Вiсник Харкiвського нацiонального унiверситету iменi В.Н. Каразiна
Серiя "Математика, прикладна математика i механiка"
УДК 517 № 826, 2008, с.67–86

Асимптотика базисных функций обобщенного ряда Тейлора для класса $H_{\rho,2}$

В.А. Макаричев

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского (ХАИ), Украина

Доказано существование асимптотики базисных функций $\varphi_{n,0}$ и ψ_{n,α_n} обобщенного ряда Тейлора для функций класса $H_{\rho,2}$, и получен первый член асимптотических разложений этих функций.

2000 Mathematics Subject Classification 42A70.

Предварительные результаты

В [1] В.А. Рвачевым были построены ряды, которые он назвал обобщенными рядами Тейлора (ОРТ), для бесконечно дифференцируемых на отрезке $[-1,1]$ функций φ, таких, что $\|\varphi^{(n)}\|_{C_{[-1,1]}} \le c(\varphi)\rho^n 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$, где $n = 0,1,2,\ldots$, $1 \le \rho < 2$. Класс этих функций обозначен через H_ρ.

Пусть $N_n = \left\{-2^{n-1}, -2^{n-1}+1, \ldots, 2^{n-1}\right\}$ при $n \ne 0$, $N_0 = \{-1,0,1\}$;

$$x_{n,k} = \frac{k}{2^{n-1}} \text{ при } n \ne 0,\ k \in N_n;\ x_{0,k} = k,\ k \in N_0.$$

В [1] доказано, что если $f \in H_\rho$, то

$$f^{(l)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in N_n} f^{(n)}\left(x_{n,k}\right) \varphi_{n,k}^{(l)}(x),$$

где ряд в правой части сходится равномерно на $[-1,1]$ для каждого $l = 0,1,2,\ldots$, и базисные функции $\varphi_{n,k}(x)$ однозначно определяются из условий:

$$\varphi_{n,k} \in H_1,\ \varphi_{n,k}^{(m)}\left(x_{m,s}\right) = \delta_n^m \cdot \delta_s^k,$$
$$n = 0,1,2,\ldots, k \in N_n, m = 0,1,2,\ldots, s \in N_m,$$

где δ_n^m – символ Кронекера. Построение $\varphi_{n,k}(x)$ было проведено с использованием функции $up(x)$, которая является финитным решением функционально-дифференциального уравнения $y'(x) = 2 \cdot (y(2x+1) - y(2x-1))$.

В 1986 г. была поставлена задача ([10], задача 44, с. 59): исследовать поведение базисных функций обобщенного ряда Тейлора с большими номерами и найти удобные формулы для их вычисления.

Решению данной задачи посвящена статья Т.В. Рвачевой [6]. В работе был получен результат относительно функций $\varphi_{n,k}(x)$, имеющих следующую нормировку: $\varphi_{n,k}^{(m)}(x_{m,s}) = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}\delta_n^m\delta_s^k$. Для этого на отрезке $[-1,0]$ была определена функция:
$ab(x) = up(x) + \lambda up\left(x - \frac{1}{2}\right) + \lambda^2 up\left(x - 1 + \frac{1}{2^2}\right) + \ldots + \lambda^n up\left(x - 1 + \frac{1}{2^n}\right) + \ldots$,
где λ — наименьший по модулю корень функции $\Phi(z) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} up\left(-1 + \frac{1}{2^m}\right)z^m$. Четное продолжение функции $ab(x)$ на отрезок $[-1,1]$ обозначено через $ab_c(x)$, а нечетное — $ab_s(x)$. С точностью 10^{-6} было получено $\lambda = -3.228718$. Кроме того, с точностью 10^{-6} было найдено значение $d = Res_\lambda\left(\frac{1}{\Phi(z)}\right) = 6.614673$. Доказано, что функции $\frac{1}{c_{2n}}\varphi_{2n,0}(x)$ и $\frac{1}{c_{2n+1}}\varphi_{2n+1,0}(x)$ равномерно при $n\to\infty$ сходятся на отрезке $[-1,1]$ соответственно к функциям $ab_c(x)$ и $ab_s(x)$, где $c_k = -\frac{d}{\lambda^{k+1}}$. Было также установлено, что если $r = \frac{p}{2^m}$ — фиксированная двоично-рациональная точка, где p — нечетное, то функции $\frac{1}{c_{2n}}\varphi_{2n,k}(x)$, где $\frac{k}{2^{2n-1}} = r$, и $\frac{1}{c_{2n+1}}\varphi_{2n+1,k}(x)$, где $\frac{k}{2^{2n}} = r$, равномерно при $n\to\infty$ сходятся на отрезке $[-1,1]$ соответственно к функциям
$\Phi^c_{\frac{p}{2^m}}(x) = ab_c(x - \frac{p}{2^m}) - (ab_c(-1 - \frac{p}{2^m})\varphi_{0,-1}(x) + ab_c(-\frac{p}{2^m})\varphi_{0,0}(x) +$
$+ ab_c(1 - \frac{p}{2^m})\varphi_{0,1}(x)) - \sum\limits_{j=2}^{m+1}\frac{1}{2^{\frac{j(j-1)}{2}}}\sum\limits_{l=-2^{j-2}}^{2^{j-2}} ab_c\left(\frac{l}{2^{j-1}} - \frac{p}{2^m}\right)\varphi_{j-1,l}(x)$
и
$\Phi^s_{\frac{p}{2^m}}(x) = ab_s(x - \frac{p}{2^m}) - (ab_s(-1 - \frac{p}{2^m})\varphi_{0,-1}(x) + ab_s(-\frac{p}{2^m})\varphi_{0,0}(x) +$
$+ ab_s(1 - \frac{p}{2^m})\varphi_{0,1}(x)) - \sum\limits_{j=2}^{m+1}\frac{1}{2^{\frac{j(j-1)}{2}}}\sum\limits_{l=-2^{j-2}}^{2^{j-2}} ab_s\left(\frac{l}{2^{j-1}} - \frac{p}{2^m}\right)\varphi_{j-1,l}(x)$.

Рассмотрим класс функций $H_{\rho,2} = \left\{f \in C^{\infty}_{[-1,1]}:\ \left|f^{(n)}(x)\right| \le c(f)\rho^n 2^{n^2}\right\}$. Построение ОРТ для класса $H_{\rho,2}$ было проведено Г.А. Старцем [2, 3, 7].

Пусть

$$N_n = \{-2\cdot4^{n-1}, -2\cdot4^{n-1}+1, \ldots, 2\cdot4^{n-1}-1, 2\cdot4^{n-1}\} \text{ при } n\in N,\ N_0 = \{-1,0,1\};$$

$$x_{n,k} = \frac{k}{2\cdot4^{n-1}} \text{ при } k\in N_n \text{ и } n>0,\ x_{0,k} = k \text{ при } k\in N_0;$$

$$D_0 = \{1;3\}, D_1 = \{1,3,\ldots,15\}, \ldots, D_n = \{1,3,\ldots,4^{n+1}-1\};$$

$$x^*_{n,p} = -1 + \frac{p}{2\cdot4^n} \text{ при } p\in D_n.$$

Введем обозначение $\triangle_h^2(f(x)) = f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)$ – вторая разность с шагом h.

Согласно [2, 7], если $f \in H_{\rho,2}$ $(1 < \rho < 4)$, то

$$f^{(l)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k \in N_n} a_{n,k} \varphi_{n,k}^{(l)}(x) + \sum_{p \in D_n} b_{n,p} \psi_{n,p}^{(l)}(x) \right),$$

где $a_{n,k} = f^{(n)}(x_{n,k})$, $b_{n,p} = \triangle_h^2 \left(f^{(n)}(x_{n,p}^*) \right)$ – вторые разности в точках $x_{n,p}^*$ с шагом $h = \frac{1}{2 \cdot 4^n}$. При этом ряд в правой части сходится равномерно при каждом $l = 0, 1, 2, \ldots$. Функции $\varphi_{n,k}(x)$ и $\psi_{n,p}(x)$ однозначно определяются из условий:

$$\varphi_{n,k}(x) \in H_{1,2}, \ \psi_{n,p}(x) \in H_{1,2},$$

$$\varphi_{n,k}^{(l)}(x_{l,s}) = \delta_n^l \delta_k^s \tag{1}$$

$$\psi_{n,p}^{(l)}(x_{l,s}) = 0 \tag{2}$$

$$\triangle_h^2 \left(\varphi_{n,k}^{(l)}(x_{l,p}^*) \right) = 0 \tag{3}$$

$$\triangle_h^2 \left(\psi_{n,p}^{(l)}(x_{l,q}^*) \right) = \delta_n^l \delta_p^q \tag{4}$$

где вторые разности берутся с шагом $h = \frac{1}{2 \cdot 4^l}$.

ОРТ для неквазианалитических классов H_ρ, $H_{\rho,2}$ позволяют восстанавливать функции f по значениям $f^{(n)}(x), x \in \Lambda_n, n = 0, 1, 2, \ldots$ с достаточно простыми конечными множествами Λ_n. Отметим также, что с помощью ОРТ можно доказывать теоремы существования и единственности решений краевых задач нового типа для функционально-дифференциальных уравне-ний [1, 8, 9].

Целью данной статьи является изучение поведения при $n \to \infty$ базисных функций $\varphi_{n,0}(x)$ и $\psi_{n,\alpha_n}(x)$, где $\alpha_n = 2 \cdot 4^n - 1$. Наши доказательства аналогичны доказательствам из упомянутой выше работы Рвачёвой.

Для достижения поставленной цели будет использован следующий метод: устанавливается связь базисных функций $\varphi_{n,0}(x)$ и $\psi_{n,\alpha_n}(x)$ с некоторыми вспомогательными функциями, посредством изучения поведения которых при $n \to \infty$ будут исследованы функции $\varphi_{n,0}(x)$ и $\psi_{n,\alpha_n}(x)$.

Построение базисных функций $\varphi_{n,0}(x)$ и $\psi_{n,\alpha_n}(x)$ было проведено с использованием функции

$$mup_2(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{sin^2\left(\frac{2t}{4^k}\right)}{\frac{4t}{4^k} sin\left(\frac{t}{4^k}\right)} dt,$$

которая является финитным решением функционально-дифференциального уравнения

$$y'(x) = 2\left(y(4x+3) - y(4x-1) + y(4x+1) - y(4x-3)\right) \tag{5}$$

В [3] указаны следующие формулы:

$$\varphi_{0,0}(x) = mup_2(x),$$

$$\varphi_{n,0}(x) = \int\limits_{-1}^{x} \left(\frac{1}{4^{n-1}} \varphi_{n-1,0}(4t) + (-1)^n c_n mup_2(4t+1) - c_n mup_2(4t-1) \right) dt,$$

$$\psi_{0,1}(x) = -mup_2(x) + mup_2(x - \frac{1}{2}),$$

$$\psi_{n,\alpha_n}(x) = \int\limits_{-1}^{x} \left(\psi_{n-1,\alpha_{n-1}}(4t-3) + (-1)^n d_n mup_2(4t-3) \right) dt, n > 0,$$

где коэффициенты c_n, d_n определяются из условий $\varphi_{n,0}(0) = 0, \psi_{n,\alpha_n}(0) = 0$. Кроме того, в работе указана возможность представить функции $\varphi_{n,0}(x)$ и $\psi_{n,\alpha_n}(x)$ в виде линейной комбинации сдвигов функции $mup_2(x)$.

В дальнейшем нам понадобятся следующие свойства функции $mup_2(x)$:
1) $supp\ mup_2(x) = [-1, 1]$, при этом $mup_2(x)$ является четной [2];
2) $mup_2(x) \in C^{\infty}_{[-1,1]}$, $\|mup_2^{(k)}\|_{C_{[-1,1]}} = 2^{k^2}$ [2];
3) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} mup_2(x)dx = 1$, а также $mup_2(0) = 1$ [2];
4) функция $mup_2(x)$ на промежутке $[-1, 0]$ монотонно возрастает;
5) производная порядка l функции $mup_2(x)$ может быть найдена по формуле

$$mup_2^{(l)}(x) = 2^{l^2} \sum_{k=1}^{4^l} \delta_k^{(l)} mup_2 \left(4^l x + 4^l - 2k + 1 \right),$$

где $\delta_1^{(l)} = 1$, $\left| \delta_i^{(l)} \right| = 1$ при $i = 2, 3, \ldots, 4^l$ (для нас важно значение только $\delta_1^{(l)}$);
6) $mup_2(-1) = mup_2(1) = 0$, $mup_2^{(l)} \left(\frac{2s}{4^l} \right) = 0$, где $s \in \left\{ -\frac{4^l}{2}, -\frac{4^l}{2} + 1, \ldots, \frac{4^l}{2} \right\}$;
7) $\triangle_h^2 \left(mup_2^{(l)} \left(\frac{s}{2 \cdot 4^l} \right) \right) = 0$ с шагом $h = \frac{1}{2 \cdot 4^l}$, $s \in \left\{ -2 \cdot 4^l + 1, \ldots, 2 \cdot 4^l - 1 \right\}$, $s \neq 2k,\ k \in Z,\ l = 0, 1, 2, \ldots$;
8) значения функции $mup_2(x)$ в точках вида $-1 + \frac{1}{4^k}$ и $-1 + \frac{1}{2 \cdot 4^k}$ вычисляются по формулам: $mup_2 \left(-1 + \frac{1}{4^k} \right) = \frac{\nu_{k-1}}{2^{k^2}(k-1)!}$ и

$$mup_2 \left(-1 + \frac{1}{2 \cdot 4^k} \right) = \frac{1}{2^{(k+1)^2}} \sum_{s=0}^{k} \frac{\mu_s}{s!(k-s)!},$$

где $\nu_k = \int\limits_0^1 x^k mup_2(x)dx$, $\mu_s = \int\limits_{-1}^1 x^s mup_2(x)dx$;
9) величины $\nu_k = \int\limits_0^1 x^k mup_2(x)dx$, $\mu_s = \int\limits_{-1}^1 x^s mup_2(x)dx$ могут быть найдены

по следующим формулам: $\mu_0 = 1$, $\mu_{2n-1} = 0$,

$$\mu_{2n} = \frac{(2n)!}{4(4^{2n}-1)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1+3^{2k+1}}{(2n-2k)!(2k+1)!} \mu_{2n-2k},$$

$$\nu_{2n} = \frac{1}{2}\mu_{2n}, \ \nu_{2n-1} = \frac{1}{4^{2n+1}} \sum_{l=0}^{n} \frac{(2n)!(1+3^{2l})}{(2n-2l)!(2l)!} \mu_{2n-2l}.$$

Свойства 4)–9) взяты из диссертации Г.А. Старца [11]. Для полноты изложения приведем краткую форму доказательства этих свойств.

Докажем свойство 4). Пусть $p_1(x) = \begin{cases} 1, \ x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right] \\ \frac{1}{2}, \ x \in \left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right) \bigcup \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) \\ 0, \ |x| \geq \frac{3}{4} \end{cases}$ и $p_{s+1}(x) = 4p_s(4x)$, где $s = 1, 2, \ldots$. Рассмотрим последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_s, \ldots$, имеющих плотности $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_s(x), \ldots$. Далее, для каждого $k \in N$ положим $Y_k = \sum\limits_{i=1}^{k} X_i$. Характеристическая функция случайной величины Y_k имеет вид $\varphi_k(t) = \prod\limits_{j=1}^{k} \frac{sin^2\left(\frac{2t}{4^j}\right)}{\frac{4t}{4^j} sin\left(\frac{t}{4^j}\right)}$. Согласно теореме Леви (см., напр., [12], с. 114), функция $F(t) = \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k(t)$ является характеристической функцией случайной величины Y, к которой по распределению сходятся случайные величины Y_k при $k \longrightarrow \infty$. Поскольку $F(t)$ — преобразование Фурье функции $mup_2(x)$ (это получается путем применения преобразования Фурье к функционально-дифференциальному уравнению (20)), $mup_2(x)$ является плотностью распределения случайной величины Y. Поэтому $mup_2(x)$ неотрицательна. Исходя из уравнения (20) и того, что $supp\, mup_2(x) = [-1, 1]$, получаем $mup_2{}'(x) \geq 0$ при $x \in [-1, 0]$, а из этого следует, что на промежутке $[-1, 0]$ функция $mup_2(x)$ возрастает.

Свойства 5) и 6) получаются из уравнения (20) последовательным дифференцированием.

Докажем свойство 8). Для этого воспользуемся формулой Тейлора с остатком в интегральной форме. Так как $mup_2^{(l)}(-1) = 0$, имеем $mup_2\left(-1 + \frac{1}{2\cdot 4^k}\right) = \frac{1}{k!} \int\limits_{-1}^{-1+\frac{1}{2\cdot 4^k}} \left(-1 + \frac{1}{2\cdot 4^k} - t\right)^k \cdot mup_2^{(k+1)}(t)dt$. После проведения некоторых преобразований с использованием свойства 5) получим, что

$$mup_2\left(-1 + \frac{1}{2\cdot 4^k}\right) = \frac{1}{2^{(k+1)^2} k!} \int\limits_{-1}^{1} (x+1)^k mup_2(x) dx,$$

откуда следует, что

$$mup_2\left(-1 + \frac{1}{2\cdot 4^k}\right) = \frac{1}{2^{(k+1)^2}} \sum_{s=0}^{k} \frac{\mu_s}{s!(k-s)!}.$$

Аналогично получается равенство

$$mup_2\left(-1+\frac{1}{4^k}\right)=\frac{1}{2^{k^2}(k-1)!}\int\limits_0^1 x^{k-1}mup_2(x)dx.$$

Докажем свойство 9). Равенство $\mu_0=1$ следует из свойства 3). Так как функция $mup_2(x)$ является четной (свойство 1)), то $\mu_{2n-1}=0$.

Преобразование Фурье $F(t)=\prod\limits_{k=1}^{\infty}\frac{sin^2\left(\frac{2t}{4^k}\right)}{\frac{4t}{4^k}sin\left(\frac{t}{4^k}\right)}$ функции $mup_2(x)$ удовлетворяет равенству

$$F(t)=\frac{1}{t}\left(sin\left(\frac{3}{4}t\right)+sin\left(\frac{t}{4}\right)\right)\cdot F\left(\frac{t}{4}\right).$$

Разложим левую и правую части данного равенства в ряд Маклорена и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях t. Получаем

$$\frac{F^{(2n)}(0)}{(2n)!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(1+3^{2k+1})}{(2k+1)!4^{2n+1}(2n-2k)!}F^{(2n-2k)}(0)$$

для любого $n=0,1,2,\ldots$. В силу того, что $F^{(n)}(0)=i^n\int\limits_{-1}^{1}x^n mup_2(x)dx$ при $n=0,1,2,\ldots$, имеем $F^{(2n)}(0)=(-1)^n\mu_{2n}$. Следовательно,

$$\mu_{2n}=\frac{(2n)!}{4(4^{2n}-1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1+3^{2k+1}}{(2n-2k)!(2k+1)!}\mu_{2n-2k}.$$

Так как функция $mup_2(x)$ является четной, имеем $\nu_{2n}=\frac{1}{2}\mu_{2n}$.

Формула $\nu_{2n-1}=\frac{1}{4^{2n+1}}\sum\limits_{l=0}^{n}\frac{(2n)!(1+3^{2l})}{(2n-2l)!(2l)!}\mu_{2n-2l}$ получается интегрированием по частям.

Докажем теперь свойство 7). Согласно свойству 8)

$$mup_2\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}mup_2(x)dx.$$

В силу свойств 1) и 3)

$$mup_2\left(-\frac{1}{2}\right)=mup_2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2},$$

откуда следует $\triangle_{\frac{1}{2}}\left(mup_2(-\frac{1}{2})\right)=\triangle_{\frac{1}{2}}\left(mup_2(-\frac{1}{2})\right)=0$.

Пусть $l>0$. Тогда вторая разность с шагом $h=\frac{1}{2\cdot 4^l}$ с учетом свойства 5) представляется в виде $\triangle_h^2\left(mup_2^{(l)}\left(\frac{s}{2\cdot 4^l}\right)\right)=2^{l^2}\sum\limits_{k=1}^{4^l}\delta_k^{(l)}\triangle_{\frac{1}{2}}^2 mup_2\left(\frac{s+2\cdot 4^l-4k+2}{2}\right)$, где каждое слагаемое является второй разностью с шагом $\frac{1}{2}$. В силу свойства 1) величина $\triangle_h^2\left(mup_2^{(l)}\left(\frac{s}{2\cdot 4^l}\right)\right)$ является линейной комбинацией $\triangle_{\frac{1}{2}}^2\left(mup_2\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ и $\triangle_{\frac{1}{2}}^2\left(mup_2\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$, которые в свою очередь равны нулю. Таким образом, свойство 7) доказано.

Получение асимптотики для $\varphi_{n,0}$

Введем в рассмотрение следующие функции: для $x \in [-1,0]$

$$\tilde{\varphi}_0(x) = mup_2(x)$$

и

$$\tilde{\varphi}_n(x) = mup_2\left(x - 1 + \frac{1}{4^n}\right) + \sum_{s=0}^{n-1} x_{n-s-1} mup_2\left(x - 1 + \frac{1}{2\cdot 4^s}\right),$$

$n = 1,2,\ldots$, где коэффициенты x_i удовлетворяют бесконечной треугольной системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} mup_2\left(-1+\frac{1}{4}\right) + x_0 mup_2\left(-1+\frac{1}{2}\right) = 0, \\ mup_2\left(-1+\frac{1}{4^2}\right) + x_1 mup_2\left(-1+\frac{1}{2}\right) + x_0 mup_2\left(-1+\frac{1}{2\cdot 4}\right) = 0, \\ \ldots \\ mup_2\left(-1+\frac{1}{4^n}\right) + x_{n-1} mup_2\left(-1+\frac{1}{2}\right) + x_{n-2} mup_2\left(-1+\frac{1}{2\cdot 4}\right) + \\ \;+\ldots + x_0 mup_2\left(-1+\frac{1}{2\cdot 4^{n-1}}\right) = 0, \\ \ldots \end{cases} \tag{6}$$

Так как $mup_2\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, то указанная система имеет единственное решение.

На промежуток $[0,1]$ функции $\tilde{\varphi}_n$ с четными номерами n продолжим четным образом, с нечетными номерами — нечетным образом. Это необходимо для того, чтобы данные функции были бесконечно дифференци-руемыми на $[-1,1]$.

Установим связь между функциями $\varphi_{n,0}(x)$ и $\tilde{\varphi}_n(x)$. Для этого нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Для любых $l \in \{0,1,2,\ldots\}$, $s \in \{k \in N_l : \ k \le 0\}$ и $n \in N$ имеют место равенства*

$$mup_2^{(l)}\left(x_{l,s} - 1 + \frac{1}{4^n}\right) = \begin{cases} 2^{l^2} mup_2(-1+\frac{1}{4^{n-l}}), \textit{если} \ \ l \le n \ \textit{и} \ \ s = 0, \\ 0, \textit{во всех других случаях.} \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $l = 0$. В этом случае $s \in \{-1;0\}$. Для $s = 0$ указанное в лемме равенство выполняется. Если $s = -1$, то в силу свойства 1) функции $mup_2(x)$ верно $mup_2(-2+\frac{1}{4^n}) = 0$ для любого $n \in N$.

Пусть $l > 0$. Напомним, что в этом случае $x_{l,s} = \frac{s}{2\cdot 4^{l-1}}$.

Свойство 5) функции $mup_2(x)$ дает

$$mup_2^{(l)}\left(x_{l,s}-1+\frac{1}{4^n}\right)=2^{l^2}\sum_{k=1}^{4^l}\delta_k^{(l)}mup_2\left(2s+\frac{1}{4^{n-l}}-2k+1\right).$$

Если $k>1$, то при любых $s\in\{-2\cdot 4^{l-1},-2\cdot 4^{l-1}+1,\ldots,0\}$ и $n\in N$ точка $2s+\frac{1}{4^{n-l}}-2k+1$ лежит вне интервала $(-1,1)$. Поэтому в силу свойства 1) функции $mup_2(x)$ имеет место

$$mup_2^{(l)}\left(x_{l,s}-1+\frac{1}{4^n}\right)=2^{l^2}mup_2\left(2s+\frac{1}{4^{n-l}}-1\right).$$

Так как точка $2s+\frac{1}{4^{n-l}}-1$ принадлежит интервалу $(-1,1)$ только в том случае, когда $s=0$ и $l\le n$, то верны равенства

$mup_2^{(l)}\left(x_{l,s}-1+\frac{1}{4^n}\right)=\begin{cases}2^{l^2}mup_2(-1+\frac{1}{4^{n-l}}), \text{если } \ l\le n \text{ и } \ s=0,\\ 0, \text{во всех остальных случаях.}\end{cases}$

Итак, лемма 1 доказана.

Аналогично можно доказать следующее утверждение.

Лемма 2. *Для любых* $l\in\{0,1,2,\ldots\}$, $s\in\{k\in N_l:\ k\le 0\}$ *и* $j\in N$ *имеют место равенства*

$$mup_2^{(l)}\left(x_{l,s}-1+\frac{1}{2\cdot 4^j}\right)=\begin{cases}2^{l^2}mup_2(-1+\frac{1}{2\cdot 4^{j-l}}), \textit{если } \ l\le j \textit{ и } \ s=0,\\ 0, \textit{во всех других случаях.}\end{cases}$$

Лемма 3. *Для любых* $n\in\{0,1,2,\ldots\}$, $l\in\{0,1,2,\ldots\}$ *и* $s\in N_l$ *верно*

$$\tilde{\varphi}_n^{(l)}\left(x_{l,s}\right)=2^{n^2}\delta_n^l\delta_0^s.$$

Доказательство. Так как $\tilde{\varphi}_0(x)=mup_2(x)$, то в силу свойств 3) и 6) функции $mup_2(x)$ выполняется $\tilde{\varphi}_0^{(l)}\left(x_{l,s}\right)=2^{n^2}\delta_0^l\delta_0^s$ для любых $l\in\{0,1,2,\ldots\}$ и $s\in N_l$.

Рассмотрим любое $n\in N$.

Если $l=n$ и $x_{l,s}=0$, то в силу лемм 1 и 2 получаем

$$\tilde{\varphi}_n^{(l)}(0)=2^{l^2}mup_2(0)=2^{n^2}.$$

Если $l<n$ и $x_{l,s}=0$, то следствием лемм 1 и 2 является

$$\tilde{\varphi}_n^{(l)}(0)=2^{l^2}\left(mup_2\left(-1+\frac{1}{4^{n-l}}\right)+\sum_{j=l}^{n-1}x_{n-j-1}mup_2\left(-1+\frac{1}{2\cdot 4^{j-l}}\right)\right).$$

Значит, в силу (21) получаем $\tilde{\varphi}_n^{(l)}(0)=0$.

Во всех остальных случаях из лемм 1 и 2 следует $\tilde{\varphi}_n^{(l)}\left(x_{l,s}\right)=0$.

Итак, лемма доказана.

Лемма 4. *Для любых* $n \in N$, $l \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ *и* $p \in D_l$ *имеют место равенства*

$$\triangle_h^2 \left(mup_2^{(l)} \left(x^*_{l,p} - 1 + \frac{1}{4^n} \right) \right) = \begin{cases} 2^{l^2} mup_2 \left(-1 + \frac{1}{4^{n-l}} \right), \ l < n \ \text{и} \ p = 2 \cdot 4^l \pm 1, \\ 0, \ \text{во всех остальных случаях}, \end{cases}$$

где вторые разности берутся с шагом $h = \frac{1}{2 \cdot 4^l}$.

Доказательство. Рассмотрим любое $n \in N$.

Далее будем рассматривать $x^*_{l,p} \leq 0$ (напомним, что $x^*_{l,p} = -1 + \frac{p}{2 \cdot 4^l}$). В этом случае $p \leq 2 \cdot 4^l$, а так как $p \neq 0 (mod\ 2)$, имеем $p \leq 2 \cdot 4^l - 1$.

Возможны 6 случаев:

$l > n$ и $p \geq 1 + 2 \cdot 4^l - 2 \cdot 4^{l-n}$;
$l > n$ и $p < 1 + 2 \cdot 4^l - 2 \cdot 4^{l-n}$;
$l = n$ и $p = 2 \cdot 4^n - 1$;
$l = n$ и $p < 2 \cdot 4^n - 1$;
$l < n$ и $p = 2 \cdot 4^l - 1$;
$l < n$ и $p < 2 \cdot 4^l - 1$.

Рассмотрим каждый из этих случаев.

а) $l > n$ и $p \geq 1 + 2 \cdot 4^l - 2 \cdot 4^{l-n}$. В этом случае

$$x^*_{l,p} - 1 + \frac{1}{4^n} = \frac{p - 2 \cdot 4^l + 2 \cdot 4^{l-n} - 2 \cdot 4^l}{2 \cdot 4^l}.$$

Далее, $0 \geq p - 4^{l+1} + 2 \cdot 4^{l-n} \geq 1 + 2 \cdot 4^l - 2 \cdot 4^{l-n} - 4^{l+1} + 2 \cdot 4^{l-n} = -2 \cdot 4^l + 1$. Поэтому согласно свойству 7) функции $mup_2(x)$ имеем $\triangle_h^2 \left(mup_2^{(l)} \left(x^*_{l,p} - 1 + \frac{1}{4^n} \right) \right) = 0$.

б) $l > n$ и $p < 1 + 2 \cdot 4^l - 2 \cdot 4^{l-n}$. Тогда $p \leq 2 \cdot 4^l - 2 \cdot 4^{l-n}$, а так как $p \neq 0 (mod\ 2)$, получим $p \leq 2 \cdot 4^l - 2 \cdot 4^{l-n} - 1$, поэтому

$\triangle_h^2 \left(mup_2^{(l)} \left(x^*_{l,p} - 1 + \frac{1}{4^n} \right) \right) = mup_2^{(l)} \left(x^*_{l,p} - 1 + \frac{1}{4^n} + h \right) -$
$- 2 \cdot mup_2^{(l)} \left(x^*_{l,p} - 1 + \frac{1}{4^n} \right) + mup_2^{(l)} \left(x^*_{l,p} - 1 + \frac{1}{4^n} - h \right)$.

Далее, $x^*_{l,p} - 1 + \frac{1}{4^n} - h < x^*_{l,p} - 1 + \frac{1}{4^n} < x^*_{l,p} - 1 + \frac{1}{4^n} + h = \frac{p - 2 \cdot 4^l + 1}{2 \cdot 4^l} - 1 + \frac{1}{4^n} =$
$= \frac{1 + p - 2 \cdot 4^l - 2 \cdot 4^l + 2 \cdot 4^{l-n}}{2 \cdot 4^l} \leq \frac{1 + 2 \cdot 4^l - 2 \cdot 4^{l-n} - 1 - 2 \cdot 4^l - 2 \cdot 4^l + 2 \cdot 4^{l-n}}{2 \cdot 4^l} = -1$. Поэтому в силу свойств 1), 5) и 6) функции $mup_2(x)$ выполняется

$\triangle_h^2 \left(mup_2^{(l)} \left(x^*_{l,p} - 1 + \frac{1}{4^n} \right) \right) = 0$.

в) $l = n$ и $p = 2 \cdot 4^n - 1$. Тогда $mup_2^{(n)} \left(x^*_{l,p} - 1 + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{2 \cdot 4^n} \right) =$
$= mup_2^{(n)} \left(\frac{2 \cdot 4^n - 1 - 2 \cdot 4^n}{2 \cdot 4^n} - 1 + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{2 \cdot 4^n} \right) = mup_2^{(n)} \left(-1 + \frac{1}{4^n} \right) =$
$= 2^{n^2} \sum\limits_{k=1}^{4^n} \delta_k^{(n)} mup_2 \left(4^n \left(-1 + \frac{1}{4^n} \right) + 4^n - 2k + 1 \right) = 2^{n^2} \sum\limits_{k=1}^{4^n} \delta_k^{(n)} mup_2 (2 - 2k)$.

В силу свойства 1) функции $mup_2(x)$ имеем

$$mup_2(2 - 2k) = \begin{cases} 1, \ k = 1, \\ 0, \ k > 1. \end{cases}$$

Следовательно, в силу свойства 3) имеем $mup_2^{(n)}\left(x^*_{l,p}-1+\frac{1}{4^n}+h\right)=2^{n^2}$.

Далее, $mup_2^{(n)}\left(x^*_{l,p}-1+\frac{1}{4^n}\right)=mup_2^{(n)}\left(-1+\frac{1}{2\cdot 4^n}\right)=$

$=2^{n^2}\sum\limits_{k=1}^{4^n}\delta_k^{(n)}mup_2\left(4^n\left(-1+\frac{1}{2\cdot 4^n}\right)+4^n-2k+1\right)=$

$=2^{n^2}\sum\limits_{k=1}^{4^n}\delta_k^{(n)}mup_2\left(\frac{1}{2}-2k+1\right)$. В силу свойства 1) функции $mup_2(x)$

$$mup_2\left(-2k+1+\frac{1}{2}\right)=\begin{cases}mup_2\left(-\frac{1}{2}\right),\ k=1\\ 0,\ k>1.\end{cases}$$

Из свойств 3) и 8) следует, что $mup_2\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}mup_2(x)dx=\frac{1}{2}$. Поэтому $mup_2^{(n)}\left(x^*_{l,p}-1+\frac{1}{4^n}\right)=\frac{1}{2}\cdot 2^{n^2}$.

$x^*_{l,p}-1+\frac{1}{4^n}-h=\frac{2\cdot 4^n-1-2\cdot 4^n}{2\cdot 4^n}-1+\frac{1}{4^n}-\frac{1}{2\cdot 4^n}=-1$. Согласно свойству 6) $mup_2^{(n)}\left(x^*_{l,p}-1+\frac{1}{4^n}-h\right)=0$.

Таким образом, $\triangle_h^2\left(mup_2^{(n)}\left(x^*_{n,p}-1+\frac{1}{4^n}\right)\right)=2^{n^2}\cdot\left(1-2\cdot\frac{1}{2}\right)=0$.

г) $l=n$ и $p<2\cdot 4^n-1$. В этом случае равенство $\triangle_h^2\left(mup_2^{(n)}\left(x^*_{n,p}-1+\frac{1}{4^n}\right)\right)=0$ доказывается так же, как и в случае б).

д) $l<n$ и $p=2\cdot 4^l-1$. Тогда $mup_2^{(l)}\left(x^*_{l,p}-1+\frac{1}{4^n}+h\right)=$

$=mup_2^{(l)}\left(-1+\frac{1}{4^n}\right)=2^{l^2}\sum\limits_{k=1}^{4^l}\delta_k^{(l)}mup_2\left(4^l\left(-1+\frac{1}{4^n}\right)+4^l-2k+1\right)=$

$=2^{l^2}\sum\limits_{k=1}^{4^l}\delta_k^{(l)}mup_2\left(-2k+1+\frac{1}{4^{n-l}}\right)$.

В силу свойства 1) функции $mup_2(x)$ имеем:

$$mup_2\left(\frac{1}{4^{n-l}}-2k+1\right)=\begin{cases}mup_2\left(-1+\frac{1}{4^{n-l}}\right),\ k=1,\\ 0,\ k>1.\end{cases}$$

Значит, $mup_2^{(l)}\left(x^*_{l,p}-1+\frac{1}{4^n}+h\right)=2^{l^2}mup_2\left(-1+\frac{1}{4^{n-l}}\right)$.

$x^*_{l,p}-1+\frac{1}{4^n}-h<x^*_{l,p}-1+\frac{1}{4^n}=\frac{2\cdot 4^l-1-2\cdot 4^l}{2\cdot 4^l}-1+\frac{1}{4^n}=-1+\frac{1}{4^n}-\frac{1}{2\cdot 4^l}\le -1$.

Поэтому $\triangle_h^2\left(mup_2^{(l)}\left(x^*_{l,p}-1+\frac{1}{4^n}\right)\right)=2^{l^2}mup_2\left(-1+\frac{1}{4^{n-l}}\right)$.

е) $l<n$ и $p<2\cdot 4^l-1$. В этом случае равенство $\triangle_h^2\left(mup_2^{(n)}\left(x^*_{n,p}-1+\frac{1}{4^n}\right)\right)=0$ доказывается так же, как и в случае б).

Таким образом, при $x^*_{l,p}\le 0$ верно

$$\triangle_h^2\left(mup_2^{(l)}\left(x^*_{l,p}-1+\frac{1}{4^n}\right)\right)=\begin{cases}2^{l^2}mup_2\left(-1+\frac{1}{4^{n-l}}\right),\ l<n \text{ и } p=2\cdot 4^l-1,\\ 0,\ \text{во всех остальных случаях,}\end{cases}$$

Применяя аналогичные рассуждения, можно доказать, что при $x^*_{l,p} \geq 0$ имеет место

$$\triangle^2_h \left(mup_2^{(l)} \left(x^*_{l,p} - 1 + \frac{1}{4^n} \right) \right) = \begin{cases} 2^{l^2} mup_2 \left(-1 + \frac{1}{4^{n-l}} \right), \ l < n \text{ и } p = 2 \cdot 4^l + 1, \\ 0, \text{ во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Итак, лемма доказана.

Аналогично можно доказать следующее утверждение:

Лемма 5. *Для любых $s \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, $l \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ и $p \in D_l$ имеет место*

$$\triangle^2_h \left(mup_2^{(l)} \left(x^*_{l,p} - 1 + \frac{1}{2 \cdot 4^s} \right) \right) = \begin{cases} 2^{l^2} mup_2 \left(-1 + \frac{1}{2 \cdot 4^{s-l}} \right), \ l \leq n, p = 2 \cdot 4^l \pm 1, \\ 0, \ \textit{во всех остальных случаях}, \end{cases}$$

где вторые разности берутся с шагом $h = \frac{1}{2 \cdot 4^l}$.

Лемма 6. *Для любых $s \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, $l \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ и $p \in D_l$ верно* $\triangle^2_h \left(\tilde{\varphi}_n^{(l)} \left(x^*_{l,p} \right) \right) = 0$.

Доказательство. Так как $\tilde{\varphi}_0(x) = mup_2(x)$, то в силу свойств 3) и 7) функции $mup_2(x)$ выполняется $\triangle^2_h \left(\tilde{\varphi}_0^{(l)} \left(x^*_{l,p} \right) \right) = 0$.

Рассмотрим любое $n \in N$. Пусть $x^*_{l,p} \leq 0$, то есть $p \leq 2 \cdot 4^l$, а так как $p \neq 0 (mod\ 2)$, имеем $p \leq 2 \cdot 4^l - 1$. Тогда $x^*_{l,p} + h = -1 + \frac{p}{2 \cdot 4^l} + \frac{1}{2 \cdot 4^l} \leq 0$. Значит, $\triangle^2_h \left(\tilde{\varphi}_n^{(l)} \left(x^*_{l,p} \right) \right) =$
$= \triangle^2_h \left(mup_2^{(l)} \left(x^*_{l,p} - 1 + \frac{1}{4^n} \right) \right) + \sum\limits_{s=0}^{n-1} x_{n-s-1} \triangle^2_h \left(mup_2^{(l)} \left(x^*_{l,p} - 1 + \frac{1}{2 \cdot 4^s} \right) \right)$. Из лемм 4 и 5 следует

$$\triangle^2_h \left(\tilde{\varphi}_n^{(l)} \left(x^*_{l,p} \right) \right) = \begin{cases} 2^{l^2} \left(mup_2 \left(-1 + \frac{1}{4^{n-l}} \right) + \sum\limits_{s=l}^{n-1} x_{n-s-1} mup_2 \left(-1 + \frac{1}{2 \cdot 4^{s-l}} \right) \right), \\ \qquad \text{если } l < n \text{ и } p = 2 \cdot 4^l - 1; \\ 0, \text{ во всех других случаях.} \end{cases}$$

Используя систему уравнений (21), получаем следующее: если $l < n$ и $p = 2 \cdot 4^l - 1$, то $\triangle^2_h \left(\tilde{\varphi}_n^{(l)} \left(x^*_{l,p} \right) \right) = 0$. Значит, $\triangle^2_h \left(\tilde{\varphi}_n^{(l)} \left(x^*_{l,p} \right) \right) = 0$ при $x^*_{l,p} \leq 0$.

Аналогичным образом можно показать, что $\triangle^2_h \left(\tilde{\varphi}_n^{(l)} \left(x^*_{l,p} \right) \right) = 0$ при $x^*_{l,p} \geq 0$.

Итак, лемма доказана.

Теперь сформулируем теорему, которая устанавливает связь между $\varphi_{n,0}(x)$ и $\tilde{\varphi}_n(x)$.

Теорема 1. *Для любого $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ имеет место*

$$\tilde{\varphi}_n(x) \equiv 2^{n^2} \varphi_{n,0}(x).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Из свойства 2) функции $mup_2(x)$ следует, что $\tilde{\varphi}_n \in H_{1,2}$.

Кроме того, леммы 3 и 6 дают следующее:

а) $\tilde{\varphi}_n^{(l)}(x_{l,s}) = 2^{n^2}\delta_n^l\delta_0^s$,

б) $\triangle_h^2\left(\tilde{\varphi}_n^{(l)}\left(x_{l,p}^*\right)\right) = 0$.

Согласно теореме 2 из [2] справедливо $\tilde{\varphi}_n(x) \equiv 2^{n^2}\varphi_{n,0}(x)$.

Итак, теорема доказана.

Теперь, когда связь между $\tilde{\varphi}_n(x)$ и $\varphi_{n,0}(x)$ установлена, исследуем поведение функций $\tilde{\varphi}_n(x)$ при $n \to \infty$. Для этого мы будем использовать систему уравнений (21).

Положим $\zeta_k = mup_2\left(-1 + \frac{1}{2\cdot 4^k}\right)$ и $\eta_s = mup_2\left(-1 + \frac{1}{4^{s+1}}\right)$. В этих обозначениях система (21) принимает вид:

$$\begin{cases} \eta_0 + x_0\zeta_0 = 0, \\ \eta_1 + x_1\zeta_0 + x_0\zeta_1 = 0, \\ \dots \\ \eta_{n-1} + x_{n-1}\zeta_0 + x_{n-2}\zeta_1 + \dots + x_0\zeta_{n-1} = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Рассмотрим функции $\Lambda(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \eta_k z^k$ и $\Phi(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \zeta_k z^k$.

Пусть $V(z) = -\frac{\Lambda(z)}{\Phi(z)}$. Разложим функцию $V(z)$ в ряд Маклорена:

$$V(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^k.$$

Тогда из равенства $\Lambda(z) + \Phi(z)V(z) = 0$ следует, что коэффициенты x_k разложения $V(z)$ будут удовлетворять системе (22).

Из свойств 8) и 9) функции $mup_2(x)$ следует, что коэффициенты η_k и ζ_k функций $\Lambda(z)$ и $\Phi(z)$ можно вычислять точно. Вместе с наличием удобных оценок для этих коэффициентов это позволяет вычислять первые корни функции $\Phi(z)$ с произвольной точностью. Если обозначить через $z_1, z_2, \dots$ корни $\Phi(z)$, расположенные в порядке возростания модулей, то вычисления с точностью 10^{-6} дают $\lambda = z_1 = -9,617232$, $z_2 = -58,870525$ и $z_3 = -311,828551$. Кроме того, с точностью 10^{-6} получаем $\Lambda(\lambda) = 0,160084$. Значит, функция $V(z)$ в круге $|z| \le 58$ имеет единственный полюс λ (первого порядка). Для нас важна величина $d = Res_\lambda V(z) = -\frac{\Lambda(\lambda)}{\Phi'(\lambda)}$. С точностью 10^{-6} имеем $d = -3,827878$.

Мы получили, что функция $\mu(z) = V(z) - \frac{d}{z-\lambda}$ является аналитической для $|z| \le 58$:

$$\mu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^k, \text{ где } |u_k| \le \frac{M}{58^k},\ M = max_{|z|=58}|\mu(z)|.$$

С точностью 10^{-6} получаем $M = 3,59482$.

С другой стороны, в круге $|z| < |\lambda|$

$$\frac{d}{z-\lambda} = -\frac{d}{\lambda} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{\lambda}} = -\frac{d}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\lambda}\right)^k.$$

Значит, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k z^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{d}{\lambda^{k+1}} + u_k\right) z^k$, $|z| < |\lambda|$, то есть асимптотика для x_k имеет вид:

$$x_k = -\frac{d}{\lambda^{k+1}} + u_k, \ |u_k| \le \frac{M}{58^k} \tag{8}$$

Для того, чтобы описать поведение функций $\tilde{\varphi}_n(x)$ при $n \longrightarrow \infty$, нам понадобится функция $ab_2(x)$. На сегменте $[-1, 0]$ функцию $ab_2(x)$ определим формулой

$$ab_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k mup_2 \left(x - 1 + \frac{1}{2 \cdot 4^k}\right).$$

Далее, пусть $ab_{2,c}(x)$ — это функция $ab_2(x)$, четно продленная на $[-1, 1]$, а $ab_{2,s}(x)$ — $ab_2(x)$, продленная на $[-1, 1]$ нечетно.

Кроме того, мы будем использовать функцию

$$h_n(x) = \tilde{\varphi}_n(x) - mup_2 \left(x - 1 + \frac{1}{4^n}\right),$$

которая определена на отрезке $[-1, 0]$. В силу определения функции $\tilde{\varphi}_n(x)$ справедливо

$$h_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x_{k-1} mup_2 \left(x - 1 + \frac{1}{2 \cdot 4^{n-k}}\right).$$

Лемма 7. *Для любых* $x \in \left[-1, -\frac{1}{2 \cdot 4^n}\right]$ *и* $n \in N$

$$\left|ab_2(x) - \frac{1}{c_n} h_n(x)\right| \le C \cdot \frac{n \cdot |\lambda|^n}{32^n}, \ \text{где } c_n = -\frac{d}{\lambda^{n+1}}.$$

Доказательство. Пусть $x \in \left[-1, -\frac{1}{2 \cdot 4^n}\right]$.

Из свойства 1) функции $mup_2(x)$ следует, что

$$ab_2(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k mup_2 \left(x - 1 + \frac{1}{2 \cdot 4^k}\right).$$

$\left|ab_2(x) - \frac{1}{c_n} h_n(x)\right| =$

$= \left|\sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda^k mup_2 \left(x - 1 + \frac{1}{2 \cdot 4^k}\right) - \frac{1}{c_n} \sum\limits_{k=1}^{n} (c_k + u_k) mup_2 \left(x - 1 + \frac{1}{2 \cdot 4^{n-k}}\right)\right| =$

$= | \sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda^k mup_2 \left(x - 1 + \frac{1}{2 \cdot 4^k}\right) - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{c_k}{c_n} mup_2 \left(x - 1 + \frac{1}{2 \cdot 4^{n-k}}\right) -$

$-\frac{1}{c_n}\sum\limits_{k=1}^{n} u_k mup_2\left(x-1+\frac{1}{2\cdot 4^{n-k}}\right)| = |\sum\limits_{k=0}^{n-1}\lambda^k mup_2\left(x-1+\frac{1}{2\cdot 4^k}\right) -$
$-\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda^{n-k} mup_2\left(x-1+\frac{1}{2\cdot 4^{n-k}}\right) - \frac{1}{c_n}\sum\limits_{k=1}^{n} u_k mup_2\left(x-1+\frac{1}{2\cdot 4^{n-k}}\right)| =$
$= \left|\frac{1}{c_n}\sum\limits_{k=1}^{n} u_k mup_2\left(x-1+\frac{1}{2\cdot 4^{n-k}}\right)\right|$. Значит, при $x\in\left[-1,-\frac{1}{2\cdot 4^n}\right]$

$$\left|ab_2(x)-\frac{1}{c_n}h_n(x)\right| \le \frac{1}{|c_n|}\sum_{k=1}^{n}\left|mup_2\left(x-1+\frac{1}{2\cdot 4^{n-k}}\right)\right|\frac{M}{58^k}.$$

Так как $mup_2(x)$ монотонно возрастает на $[-1,0]$ (свойство 4)), то для $x\in\left[-1,-\frac{1}{2\cdot 4^n}\right]$ имеет место

$$\left|mup_2\left(x-1+\frac{1}{2\cdot 4^{n-k}}\right)\right| \le mup_2\left(-1+\frac{1}{2\cdot 4^{n-k}}\right) \le mup_2\left(-1+\frac{1}{4^{n-k}}\right).$$

Если $k\le n-1$, то согласно свойству 8):

$$mup_2\left(-1+\frac{1}{4^{n-k}}\right) = \frac{\nu_{n-k-1}}{2^{(n-k)^2}(n-k-1)!},\ \text{где } \nu_{n-k-1} = \int\limits_0^1 x^{n-k-1} mup_2(x)dx.$$

Из свойств 3) и 4) следует $\nu_{n-k-1}\le 1$. Поэтому при $k\le n-1$ выполняется $\left|mup_2\left(x-1+\frac{1}{2\cdot 4^{n-k}}\right)\right| \le \frac{1}{2^{(n-k)^2}}$.

При $k=n$ имеем $\left|mup_2\left(x-1+\frac{1}{2\cdot 4^{n-k}}\right)\right| \le mup_2\left(-\frac{1}{2}\right) \le mup_2(0)=1$ (согласно свойству 3) функции $mup_2(x)$). Следовательно, $\left|ab_2(x)-\frac{1}{c_n}h_n(x)\right| \le$
$\le \frac{1}{|c_n|}\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^{(n-k)^2}}\cdot\frac{M}{58^k}+\frac{M}{58^n}\right) = \frac{M}{|c_n|}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2^{-(n-k)^2}}{58^k} \le \frac{M}{|c_n|}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2^{-(n-k)^2}}{32^k} =$
$= \frac{M}{|c_n|}\sum\limits_{k=1}^{n} 2^{-(n-k)^2-5k}$. Заметим, что $max_k(-(n-k)^2-5k)$ достигается при $k=\ n-\frac{5}{2}$. Значит, $\left|ab_2(x)-\frac{1}{c_n}h_n(x)\right| \le \frac{M}{|c_n|}\sum\limits_{k=1}^{n} 2^{-\left(\left(\frac{5}{2}\right)^2+5n-\frac{25}{2}\right)} =$
$= \frac{n\cdot M\cdot 2^{\frac{25}{4}}\cdot 2^{-5n}}{|c_n|} = C\cdot\frac{n\cdot|\lambda|^n}{32^n}$.

Итак, лемма доказана.

Лемма 8. *Для любых* $n\in N$ *и* $x\in\left[-\frac{1}{2\cdot 4^n},0\right]$ *справедливы оценки:*

а) $\left|\frac{1}{c_n}h_n(x)\right| \le C\cdot\frac{|\lambda|^n}{(n-1)!2^{n^2}}$, *где* $c_n=-\frac{d}{\lambda^{n+1}}$;

б) $|ab_2(x)| \le \frac{\tilde{C}}{64^n}$.

Доказательство. Пусть $x\in\left[-\frac{1}{2\cdot 4^n},0\right]$. Для получения первой оценки воспользуемся формулой Тейлора с остатком в интегральной форме:

$$\tilde{\varphi}_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\tilde{\varphi}_n^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^x (x-t)^{n-1}\tilde{\varphi}_n^{(n)}(t)dt.$$

Из леммы 3 следует, что $\tilde{\varphi}_n^{(k)}(0) = 0$ при $k < n$. Поэтому

$$\tilde{\varphi}_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^x (x-t)^{n-1}\tilde{\varphi}_n^{(n)}(t)dt.$$

Исходя из (8), получаем $|x_k| \leq \left|\frac{d}{\lambda^{k+1}}\right| + \frac{M}{58^k}$. Значит,

$$1 + |x_0| + |x_1| + \ldots + |x_n| \leq 1 + \frac{|d|}{|\lambda| - 1} + \frac{58M}{57} = C_0.$$

Воспользуемся полученной оценкой:
$\left|\tilde{\varphi}_n^{(n)}(x)\right| = \left|mup_2^{(n)}\left(x - 1 + \frac{1}{4^n}\right) + \sum\limits_{s=0}^{n-1} x_{n-s-1} mup_2^{(n)}\left(x - 1 + \frac{1}{2\cdot 4^s}\right)\right| \leq$
$\leq \left\|mup_2^{(n)}\right\|_{C_{[-1,1]}} \cdot (1 + |x_0| + \ldots + |x_{n-1}|) \leq 2^{n^2}C_0$ (последний переход следует из свойства 2)). Следовательно, $|\tilde{\varphi}_n(x)| \leq \frac{2^{n^2}C_0}{(n-1)!}\int\limits_x^0 (t-x)^{n-1}dt =$
$= \frac{2^{n^2}C_0}{(n-1)!}\cdot\frac{(-x)^n}{n} \leq \frac{2^{n^2}C_0}{n!}\cdot\frac{1}{2^n\cdot 4^{n^2}} \leq \frac{C_0}{2^n\cdot 2^{n^2}n!}$. Кроме того, из свойств 4) и 8) следует $mup_2\left(x - 1 + \frac{1}{4^n}\right) \leq mup_2\left(-1 + \frac{1}{4^n}\right) \leq \frac{1}{2^{n^2}(n-1)!}$.

Значит, $\left|\frac{1}{c_n}h_n(x)\right| = \frac{1}{|c_n|}\left|\tilde{\varphi}_n(x) - mup_2\left(x - 1 + \frac{1}{4^n}\right)\right| \leq$
$\leq \frac{1}{|c_n|}\left[\frac{C_0}{2^n\cdot 2^{n^2}n!} + \frac{1}{2^{n^2}(n-1)!}\right] = C\cdot\frac{|\lambda|^n}{2^{n^2}(n-1)!}$. Итак, первая оценка получена.

Приступим к доказательству второй оценки.

Запишем $ab_2(x)$ в виде

$$ab_2(x) = mup_2\left(x - \frac{1}{2}\right) + \lambda\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{k-1}mup_2\left(x - 1 + \frac{1}{2\cdot 4^k}\right).$$

Дифференцируя последнее равенство, получаем: $ab_2'(x) = mup_2'\left(x - \frac{1}{2}\right) +$
$+ 2\lambda ab_2(4x)$, $ab_2''(x) = mup_2''\left(x - \frac{1}{2}\right) + 8\lambda\cdot mup_2'\left(4x - \frac{1}{2}\right) + 16\lambda^2 ab_2(16x)$ и
$ab_2'''(x) = mup_2'''\left(x - \frac{1}{2}\right) + 32\lambda\cdot mup_2''\left(4x - \frac{1}{2}\right) + 256\lambda^2\cdot mup_2'\left(16x - \frac{1}{2}\right) +$
$+ 512\lambda^3\cdot ab_2(64x)$.

Заметим, что $ab_2(0) = \Phi(\lambda) = 0$, так как λ – корень функции $\Phi(z)$. Далее, $ab_2'(0) = mup_2'\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\lambda\cdot ab_2(0) = 0$. Аналогично, $ab_2''(0) =$
$= ab_2'''(0) = 0$. Поэтому воспользовавшись формулой Тейлора с остатком в интегральной форме, получаем: $ab_2(x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^x ab_2'''(t)(x-t)^2dt$.

Пусть $A = max_{x\in[-1,0]}|ab_2'''(x)|$. Тогда $|ab_2(x)| \leq \frac{A}{2}\int\limits_x^0 (x-t)^2dt \leq \frac{A}{6}(-x)^3$.
С учетом того, что $x \in \left[-\frac{1}{2\cdot 4^n}, 0\right]$, получаем $|ab_2(x)| \leq \frac{\tilde{C}}{64^n}$.

Итак, лемма доказана.

Лемма 9. *Для любых* $n \in N$ *и* $x \in [-1, 0]$ *имеет место* $\left|\frac{1}{c_n}mup_2\left(x - 1 + \frac{1}{4^n}\right)\right| \leq \frac{c\cdot|\lambda|^n}{2^{n^2}\cdot(n-1)!}$, *где* $c_n = -\frac{d}{\lambda^{n+1}}$.

Доказательство данной леммы следует из свойств 4) и 8) функции $mup_2(x)$.

Сформулируем основной результат относительно функций $\varphi_n(x)$.

Теорема 2. *Справедливы асимптотические формулы*

$$\frac{2^{(2n)^2}}{c_{2n}}\varphi_{2n,0}(x) = ab_{2,c}(x) + R_{2n}(x),$$

$$\frac{2^{(2n-1)^2}}{c_{2n-1}}\varphi_{2n-1,0}(x) = ab_{2,s}(x) + R_{2n-1}(x),$$

причем для функций $R_n(x)$ справедливы оценки $|R_n(x)| \leq M\frac{n|\lambda|^n}{32^n}$.

Утверждение теоремы непосредственно следует из теоремы 1 и лемм 7, 8 и 9.

Получение асимптотики для $\psi_{n,\alpha_n}(x)$

Построение асимптотики для базисных функций $\psi_{n,\alpha_n}(x)$ проводится так же, как и для $\varphi_{n,0}(x)$.

Рассмотрим функции:

$$\tilde{\psi}_n(x) = \begin{cases} -mup_2\left(x - 1 + \frac{1}{4^n}\right) + 2mup_2\left(x - 1 + \frac{1}{2\cdot 4^n}\right) + \\ \quad + \sum\limits_{s=0}^{n-1} y_{n-s-1} mup_2\left(x - 1 + \frac{1}{2\cdot 4^s}\right), \ x \leq 0, \\ 0, \ x > 0, \end{cases}$$

где коэффициенты y_i удовлетворяют бесконечной треугольной системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -mup_2\left(-1 + \frac{1}{4}\right) + 2mup_2\left(-1 + \frac{1}{2\cdot 4}\right) + y_0 mup_2\left(-1 + \frac{1}{2}\right) = 0, \\ -mup_2\left(-1 + \frac{1}{4^2}\right) + 2mup_2\left(-1 + \frac{1}{2\cdot 4^2}\right) + \\ \quad +y_0 mup_2\left(-1 + \frac{1}{2\cdot 4}\right) + y_1 mup_2\left(-1 + \frac{1}{2}\right) = 0, \\ \dots \\ -mup_2\left(-1 + \frac{1}{4^n}\right) + 2mup_2\left(-1 + \frac{1}{2\cdot 4^n}\right) + \\ \quad +y_0 mup_2\left(-1 + \frac{1}{2\cdot 4^{n-1}}\right) + \ldots + y_{n-1} mup_2\left(-1 + \frac{1}{2}\right) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Так как $mup_2\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, то указанная система имеет единственное решение.

Установим связь между $\psi_{n,\alpha_n}(x)$ и $\tilde{\psi}_n(x)$.

Теорема 3. *Для любого $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ имеет место*

$$\tilde{\psi}_n(x) \equiv 2^{n^2}\psi_{n,\alpha_n}(x).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Используя леммы 1, 2, 4, 5 и систему уравнений (9), можно доказать следующее:

а) $\tilde{\psi}_n^{(l)}\left(x_{l,s}\right) = 0$,

б) $\triangle_h^2\left(\tilde{\psi}_n^{(l)}\left(x_{l,p}^*\right)\right) = 2^{n^2}\delta_n^l\delta_0^s$.

Кроме того, из свойства 2) функции $mup_2(x)$ следует, что $\tilde{\psi}_n \in H_{1,2}$. Поэтому, согласно теореме 2 из [2] справедливо $\tilde{\psi}_n(x) \equiv 2^{n^2}\psi_{n,\alpha_n}(x)$.

Итак, теорема доказана.

Исследуем поведение при $n \longrightarrow \infty$ функций $\tilde{\psi}_n(x)$. Для этого будем использовать систему (9).

С использованием обозначений $\zeta_k = mup_2\left(-1 + \frac{1}{2\cdot 4^k}\right)$ и $\eta_s = mup_2\left(-1 + \frac{1}{4^{s+1}}\right)$ система (9) принимает вид:

$$\begin{cases} y_0 \cdot \zeta_0 = \eta_0 - 2\cdot\zeta_1, \\ y_0\cdot\zeta_1 + y_1\zeta_0 = \eta_1 - 2\cdot\zeta_2, \\ \ldots \\ y_0\cdot\zeta_{n-1} + \ldots + y_{n-1}\zeta_0 = \eta_{n-1} - 2\cdot\zeta_n. \end{cases} \tag{10}$$

Напомним, что в силу свойств 8) и 9) функции $mup_2(x)$ коэффициенты $\zeta_k = mup_2\left(-1 + \frac{1}{2\cdot 4^k}\right)$ и $\eta_s = mup_2\left(-1 + \frac{1}{4^{s+1}}\right)$ являются рациональными.

В предыдущем разделе были введены функции $\Lambda(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\eta_k z^k$ и $\Phi(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\zeta_k z^k$. Введем в рассмотрение функцию $T(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\zeta_{k+1} z^k$.

Пусть $W(z) = \frac{\Lambda(z) - 2\cdot T(z)}{\Phi(z)}$. Разложим функцию $W(z)$ в ряд Маклорена:

$$W(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^k.$$

Тогда из того, что $W(z)\cdot\Phi(z) = \Lambda(z) - 2\cdot T(z)$ следует, что первые n коэффициентов y_k разложения $W(z)$ будут удовлетворять системе (10) для любого n.

В предыдущем разделе были указаны первые три корня функции $\Phi(z)$: $\lambda = z_1 = -9,617232$, $z_2 = -58,870525$ и $z_3 = -311,828551$. Кроме того, с точностью 10^{-6} находим $\Lambda(\lambda) - 2\cdot T(\lambda) = 0,056104$. Значит, функция $W(z)$ в круге $|z| \leq 58$ имеет единственный полюс λ (первого порядка). Так же, как и в предыдущем разделе, для нас важна величина $\ell = Res_\lambda W(z) = \frac{\Lambda(\lambda) - 2\cdot T(\lambda)}{\Phi'(\lambda)}$. С точностью 10^{-6} имеем $\ell = 1,341544$. Мы получили, что функция $\xi(z) = W(z) - \frac{\ell}{z-\lambda}$ является аналитической для $|z| \leq 58$:

$$\xi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k z^k, \text{ где } |v_k| \leq \frac{B}{58^k},\ B = max_{|z|=58}|\xi(z)|.$$

С точностью 10^{-6} получаем $B = 4,21404$.

С другой стороны, в круге $|z| < |\lambda|$:

$$\frac{\ell}{z-\lambda} = -\frac{\ell}{\lambda} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{\lambda}} = -\frac{\ell}{\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\lambda}\right)^k.$$

Значит, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} y_k z^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{\ell}{\lambda^{k+1}} + v_k\right) z^k$, $|z| < |\lambda|$, то есть асимптотика для y_k имеет вид:

$$y_k = -\frac{\ell}{\lambda^{k+1}} + v_k, \ |v_k| \le \frac{B}{58^k}.$$

Теперь мы можем описать поведение функций $\tilde{\varphi}_n(x)$ при $n \longrightarrow \infty$. Для этого будет использована функция $ab_2(x)$, которая была введена в предыдущем разделе. Кроме того, на сегменте $[-1,0]$ определим функцию $g_n(x) = \tilde{\psi}_n(x) + mup_2\left(x - 1 + \frac{1}{4^n}\right) - 2mup_2\left(x - 1 + \frac{1}{2\cdot 4^n}\right)$.

С учетом определения функций $\tilde{\psi}_n(x)$ имеем

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} mup_2 \left(x - 1 + \frac{1}{2\cdot 4^{n-k}}\right).$$

Лемма 10. *Для любых* $x \in \left[-1, -\frac{1}{2\cdot 4^n}\right]$ *и* $n \in N$ *имеет место*

$$\left|ab_2(x) - \frac{1}{b_n} g_n(x)\right| \le C \cdot \frac{n \cdot |\lambda|^n}{32^n},$$

где $b_n = -\frac{\ell}{\lambda^{n+1}}$.

Доказательство данной леммы повторяет доказательство леммы 7.

Лемма 11. *Для любых* $n \in N$ *и* $x \in \left[-\frac{1}{2\cdot 4^n}, 0\right]$ *имеет место*

$$\left|\frac{1}{b_n} g_n(x)\right| \le C \cdot \frac{|\lambda|^n}{(n-1)! 2^{n^2}},$$

где $b_n = -\frac{\ell}{\lambda^{n+1}}$.

Доказательство данной леммы совпадает с доказательством леммы 8.

Лемма 12. *Для любого* $x \in [-1,0]$ *имеет место*

$$\left|\frac{1}{b_n}\left(-mup_2\left(x - 1 + \frac{1}{4^n}\right) + 2mup_2\left(x - 1 + \frac{1}{2\cdot 4^n}\right)\right)\right| \le \frac{\tilde{c}\cdot|\lambda|^n}{2^{n^2}(n-1)!},$$

где $b_n = -\frac{\ell}{\lambda^{n+1}}$.

Доказательство данной леммы следует из свойств 4) и 8) функции $mup_2(x)$.

Сформулируем основной результат относительно функций $\psi_{n,\alpha_n}(x)$. Для этого нам понадобится следующая функция:

$$ap_2 = \begin{cases} ab_2(x), x \le 0, \\ 0, x > 0. \end{cases}$$

Теорема 4. *Справедлива асимптотическая формула*

$$\frac{2^{n^2}}{b_n}\psi_{n,\alpha_n}(x) = ap_2(x) + R_n(x),$$

причем для функций $R_n(x)$ *справедливы оценки* $|R_n(x)| \leq M\frac{n|\lambda|^n}{32^n}$.

Утверждение теоремы непосредственно следует из теоремы 3, лемм 10, 11, 12 и второй оценки леммы 8.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рвачев В.А. Финитные решения функционально-дифференциальных уравнений и их применение // Усп. мат. наук. – 1990. – 45, вып.1(271) – С. 77-103.

2. Теория R-функций и актуальные проблемы прикладной математики. – Киев: Наук. думка, 1986. – 264 с.

3. Рвачева Т.В. Об асимптотике базисных функций обобщенного ряда Тейлора // Вiсник ХНУ, Сер. "Математика, прикладна математика i механiка". – 2003. – 602. – С. 94-104.

4. Рвачев В.А., Старец Г.А. Некоторые атомарные функции и их применение // Докл. АН УССР, сер. А. – 1983. – 11. – С.22-24.

5. Старец Г.А. Построение базисных функций для обобщенных рядов Тейлора // Мат. методы анализа динамических систем. – 1984. – 8. – С. 16 - 19.

6. Старец Г.А. Сходимость обобщенных рядов Тейлора классов $H_\rho(m)$ // Мат. методы анализа динамических систем. – 1985. – 9. – С. 37-39.

7. Albanese A.A., Bonet J. Ultradifferentiable Fundamental Kernels of Linear Partial Differential Operators on Non-quasianalytic Classes of Roumieu Type // Publ. RIMS, Kyoto Univ. – 2007. – 43. – P. 39–54.

8. Albanese A.A. Surjective linear partial differential operators with variable coefficients on non-quasianalytic classes of Roumieu type, in Hyperbolic Problems and Regularity Questions // Trends in Math., Basel, – 2006. – P. 7–16.

9. Малицкий И.И. Применение обобщеннх рядов Тейлора в теории дифференциально-функциональных уравнений с отклоняющимся аргументом // Докл. АН УССР, сер. А. – 1985. – 10. – С.17-18.

10. Томилова Е.П. Применение обобщенных рядов Тейлора для решения некоторых дифференциально-функциональных уравнений // Мат. методы анализа динамических систем. – 1984. – 8. – С. 33-35.

11. Старец Г.А. Один класс атомарных функций и его применение // Дисс. канд. физ.-мат. наук. – Харьков: ХГУ, 1985.

12. Линник Ю.В., Островский И.В. // Разложения случайных величин и векторов. – Москва: Наука, 1972. – 480 с.