathbf{x}, \tau) K_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau) d\mathbf{x}d\tau = \\ &= - \int_{\Gamma} \int_{\Gamma^{p(1)}} u_i^{(1)}(\mathbf{x}, \tau) F_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau) d\mathbf{x}d\tau - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Gamma} \int_{\Gamma^*} p_i^*(\mathbf{x}, \tau) K_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) - u_i^*(\mathbf{x}, \tau) F_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) d\mathbf{x}d\tau, \quad \mathbf{y} \in \Gamma^{p(1)}, \\
 & \quad \frac{1}{2} g_j^{(2)}(\mathbf{y}, t) - \int_{\Gamma} \int_{\Gamma^{p(2)}} g_i^{(2)}(\mathbf{x}, \tau) K_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) d\mathbf{x}d\tau = \\
 & \quad = - \int_{\Gamma} \int_{\Gamma^{p(2)}} u_i^{(2)}(\mathbf{x}, \tau) F_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) d\mathbf{x}d\tau + \\
 & + \int_{\Gamma} \int_{\Gamma^*} p_i^*(\mathbf{x}, \tau) K_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) - u_i^*(\mathbf{x}, \tau) F_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) d\mathbf{x}d\tau, \quad \mathbf{y} \in \Gamma^{p(2)}, \\
 & \int_{\Gamma} \int_{\Gamma^{p(1)}} g_i^{(1)}(\mathbf{x}, \tau) K_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) d\mathbf{x}d\tau - \int_{\Gamma} \int_{\Gamma^{p(2)}} g_i^{(2)}(\mathbf{x}, \tau) K_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) d\mathbf{x}d\tau = \\
 & = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma^{p(1)}} u_i^{(1)}(\mathbf{x}, \tau) F_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) d\mathbf{x}d\tau - \int_{\Gamma} \int_{\Gamma^{p(2)}} u_i^{(2)}(\mathbf{x}, \tau) F_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) d\mathbf{x}d\tau + \\
 & \quad + \int_{\Gamma} \int_{\Gamma^*} p_i^*(\mathbf{x}, \tau) \left( K_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) + K_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) \right) d\mathbf{x}d\tau - \\
 & \quad - \int_{\Gamma} \int_{\Gamma^*} u_i^*(\mathbf{x}, \tau) \left( F_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) + F_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) \right) d\mathbf{x}d\tau, \quad \mathbf{y} \in \Gamma^*, \\
 & \int_{\Gamma} \int_{\Gamma^{p(1)}} g_i^{(1)}(\mathbf{x}, \tau) U_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) d\mathbf{x}d\tau - \int_{\Gamma} \int_{\Gamma^{p(2)}} g_i^{(2)}(\mathbf{x}, \tau) U_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) d\mathbf{x}d\tau = \\
 & = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma^{p(1)}} u_i^{(1)}(\mathbf{x}, \tau) W_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) d\mathbf{x}d\tau - \int_{\Gamma} \int_{\Gamma^{p(2)}} u_i^{(2)}(\mathbf{x}, \tau) W_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) d\mathbf{x}d\tau + \\
 & \quad + \int_{\Gamma} \int_{\Gamma^*} p_i^*(\mathbf{x}, \tau) \left( U_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) + U_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) \right) d\mathbf{x}d\tau - \\
 & \quad - \int_{\Gamma} \int_{\Gamma^*} u_i^*(\mathbf{x}, \tau) \left( W_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) + W_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) \right) d\mathbf{x}d\tau, \quad \mathbf{y} \in \Gamma^*. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Из решения этих граничных уравнений находятся неизвестные:  $u_i^{(1)}(\mathbf{x}, t)$ ,  $u_i^{(2)}(\mathbf{x}, t)$  – перемещения берегов трещины,  $u_i^*(\mathbf{x}, t)$ ,  $p_i^*(\mathbf{x}, t)$  – перемещения и усилия, возникающие на поверхности сцепления разнородных сред.

**4. Ядра интегральных уравнений.** Аналитического решения системы граничных интегральных уравнений (7) на сегодняшний день не существует.

Но и численное ее решение сопряжено с трудностями из-за больших потребностей ресурсов компьютера. Поэтому, не снижая значимости задачи, введем ограничения на тип поверхности раздела сред и на вид динамического нагружения.

Пусть поверхность раздела сред представляет собой плоскость. Декартову систему координат  $Ox_1x_2x_3$  расположим так, чтобы оси  $Ox_1$  и  $Ox_2$  находились в плоскости раздела полупространств.

Положим, что нагрузка, действующая на составное тело с трещиной, является гармонической с круговой частотой  $\omega = 2\pi/T$ .

Тогда физические параметры задачи представимы в виде:

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}, t) = \text{Re}\{\mathbf{p}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}\}, \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \text{Re}\{\mathbf{u}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}\},$$

где  $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  – комплексные амплитуды.

В этом случае ядра из (7) примут вид:  $U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$ ,  $W_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$ ,  $K_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$ ,  $F_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$ ; здесь и далее верхние индексы опущены. Получим выражения для указанных ядер.

Известно, что фундаментальное перемещение теории упругости в случае гармонического нагружения может быть представлено в виде [3]

$$U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = \frac{1}{4\pi\mu} \left( \psi\delta_{ij} - \chi \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right),$$

где

$$\psi = \frac{\exp(-l_2)}{r} \left( \frac{1}{l_2^2} + \frac{1}{l_2} + 1 \right) - \frac{\exp(-l_1)}{r} \frac{c_2^2}{c_1^2} \left( \frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_1} \right),$$

$$\chi = \frac{\exp(-l_2)}{r} \left( \frac{3}{l_2^2} + \frac{3}{l_2} + 1 \right) - \frac{\exp(-l_1)}{r} \frac{c_2^2}{c_1^2} \left( \frac{3}{l_1^2} + \frac{3}{l_1} + 1 \right),$$

в свою очередь  $l_1 = i\omega r/c_1$ ,  $l_2 = i\omega r/c_2$ ,  $c_1$  и  $c_2$  – скорости продольных и поперечных волн,  $r$  – расстояние между точками  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ .

Ядра  $W_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$ ,  $K_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$ ,  $F_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$  определяются следующими соотношениями:

$$W_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) = \lambda n_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_k} U_{kj}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) +$$

$$+ \mu n_k(\mathbf{x}) \left[ \frac{\partial}{\partial x_k} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) + \frac{\partial}{\partial x_i} U_{kj}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) \right],$$

$$K_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) = \lambda n_i(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_k} U_{kj}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) +$$

$$+ \mu n_k(\mathbf{y}) \left[ \frac{\partial}{\partial y_k} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) + \frac{\partial}{\partial y_i} U_{kj}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) \right],$$

$$F_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) = \lambda n_i(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_k} W_{kj}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) +$$

$$+\mu n_k(\mathbf{y}) \left[ \frac{\partial}{\partial y_k} W_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) + \frac{\partial}{\partial y_i} W_{kj}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) \right],$$

где  $n_i(\mathbf{x})$ ,  $n_i(\mathbf{y})$  – проекции вектора нормали.

Используя представления функций  $\psi$ ,  $\chi$  и их производных рядами Тейлора по степеням  $l_1$ ,  $l_2$  [8] получаем выражения для ядер системы интегральных уравнений:

$$U_{ii}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = \frac{1}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)r} \left[ (\lambda + 3\mu) + \frac{(\lambda + \mu)(y_i - x_i)^2}{r^2} \right] + \frac{1}{4\pi\mu r} \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n!(n+2)} \left[ l_1^n \frac{c_2^2}{c_1^2} + l_2^n (n+1) + \frac{(n-1)(y_i - x_i)^2}{r^2} \left( l_1^n \frac{c_2^2}{c_1^2} - l_2^n \right) \right],$$

$$U_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = U_{21}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = \frac{(\lambda + \mu)(y_1 - x_1)(y_2 - x_2)}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)r^3} + \frac{(y_1 - x_1)(y_2 - x_2)}{4\pi\mu r^3} \sum_1^\infty \frac{(-1)^n (n-1)}{n!(n+2)} \left( l_1^n \frac{c_2^2}{c_1^2} - l_2^n \right),$$

$$U_{33}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = \frac{(\lambda + 3\mu)}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)r} + \frac{1}{4\pi\mu r} \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n!(n+2)} \left[ l_1^n \frac{c_2^2}{c_1^2} + l_2^n (n+1) \right],$$

$$U_{13}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = U_{23}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = U_{31}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = U_{32}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = 0,$$

$$W_{i3}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = \frac{\mu(y_i - x_i)}{4\pi(\lambda + 2\mu)r^3} - \frac{(y_i - x_i)}{4\pi r^3} \sum_1^\infty \frac{(-1)^n (n-1)}{n!(n+2)} \left( l_1^n \frac{2c_2^2}{c_1^2} + l_2^n n \right),$$

$$W_{3j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = -\frac{\mu(y_j - x_j)}{4\pi(\lambda + 2\mu)r^3} - \frac{(y_j - x_j)}{4\pi\mu r^3} \times \sum_1^\infty \frac{(-1)^n (n-1)}{n!(n+2)} \left[ l_1^n (\lambda n + 2\lambda + 2\mu) \frac{c_2^2}{c_1^2} - l_2^n 2\mu \right],$$

$$W_{11}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = W_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = W_{21}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = W_{22}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = W_{33}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = 0,$$

$$K_{i3}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = -\frac{\mu(y_i - x_i)}{4\pi(\lambda + 2\mu)r^3} + \frac{(y_i - x_i)}{4\pi r^3} \sum_1^\infty \frac{(-1)^n (n-1)}{n!(n+2)} \left( l_1^n \frac{2c_2^2}{c_1^2} + l_2^n n \right),$$

$$K_{3j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = \frac{\mu(y_j - x_j)}{4\pi(\lambda + 2\mu)r^3} + \frac{(y_j - x_j)}{4\pi\mu r^3} \times$$

$$\times \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)}{n!(n+2)} \left[ l_1^n (\lambda n + 2\lambda + 2\mu) \frac{c_2^2}{c_1^2} - l_2^n 2\mu \right],$$

$$K_{11}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = K_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = K_{21}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = K_{22}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = K_{33}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = 0,$$

$$F_{ii}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = \frac{\mu^2}{2\pi(\lambda + 2\mu)r^3} + \frac{3\lambda\mu}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \frac{(y_i - x_i)^2}{r^5} -$$

$$- \frac{\mu}{2\pi r^3} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)}{n!(n+2)} \left( l_1^n \frac{2c_2^2}{c_1^2} + l_2^n n \right) -$$

$$- \frac{\mu}{4\pi} \frac{(y_i - x_i)^2}{r^5} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)(n-3)}{n!(n+2)} \left[ l_1^n \frac{4c_2^2}{c_1^2} + l_2^n (n-2) \right],$$

$$F_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = F_{21}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = \frac{3\lambda\mu}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \frac{(y_1 - x_1)(y_2 - x_2)}{r^5} -$$

$$- \frac{\mu}{4\pi} \frac{(y_1 - x_1)(y_2 - x_2)}{r^5} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)(n-3)}{n!(n+2)} \left[ l_1^n \frac{4c_2^2}{c_1^2} + l_2^n (n-2) \right],$$

$$F_{33}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = \frac{\mu(\lambda + \mu)}{2\pi(\lambda + 2\mu)r^3} -$$

$$- \frac{1}{4\pi\mu r^3} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)}{n!(n+2)} \left\{ l_1^n \left[ \lambda(\lambda n + 4\mu)(n+2) + 12\mu^2 \right] \frac{c_2^2}{c_1^2} + l_2^n 4\mu^2 (n-1) \right\},$$

$$F_{13}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = F_{23}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = F_{31}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = F_{32}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = 0.$$

Анализ полученных соотношений указывает на присутствие в них особенностей корневого типа:  $r^{-3}$ ,  $r^{-2}$ ,  $r^{-1}$ . Вследствие чего в системе (7) будут интегралы, которые необходимо понимать в смысле конечной части по Адамару [3, 9]. Подход и соотношения для вычисления таких интегралов представлены в [10].

**5. Метод граничных элементов.** Принимая во внимание, что действующая на составное тело нагрузка является гармонической, физические параметры задачи, то есть усилия  $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$  и перемещения  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  в системе граничных уравнений заменим их комплексными амплитудами  $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ , имея в виду что

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{p}_{Re}(\mathbf{x}) \cos(\omega t) + \mathbf{p}_{Im}(\mathbf{x}) \sin(\omega t),$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_{Re}(\mathbf{x}) \cos(\omega t) + \mathbf{u}_{Im}(\mathbf{x}) \sin(\omega t). \quad (8)$$

Выделив в уравнениях (7) действительные и мнимые части, получим систему интегральных уравнений относительно составляющих комплексных амплитуд перемещений и усилий при косинусах и синусах в разложениях (8).



Численное решение преобразованной таким образом системы уравнений (7) будем искать на основе прямого метода граничных элементов. Для этого аппроксимируем поверхности трещины и поверхность сцепления плоскими многоугольниками – граничными элементами:

$$\Gamma^1 = \bigcup_{l=1}^{N^{\Gamma^1}} \Gamma_l, \quad \Gamma^2 = \bigcup_{l=1}^{N^{\Gamma^2}} \Gamma_l, \quad \Gamma^* = \bigcup_{l=1}^{N^{\Gamma^*}} \Gamma_l, \quad \Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset, \quad i \neq j,$$

где  $N^{\Gamma^1}$ ,  $N^{\Gamma^2}$ ,  $N^{\Gamma^*}$  – количество граничных элементов на противоположных поверхностях трещины и на поверхности сцепления, соответственно.

Воспользуемся методом коллокаций с постоянной аппроксимацией параметров задачи на каждом граничном элементе. Тогда преобразованную систему уравнений (7) можно записать в матричной форме

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{Z},$$

здесь  $\mathbf{B}$  – вектор заданных нагрузок,  $\mathbf{Z}$  – вектор неизвестных действительных и мнимых составляющих комплексных амплитуд перемещений и усилий.

Матрицу  $\mathbf{A}$  запишем в блочном виде

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

в свою очередь

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} &= \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\Gamma^1}^1 & 0 \\ 0 & \mathbf{F}_{\Gamma^2}^2 \end{bmatrix}, & \mathbf{A}_{12} &= \begin{bmatrix} -\mathbf{F}_{\Gamma^*}^1 & -\mathbf{K}_{\Gamma^*}^1 \\ \mathbf{F}_{\Gamma^*}^2 & \mathbf{K}_{\Gamma^*}^2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_{21} &= \begin{bmatrix} -\mathbf{F}_{\Gamma^1}^1 & \mathbf{F}_{\Gamma^2}^2 \\ \mathbf{W}_{\Gamma^1}^1 & -\mathbf{W}_{\Gamma^2}^2 \end{bmatrix}, & \mathbf{A}_{22} &= \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\Gamma^*}^{12} & \mathbf{K}_{\Gamma^*}^{12} \\ -\mathbf{W}_{\Gamma^*}^{12} & -\mathbf{U}_{\Gamma^*}^{12} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (10)$$

Элементы матриц (10) представим следующим образом

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\Gamma^1}^1 &= \\ & \begin{bmatrix} -F11_{\text{Re},\Gamma^1}^1 & F11_{\text{Im},\Gamma^1}^1 & -F21_{\text{Re},\Gamma^1}^1 & F21_{\text{Im},\Gamma^1}^1 & 0 & 0 \\ -F11_{\text{Im},\Gamma^1}^1 & -F11_{\text{Re},\Gamma^1}^1 & -F21_{\text{Im},\Gamma^1}^1 & -F21_{\text{Re},\Gamma^1}^1 & 0 & 0 \\ -F12_{\text{Re},\Gamma^1}^1 & F12_{\text{Im},\Gamma^1}^1 & -F22_{\text{Re},\Gamma^1}^1 & F22_{\text{Im},\Gamma^1}^1 & 0 & 0 \\ -F12_{\text{Im},\Gamma^1}^1 & -F12_{\text{Re},\Gamma^1}^1 & -F22_{\text{Im},\Gamma^1}^1 & -F22_{\text{Re},\Gamma^1}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -F33_{\text{Re},\Gamma^1}^1 & F33_{\text{Im},\Gamma^1}^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -F33_{\text{Im},\Gamma^1}^1 & -F33_{\text{Re},\Gamma^1}^1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (11)$$

выражения для  $\mathbf{F}_{\Gamma^2}^2$ ,  $\mathbf{F}_{\Gamma^*}^1$ ,  $\mathbf{F}_{\Gamma^*}^2$ ,  $\mathbf{F}_{\Gamma^*}^{12}$ ,  $\mathbf{U}_{\Gamma^*}^{12}$  имеют аналогичную структуру и получаются заменой в (11) индексов и ядер;

$$\mathbf{W}_{\Gamma^1}^1 =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & W31_{\text{Re},\Gamma^1}^1 & -W31_{\text{Im},\Gamma^1}^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W31_{\text{Im},\Gamma^1}^1 & W31_{\text{Re},\Gamma^1}^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W32_{\text{Re},\Gamma^1}^1 & -W32_{\text{Im},\Gamma^1}^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W32_{\text{Im},\Gamma^1}^1 & W32_{\text{Re},\Gamma^1}^1 \\ W13_{\text{Re},\Gamma^1}^1 & -W13_{\text{Im},\Gamma^1}^1 & W23_{\text{Re},\Gamma^1}^1 & -W23_{\text{Im},\Gamma^1}^1 & 0 & 0 \\ W13_{\text{Im},\Gamma^1}^1 & W13_{\text{Re},\Gamma^1}^1 & W23_{\text{Im},\Gamma^1}^1 & W23_{\text{Re},\Gamma^1}^1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

выражения для  $\mathbf{W}_{\Gamma^2}^2$ ,  $\mathbf{K}_{\Gamma^*}^1$ ,  $\mathbf{K}_{\Gamma^*}^2$ ,  $\mathbf{W}_{\Gamma^*}^{12}$ ,  $\mathbf{K}_{\Gamma^*}^{12}$  имеют ту же структуру, что и (12), они получаются соответствующими заменами.

Анализ вида матрицы (9) с учетом (10) – (12) показывает, что она не содержит нулевых членов на главной диагонали, и, следовательно, система линейных алгебраических уравнений может быть решена прямым или итерационным методами.

**6. Примеры расчетов.** Расчетные исследования коэффициентов интенсивности напряжений выполнены для круговой трещины с радиусом  $R = 1$  в плоскости соединения следующих пар материалов: сталь-алюминий и бор-эпоксидная смола. Нагрузка, действующая на составное тело, подчинялась законам гармонических волн растяжения–сжатия и сдвига, которые распространялись перпендикулярно к плоскости сцепления сред. Интенсивность нагрузки менялась за счет увеличения (уменьшения) круговой частоты так, что приведенное волновое число  $k_2R = \omega/c_2R$  изменялось в интервале  $[0, 3]$  (здесь  $c_2$  – скорость поперечных волн в алюминии).

Верхняя и нижняя поверхности берегов трещины, поверхность сцепления материалов аппроксимированы плоскими граничными элементами, которые сгущались при приближении к фронту трещины. Размер элементов в направлении радиуса окружности, примыкающих непосредственно к фронту трещины с двух сторон, составлял  $r/R = 0,002$ . В пределах граничного элемента параметры задачи полагались неизменными.

Выбранные пары материалов характерны тем, что их биупругие постоянные ( $\beta = 0,0305$  для пары сталь-алюминий,  $\beta = 0,0682$  для пары бор-эпоксидная смола) находятся в интервале от 0,03 до 0,07, что вместе с  $r/R = 0,002$  обеспечивает условие корректности решения (2).

Характеристики используемых в расчетах материалов были следующими: алюминий –  $E = 70,3$  ГПа,  $\nu = 0,347$ ,  $\rho = 2700$  кг/м<sup>3</sup>; бор –  $E = 385$  ГПа,  $\nu = 0,21$ ,  $\rho = 2600$  кг/м<sup>3</sup>; сталь –  $E = 207$  ГПа,  $\nu = 0,288$ ,  $\rho = 7860$  кг/м<sup>3</sup>; эпоксидная смола –  $E = 4,6$  ГПа,  $\nu = 0,36$ ,  $\rho = 1380$  кг/м<sup>3</sup>.

В результате решения задачи для каждой пары материалов при изменении частоты нагружения в заданном интервале найдены параметры напряженно-деформированного состояния на берегах трещины и на сцепленных поверхностях материалов. Используя найденные компоненты усилий вблизи фронта круговой трещины в биматериалах при изменяющейся частоте нагружения, вычислены по соотношениям (1) величины коэффициентов интенсивности напряжений.

На рис. 1, 2 представлены распределения относительных коэффициентов интенсивности напряжений  $\tilde{K}_I = K_I/K_I^{stat}$  и  $\tilde{K}_{II} = K_{II}/K_{II}^{stat}$  в зависимости от параметра  $k_2R$  для пар: сталь-алюминий, бор-эпоксидная смола при воздействии волны растяжения-сжатия.

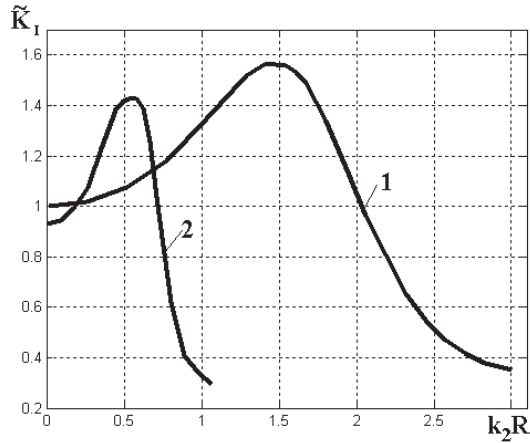


Рис. 1: КИН нормального отрыва в биматериалах (волна растяжения-сжатия): 1 – сталь-алюминий, 2 – бор-эпоксидная смола

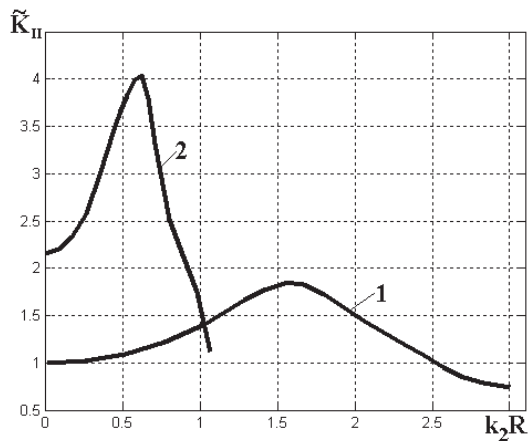


Рис. 2: КИН поперечного сдвига в биматериалах (волна растяжения-сжатия): 1 – сталь-алюминий, 2 – бор-эпоксидная смола

Здесь  $K_I^{stat}$ ,  $K_{II}^{stat}$  – КИН первой и второй моды при статическом нагружении растяжением для пары сталь-алюминий.

На рис. 3 – 5 приведены распределения относительных коэффициентов интенсивности напряжений  $\tilde{K}_I = K_I/K_I^{stat}$ ,  $\tilde{K}_{II} = K_{II}/K_{II}^{stat}$  и  $\tilde{K}_{III} = K_{III}/K_{III}^{stat}$  в зависимости от параметра  $k_2R$  для пар: сталь-алюминий, бор-

эпоксидная смола при действии волны сдвига.  $K_I^{stat}$ ,  $K_{II}^{stat}$ ,  $K_{III}^{stat}$  – КИН первой, второй и третьей моды при статическом нагружении сдвигом для пары сталь-алюминий.

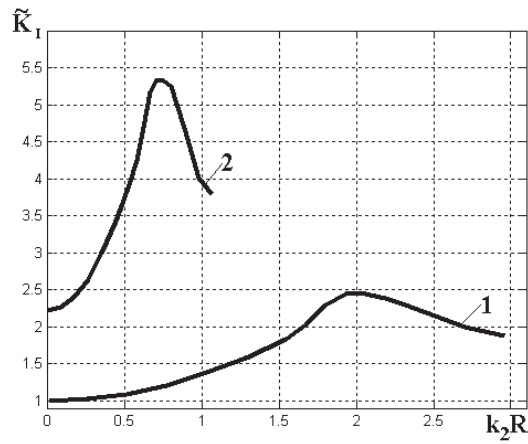


Рис. 3: КИН нормального отрыва в биматериалах (волна сдвига): 1 – сталь-алюминий, 2 – бор-эпоксидная смола

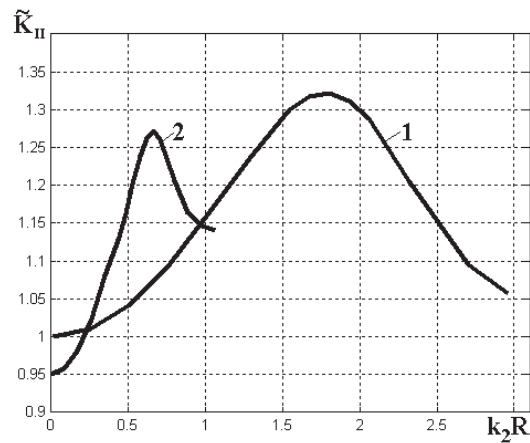


Рис. 4: КИН поперечного сдвига в биматериалах (волна сдвига): 1 – сталь-алюминий, 2 – бор-эпоксидная смола

Из представленных результатов расчетов видно, что положение точек максимумов в распределениях относительных коэффициентов интенсивности напряжений существенно зависят от механических характеристик сред, составляющих биматериал, и при большем параметре  $\beta$  (кривые 2 на рисунках) точки максимумов смещаются в сторону меньших частот нагружения. Динамическое нагружение в случае действия волны растяжения-сжатия в

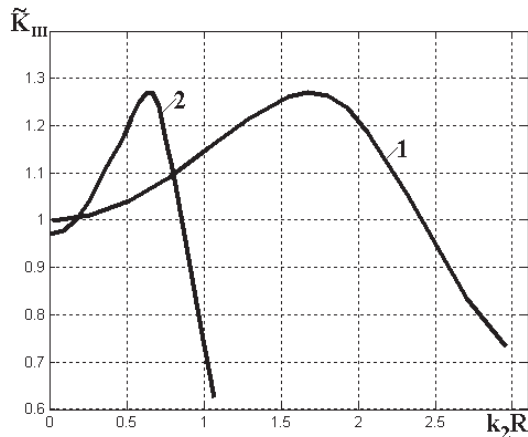


Рис. 5: КИН продольного сдвига в биматериалах (волна сдвига): 1 – сталь-алюминий, 2 – бор-эпоксидная смола

большой степени сказывается на величине КИН второй моды. Кроме того, влияние динамического нагружения на КИН второй моды растет с увеличением параметра  $\beta$  (рис. 1, 2). При действии волны сдвига, отмеченные тенденции присущи КИН первой моды (рис 3–5).

**7. Заключение.** Итак, получена система граничных интегральных уравнений для задачи о трещине на границе раздела упругих сред в композитном материале при динамической нагрузке. Для случая гармонического нагружения и при условии, что межматериальная поверхность является плоскостью, представлены выражения сингулярных ядер граничных интегральных уравнений. Система граничных интегральных уравнений сведена к системе линейных алгебраических уравнений на основе прямого метода граничных элементов. Выполнены расчетные исследования коэффициентов интенсивности напряжений для круговой межфазной трещины в парах сталь-алюминий и бор-эпоксидная смола при нагружении волнами растяжения-сжатия и сдвига с изменяющейся круговой частотой. Проанализированы распределения коэффициентов интенсивности напряжений в зависимости от частоты нагрузки и характеристик биматериалов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Rizzo F. J. An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics // Quart. Appl. Math. – 1967. – **25**, – P. 83–95
2. Cruse T. A. Application of the boundary-integral equation method to three dimensional stress analysis // Computers and Structures. – 1973. – **3**, – P. 509–

- 527.
3. Гузь А. Н., Зозуля В. В. Хрупкое разрушение материалов при динамических нагрузках: В 4 т./ Том 4. – Киев: Наукова думка, 1993. – 236 с.
  4. Гузь А. Н., Зозуля В. В., Меньшиков А. В. Контактное взаимодействие берегов эллиптической трещины под воздействием нормальной гармонической нагрузки // Сборник научных трудов «Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород» / Под ред. Д.Д. Ивлева и Н.Ф. Морозова. – М.: Физматлит, 2006. – С. 204–220.
  5. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
  6. Угодчиков А. Г., Хуторянский Н. М. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. – Казань: Из-во Казан. универ., 1986. – 296 с.
  7. Меньшиков В. А., Меньшиков А. В. Гранично-контактные интегральные уравнения динамической задачи теории упругости о трещине на поверхности раздела полупространств // Доклады НАН Украины. – 2006. – **6**. – С. 51–56.
  8. Меньшиков В. А. Сингулярные ядра интегральных уравнений в задаче о трещине на границе раздела полупространств при гармоническом нагружении // Доклады НАН Украины. – 2006. – **11**. – С. 58–62.
  9. Гандель Ю. В., Кононенко А. С. Обоснование численного решения одного гиперсингулярного интегрального уравнения // Дифференциальные уравнения. – 2006. – **42(9)**. – С. 1256–1262.
  10. Меньшиков В. А. Гиперсингулярные интегралы в трехмерных задачах для тел с трещинами // Доклады НАН Украины. – 1995. – **8**. – С. 61–64.