Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.5 № 826, 2008, с.52–66

Об одном свойстве дискретных множеств в $\mathbb{R}^k$

Е.Ю. Колбасина

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, Украина

Мы вводим класс S-множеств в $\mathbb{R}^k$. Это специальный класс дискретных множеств, обобщающий класс дискретных периодических множеств. Мы изучаем свойства S-множеств. В частности, мы доказываем, что класс S-множеств совпадает с классом равномерно протяженных дискретных множеств в смысле Лашковича.
2000 Mathematics Subject Classification 28E99, 03E99.

Введение

В работе рассматриваются дискретные множества в $\mathbb{R}^k$, обладающие одним специальным свойством (которое мы называем S-свойством): для каждого вектора в $\mathbb{R}^k$ существует такая перенумерация точек множества, что расстояние между соответствующими точками исходного и сдвинутого на этот вектор перенумерованного множества не превосходит некоторой константы, не зависящей от вектора сдвига. Такие множества возникают, например, в связи с изучением распределения значений почти периодических функций [1] и почти эллиптических функций [2].

В работе вводится некоторый аналог расстояния между множествами, приспособленный для изучения множеств с S-свойством. Мы доказываем полноту и замкнутость пространства множеств, обладающих S-свойством, относительно этого расстояния, а также другие свойства таких множеств, в частности, существование инвариантной относительно сдвигов средней плотности в $\mathbb{R}^k$. Кроме того, мы показываем, что класс множеств, обладающих S-свойством, совпадает с классом равномерно протяженных множеств М.Лашковича [3], введенных им в связи с проблемой Тарского о равноразложимости круга и квадрата [4].

В работе использованы следующие обозначения: через x^i обозначим i-тую координату точки $x \in \mathbb{R}^k$, через $B(x, R)$ — открытый k-мерный шар радиуса R с центром в точке $x \in \mathbb{R}^k$, а через $Q(x, L)$ — k-мерный куб $\{y \in \mathbb{R}^k \mid x^i - L/2 \le y^i < x^i + L/2, i = \overline{1,k}\}$. Для любого множества $A \subset \mathbb{R}^k$ и $r > 0$ положим $r \cdot A = \{r \cdot x \mid x \in A\}$, для любого $\rho > 0$ обозначим $A_\rho = \bigcup\limits_{x \in A} B(x, \rho)$ и

$A_{-\rho} = \{x \in \mathbb{R}^k \mid B(x,\rho) \subset A\}$. Для любого конечного множества E обозначим через $\#E$ количество элементов в этом множестве. Через $m_k(A)$ обозначим k-мерную меру Лебега множества A, через $|x|$ обычную евклидову норму, а через $\|x\|$ l^∞-норму вектора $x \in \mathbb{R}^k$.

I. Пространство дискретных мультимножеств

Определение 1. Множество значений последовательности $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^k$ будем называть *дискретным мультимножеством* (д.м.м.) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, если эта последовательность не имеет конечных точек сгущения.

Мы употребляем термин "дискретное мультимножество", поскольку точка из $\mathbb{R}^k$ может встречаться в последовательности конечное число раз.

Будем говорить, что два д.м.м. в $\mathbb{R}^k$ *равны*, если все их элементы, с точностью до нумерации, совпадают.

В качестве индексов точек д.м.м. можно брать произвольное счетное множество, например, множество натуральных чисел $\mathbb{N}$, множество k-мерных наборов целых чисел $\mathbb{Z}^k$.

Определение 2. *Расстоянием* между двумя д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ назовем величину

$$dist(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = \inf_{\sigma} \sup_{n\in\mathbb{N}} |\, a_n - b_{\sigma(n)}|,$$

где инфимум берется по всем биекциям $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$.

Заметим, что определенная выше величина не обязана быть конечной. Например, $dist(\mathbb{Z}^k, 2\mathbb{Z}^k) = \infty$.

Теорема 1. Для любых д.м.м.$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^k$ величина

$$dist(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}})$$

удовлетворяет следующим аксиомам расстояния:

a) Неотрицательность: $dist(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}) \geq 0$.

b) Невырожденность: $dist(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ равно $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Симметричность: $dist(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = dist(\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}})$.

d) Неравенство треугольника: для любого д.м.м. $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^k$
$dist(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}) \leq dist(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}) + dist(\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}})$.

Доказательство. Аксиомы a) и c) очевидны.

Докажем b). Пусть $dist(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = 0$. Предположим, что точка $x \in \mathbb{R}^k$ встречается в д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ p раз, а в д.м.м. $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $p' < p$ раз (возможно, $p' = 0$), т.е. для любой биекции $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ найдется такое n^*, что $(a_{n^*} = x) \bigwedge (b_{\sigma(n^*)} \neq x)$. Так как x не является предельной точкой для д.м.м. $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, то

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_{\sigma(n)}| \geq |a_{n^*} - b_{\sigma(n^*)}| \geq \delta > 0,$$

поэтому $dist(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}},\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}})>0$. Аналогично, p' не может быть больше p, значит, $p=p'$, и это верно для любой точки x из $\mathbb{R}^k$. Аксиома b) проверена.

Докажем d). Возьмем $\varepsilon>0$. Выберем биекции σ_1 и σ_2 так, что выполняются неравенства

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}|\,a_n-c_{\sigma_1(n)}|<\inf_{bij\ \sigma:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}}\sup_{n\in\mathbb{N}}|\,a_n-c_{\sigma(n)}|+\varepsilon,$$
$$\sup_{n\in\mathbb{N}}|\,c_n-b_{\sigma_2(n)}|<\inf_{bij\ \sigma:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}}\sup_{n\in\mathbb{N}}|\,c_n-b_{\sigma(n)}|+\varepsilon.$$

Выбирая $\sigma_3=\sigma_1\circ\sigma_2$, получим:

$$\begin{aligned}\sup_{n\in\mathbb{N}}|\,a_n-b_{\sigma_3(n)}|&\le\sup_{n\in\mathbb{N}}|\,a_n-c_{\sigma_1(n)}|+\sup_{n\in\mathbb{N}}|\,c_{\sigma_1(n)}-b_{\sigma_3(n)}|\\&=\sup_{n\in\mathbb{N}}|\,a_n-c_{\sigma_1(n)}|+\sup_{n\in\mathbb{N}}|\,c_n-b_{\sigma_2(n)}|\\&<\inf_{bij\ \sigma:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}}\sup_{n\in\mathbb{N}}|\,a_n-c_{\sigma(n)}|+\inf_{bij\ \sigma:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}}\sup_{n\in\mathbb{N}}|\,c_n-b_{\sigma(n)}|+2\varepsilon.\end{aligned}$$

Ввиду произвольности ε, отсюда следует d). Теорема доказана.

Заметим, что если расстояния от д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ до дискретных мультимножеств $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{b'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ конечны, то расстояние между д.м.м. $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и д.м.м. $\{b'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ также конечно. Поэтому любое семейство всех д.м.м. $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, таких, что $dist(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}},\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}})<\infty$, образует метрическое пространство $(X,dist)$.

Теорема 2. $(X,dist)$ — полное метрическое пространство.

Доказательство. Рассмотрим фундаментальную последовательность д.м.м. $D^p=\{a^p_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset(X,dist)$.

Выберем номер M_1 так, что для любых $p,m>M_1$ $dist(D^p,D^m)<1/2$ и положим $\nu_1=M_1+1$. Выберем номер M_2 так, что для любых $p,m>M_2$ $dist(D^p,D^m)<1/2^2$ и положим $\nu_2=M_2+1$. Вообще, номер M_s определяется так, что для любых $p,m>M_s$ $dist(D^p,D^m)<1/2^s$. Положив $\nu_s=M_s+1$, получим, что из последовательности $\{D^p\}_{p\in\mathbb{N}}$ мы выделили подпоследовательность $\{D^{\nu_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ такую, что для любого $\varepsilon>0$ найдется $s\in\mathbb{N}$, которому соответствует такая биекция $\sigma_s:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$, что $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}|a^{\nu_{s+1}}_n-a^{\nu_s}_{\sigma_s(n)}|<1/2^s<\varepsilon$.

Переобозначим $a^{\nu_1}_n$ через $\widetilde{a}^{\nu_1}_n$ для любого $n\in\mathbb{N}$. Положим $\widetilde{a}^{\nu_2}_n:=a^{\nu_2}_{\sigma_2(n)}$ для любого $n\in\mathbb{N}$. Положим $\widetilde{a}^{\nu_3}_n:=a^{\nu_3}_{\sigma_3\circ\sigma_2(n)}$ для любого $n\in\mathbb{N}$. Вообще, положим $\widetilde{a}^{\nu_p}_n:=a^{\nu_p}_{\sigma_p\circ\sigma_{p-1}\circ\ldots\circ\sigma_2(n)}$ для любого $n\in\mathbb{N}$. Тогда

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}|\,\widetilde{a}^{\nu_p}_n-\widetilde{a}^{\nu_m}_n|<1/2^{s-1}\quad\text{для любых } p,m>s. \tag{1}$$

Поскольку для любого фиксированного $n\in\mathbb{N}$ $(\widetilde{a}^{\nu_p}_n)^\infty_{p=1}$ — последовательность векторов из $\mathbb{R}^k$, фундаментальная ввиду (1), то существует $a_n=\lim\limits_{p\to\infty}\widetilde{a}^{\nu_p}_n$. Значит, переходя в (1) к пределу при $m\to\infty$, получим:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}|\,\widetilde{a}^{\nu_p}_n-a_n|\le1/2^{s-1}\quad\text{для любого } p>s.$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ при подходящем s и $p > s$ имеем

$$dist(\{a_n^{\nu_p}\}_{n\in\mathbb{N}}, \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}) < \varepsilon.$$

Осталось показать, что исходная последовательность также будет сходиться к $D = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. По нему найдем число N так, чтобы для любых $p, m > N \quad dist(D^p, D^m) < \varepsilon/2$, и число M так, чтобы для любого $\nu_j > M \quad dist(D^{\nu_j}, D) < \varepsilon/2$. Возьмем $\nu_j > \max\{N, M\}$. Тогда для любого $p > N$

$$dist(D^p, D) \leq dist(D^p, D^{\nu_j}) + dist(D^{\nu_j}, D) < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Определение 3. Будем говорить, что д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^k$ обладает S-свойством (или, иначе, является S-множеством), если существует такое $L < \infty$, что для любого $\tau \in \mathbb{R}^k$ найдется биекция $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ такая, что

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |(a_n + \tau) - a_{\sigma(n)}| \leq L. \tag{2}$$

Другими словами, д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^k$ обладает *S-свойством*, если существует такое $L < \infty$, что для любого $\tau \in \mathbb{R}^k \;\; dist(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{a_n + \tau\}_{n\in\mathbb{N}}) \leq L$.

Примеры:

1. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^k} = \mathbb{Z}^k \backslash \{\mathbf{0}\}$. Для любого $\tau \in \mathbb{R}^k$ $\{a_n + \tau\}_{n\in\mathbb{N}} = (\mathbb{Z}^k + \tau)\backslash\{\tau\}$. Поскольку для любого $\tau \in \mathbb{R}^k \;\; dist((\mathbb{Z}^k + \tau)\backslash\{\tau\}, \mathbb{Z}^k) \leq 1$, то, воспользовавшись неравенством треугольника, получим, что для любого $\tau \in \mathbb{R}^k$

$$dist(\mathbb{Z}^k\backslash\{\mathbf{0}\}, (\mathbb{Z}^k + \tau)\backslash\{\tau\})$$

$$\leq dist(\mathbb{Z}^k\backslash\{\mathbf{0}\}, \mathbb{Z}^k) + dist(\mathbb{Z}^k, (\mathbb{Z}^k + \tau)\backslash\{\tau\}) \leq 2.$$

2. Равномерно протяженные д.м.м.

Определение 4. (М.Лашкович, [4]) Д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^k$ называется *равномерно протяженным*, если существует такое число $\alpha > 0$, что

$$dist(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \alpha^{-1/k}\mathbb{Z}^k) = F < \infty. \tag{3}$$

Число α называется *плотностью* д.м.м. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Пусть для д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^k$ выполнено (3). Покажем, что это д.м.м. обладает S-свойством. Пользуясь дважды неравенством треугольника, получим, что для любого $\tau \in \mathbb{R}^k$

$$dist(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{a_n + \tau\}_{n\in\mathbb{N}})$$

$$\leq dist(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \alpha^{-1/k}\mathbb{Z}^k) + dist(\alpha^{-1/k}\mathbb{Z}^k, \alpha^{-1/k}\mathbb{Z}^k + \tau)$$

$$+ dist(\alpha^{-1/k}\mathbb{Z}^k + \tau, \{a_n + \tau\}_{n\in\mathbb{N}}) \leq 2F + \alpha^{-1/2k}.$$

В разделе III мы покажем, что верно и обратное, то есть множество д.м.м., обладающих S-свойством, совпадает со множеством равномерно протяженных д.м.м.

3. Почти-периодические д.м.м. (для множеств на плоскости см. [1], а также [2]).

Определение 5. Вектор $t \in \mathbb{R}^k$ назовем *ε-почти-периодом* д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^k$, если $dist(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{a_n + t\}_{n\in\mathbb{N}}) < \varepsilon$.

Определение 6. Д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^k$ назовем *почти-периодическим*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует относительно плотное множество его ε-почти-периодов, т.е. существует такое $G < \infty$, что в каждом k-мерном шаре радиуса G найдется хотя бы один ε-почти-период д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Покажем, что любое почти-периодическое д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ обладает S-свойством. Выберем такое $G < \infty$ из определения 6, что в каждом шаре радиуса G найдется хотя бы один 1-почти-период д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Тогда для любого $\tau \in \mathbb{R}^k$ в шаре $B(\tau, G)$ найдется 1-почти-период t д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Поэтому для любого $\tau \in \mathbb{R}^k$

$$\begin{gathered} dist\,(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{a_n + \tau\}_{n\in\mathbb{N}}) \\ < dist(\{a_n + \tau\}_{n\in\mathbb{N}}, \{a_n + t\}_{n\in\mathbb{N}}) + dist(\{a_n + t\}_{n\in\mathbb{N}}, \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}) < G + 1. \end{gathered}$$

II. Свойства S-множеств

Теорема 3. Предел S-множеств есть S-множество.

Доказательство. Пусть $\left(\{a_n^{(p)}\}_{n\in\mathbb{N}}\right)_{p=1}^{\infty}$ — последовательность S-множеств. Пусть $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — такое д.м.м., что $dist\left(\{a_n^{(p)}\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right) \underset{p\to\infty}{\to} 0$. Тогда для некоторого p_0

$$dist\left(\{a_n^{(p_0)}\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right) < 1.$$

Кроме того, существует такое L, что для любого $\tau \in \mathbb{R}^k$

$$dist\left(\{a_n^{(p_0)}\}_{n\in\mathbb{N}}, \{a_n^{(p_0)} + \tau\}_{n\in\mathbb{N}}\right) < L < \infty.$$

Имеем:

$$\begin{gathered} dist\,(\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n + \tau\}_{n\in\mathbb{N}}) \\ \le dist\left(\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{a_n^{(p_0)}\}_{n\in\mathbb{N}}\right) + dist\left(\{a_n^{(p_0)}\}_{n\in\mathbb{N}}, \{a_n^{(p_0)} + \tau\}_{n\in\mathbb{N}}\right) + \\ + dist\left(\{a_n^{(p_0)} + \tau\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n + \tau\}_{n\in\mathbb{N}}\right) < L + 2. \end{gathered}$$

Теорема доказана.

Для любого множества $A \subset \mathbb{R}^k$ под $\mathrm{card}\{a_n \in A\}$ будем понимать количество точек в пересечении множества A с д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Теорема 4. Пусть д.м.м. $D = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ обладает S-свойством. Тогда существует такое $M < \infty$, что

$$\operatorname{card}\{a_n \in B(c,1)\} < M \qquad \text{для любого } c \in \mathbb{R}^k. \tag{4}$$

Доказательство. Предположим противное. Пусть для любого M найдется шар $B(b,1)$, в котором более, чем M точек д.м.м. D. Существует такая биекция $\sigma(n) : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, что

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b - a_{\sigma(n)}| < L < \infty. \tag{5}$$

Пусть $a_{p_i}, i = \overline{1,N}$ $(M < N < \infty)$ — те элементы D, которые лежат в $B(b,1)$. Из неравенства (5) следует, что для любого $i = \overline{1,N}$ $a_{\sigma(p_i)} \in \overline{B(\mathbf{0}, L+1)}$, т.е. замкнутый шар $\overline{B(\mathbf{0}, L+1)}$ содержит более, чем M точек д.м.м. D. Ввиду произвольности M это противоречит дискретности д.м.м. D. Теорема доказана.

Следствие. Пусть д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ обладает S-свойством, а число M удовлетворяет (4). Тогда для любого ограниченного множества $E \subset \mathbb{R}^k$ и любого $t \in \mathbb{R}^k$

$$\operatorname{card}\{a_n \in E + t\} < (\operatorname{diam} E)^k M.$$

Доказательство. Не уменьшая общности, предположим, что $0 \in E$. Тогда по теореме 4 для любого $t \in \mathbb{R}^k$ имеем

$$\operatorname{card}\{a_n \in E + t\} \le \operatorname{card}\{a_n \in B(t, \operatorname{diam} E)\} < (\operatorname{diam} E)^k M,$$

где M удовлетворяет (4). Следствие доказано.

Пусть $A \subset \mathbb{R}^k$ — произвольное выпуклое ограниченное множество. Известно [2], что для любого $x \in \mathbb{R}^k \setminus A$ существует единственная точка $y_0 \in A$ такая, что

$$|x - y_0| = \inf_{y\in A} |x - y|.$$

Поэтому можно корректно определить отображение $\varphi : \mathbb{R}^k \setminus A \to \partial A$, ставящее в соответствие каждой точке $x \in \mathbb{R}^k \setminus A$ точку $\varphi(x) \in \partial A$ так, что

$$|x - \varphi(x)| = \inf_{y\in\partial A} |x - y|.$$

Лемма 1. a) Для любой точки $v \in \partial A$ имеем $\varphi(\partial Q(v, 2\operatorname{diam} A)) = \partial A$;

b) Отображение φ является не строго сжимающим, т.е. $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \le |x_1 - x_2|$.

Доказательство. Возьмем точку $y_0 \in \partial A$ и проведем через нее гиперплоскость так, чтобы множество A лежало по одну сторону от этой гиперплоскости. Восстановим перпендикуляр из точки y_0 и обозначим через x_0 точку его пересечения с $\partial Q(v, 2\operatorname{diam} A)$. Тогда $\varphi(x_0) = y_0$, т.к. $|x_0 - y_0| \le |x_0 - \widetilde{y}|$ для любого $\widetilde{y} \in \partial A$ по построению. Пункт a) доказан. Доказательство пункта b) см., например [6]. Лемма доказана.

Утверждение 1. Пусть д.м.м. $D = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ обладает S-свойством. Тогда существует такое C, что для любого выпуклого ограниченного множества $E \subset \mathbb{R}^k$ и для любого $t \in \mathbb{R}^k$

$$|\mathrm{card}\{a_n \in E\} - \mathrm{card}\{a_n \in E + t\}| < C\,((\mathrm{diam}\, E)^{k-1} + 1).$$

Доказательство. Пусть M удовлетворяет (4), а целое $L > 1$ таково, что для любого $\tau \in \mathbb{R}^k$

$$dist(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{a_n + \tau\}_{n\in\mathbb{N}}) \le L. \tag{6}$$

Зафиксируем произвольное $t \in \mathbb{R}^k$. При $L \ge \mathrm{diam}\, E$ по следствию из теоремы 4

$$|\mathrm{card}\{a_n \in E\} - \mathrm{card}\{a_n \in E + t\}| \le 2M(\mathrm{diam}\, E)^k < 2ML^k.$$

Пусть теперь $L < \mathrm{diam}\, E$. Ввиду (6), для вектора t существует такая биекция $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, что

$$|(a_n + t) - a_{\sigma(n)}| \le L \quad \text{для любого } n \in \mathbb{N}.$$

Поэтому в $E + t$ находятся все точки д.м.м. D вида $a_{\sigma(n)}$, где $a_n \in E_{-L}$, а также часть точек д.м.м. D вида $a_{\sigma(n)}$, где $a_n \in E_L \setminus E_{-L}$. Значит, для любого t количества точек в E и $E + t$ могут отличаться не более, чем на $\mathrm{card}\{a_n \in E_L \setminus E_{-L}\}$.

Пусть $A \subset \mathbb{R}^k$ — произвольное выпуклое ограниченное множество, $v \in \partial A$. Покроем $\partial Q(v, 2\mathrm{diam} A)$ k-мерными кубами с ребром 1 с центрами на $\partial Q(v, 2\mathrm{diam} A)$. Количество таких кубов равно $2k(2\mathrm{diam} A)^{k-1}$. Так как по лемме 1 сужение построенного выше отображения φ на $\partial Q(v, 2\mathrm{diam} A)$ — сжимающее отображение, то тем же числом кубов с ребром 1 можно покрыть и ∂A.

Таким образом, количество k-мерных кубов с ребром 1, покрывающих ∂E_L, не превосходит $2k(2\mathrm{diam} E_L)^{k-1}$. Значит, количество k-мерных кубов с ребром 1, покрывающих $E_L \setminus E_{-L}$, не превосходит $2L \cdot 2k(2\mathrm{diam} E_L)^{k-1}$. Поскольку $\mathrm{diam} E_L = \mathrm{diam} E + 2L < 3\mathrm{diam} E$, имеем

$$\mathrm{card}\{a_n \in E_L \setminus E_{-L}\} \le 4MLk(2\mathrm{diam} E_L)^{k-1} < 4 \cdot 6^{k-1} MLk(\mathrm{diam} E)^{k-1}.$$

Отсюда следует доказываемое утверждение.

Утверждение 2. Пусть S-множество $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ для любого $\tau \in \mathbb{R}^k$ удовлетворяет неравенству $dist(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{a_n + \tau\}_{n\in\mathbb{N}}) \le L < \infty$. Тогда в любом k-мерном кубе с ребром R найдется не менее $\left[\dfrac{R}{2L}\right]^k$ точек этого S-множества, где $[\cdot]$ означает целую часть.

Доказательство. Для любого сдвига $\tau \in \mathbb{R}^k$ найдется биекция σ_τ такая, что

$$|(a_1 + \tau) - a_{\sigma_\tau(1)}| < L,$$

следовательно, $a_{\sigma_\tau(1)} \in B(a_1+\tau, L)$, т.е. для любого $\tau \in \mathbb{R}^k$ в шаре $B(a_1+\tau, L)$ найдется хотя бы одна точка д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Значит, для любого $\tau \in \mathbb{R}^k$ в кубе $Q(a_1+\tau, 2L)$ найдется хотя бы одна точка д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Из того, что каждый куб с ребром R содержит $\left[\dfrac{R}{2L}\right]^k$ непересекающихся кубов с ребром $2L$, получаем требуемое. Утверждение доказано.

Определение 7. *Плотностью* д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ назовем величину

$$\Delta = \lim_{T\to\infty} \frac{\operatorname{card}\{a_n \in Q(\mathbf{0}, T)\}}{T^k}. \tag{7}$$

Теорема 5. У любого S-множества $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ существует конечная ненулевая инвариантная относительно сдвигов плотность, т.е.

$$\Delta = \lim_{T\to\infty} \frac{\operatorname{card}\{a_n \in Q(\alpha, T)\}}{T^k} \quad \text{равномерно по } \alpha \in \mathbb{R}^k.$$

Доказательство. Оценим для произвольных $T > 1$, $\alpha \in \mathbb{R}^k$, $q \in \mathbb{N}$ разность

$$\left|\frac{1}{T^k}\operatorname{card}\{a_n \in Q(\alpha, T)\} - \frac{1}{(qT)^k}\operatorname{card}\{a_n \in Q(\alpha, qT)\}\right|$$
$$= \frac{1}{(qT)^k}\left|q^k \operatorname{card}\{a_n \in Q(\alpha, T)\} - S_0\right|, \tag{8}$$

где

$$S_0 = \sum_{\substack{p_i=-[\frac{q}{2}]+1 \\ i=\overline{1,k}}}^{[\frac{q}{2}]} \operatorname{card}\left\{a_n \in Q\left(\left(\alpha^1 + p_1 T, \ldots, \alpha^k + p_k T\right), T\right)\right\}$$

при нечетных q и

$$S_0 = \sum_{\substack{p_i=-\frac{q}{2}+1 \\ i=\overline{1,k}}}^{\frac{q}{2}} \operatorname{card}\left\{a_n \in Q\left(\left(\alpha^1 + \left(p_k - \frac{1}{2}\right)T, \ldots, \alpha^k + \left(p_k - \frac{1}{2}\right)T\right), T\right)\right\}$$

при четных q. Выражение, стоящее под знаком модуля в (8), есть сумма q^k разностей вида $\operatorname{card}\{a_n \in Q(\alpha, T)\} - \operatorname{card}\{a_n \in Q(\alpha + t, T)\}$, $t \in \mathbb{R}^k$. По утверждению 1 найдется такая константа C', не зависящая от t и α, что $|\operatorname{card}\{a_n \in Q(\alpha, T)\} - \operatorname{card}\{a_n \in Q(\alpha+t, T)\}| < C'T^{k-1}$. Поэтому

$$\left|\frac{1}{T^k}\operatorname{card}\{a_n \in Q(\alpha, T)\} - \frac{1}{(qT)^k}\operatorname{card}\{a_n \in Q(\alpha, qT)\}\right| < q^k \frac{1}{(qT)^k} C'T^{k-1} = \frac{C'}{T}.$$

Рассмотим произвольные $T_1 > 1, T_2 > 1$, $\varepsilon > 0$. Предположим вначале, что $T_1 l = T_2 q,\ l, q \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$\left|\frac{1}{T_1^k}\operatorname{card}\{a_n \in Q(\alpha, T_1)\} - \frac{1}{(lT_1)^k}\operatorname{card}\{a_n \in Q(\alpha, lT_1)\}\right| < \frac{C'}{T_1},$$
$$\left|\frac{1}{T_2^k}\operatorname{card}\{a_n \in Q(\alpha, T_2)\} - \frac{1}{(qT_2)^k}\operatorname{card}\{a_n \in Q(\alpha, qT_2)\}\right| < \frac{C'}{T_2}.$$

Поэтому
$$\left|\frac{1}{T_1^k}\operatorname{card}\{a_n\in Q(\alpha,T_1)\}-\frac{1}{T_2^k}\operatorname{card}\{a_n\in Q(\alpha,T_2)\}\right|$$
$$< C'\left(\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}\right) \quad \text{для любого } \alpha\in\mathbb{R}^k. \tag{9}$$
Пусть теперь T_1, T_2 — произвольные положительные числа. Возьмем такую последовательность $\{T^{(p)}\}_{p=1}^{\infty}$, что $T^{(p)}\downarrow T_1$ и при этом для любого p отношение $\dfrac{T^{(p)}}{T_2}$ рационально. Тогда (9) верно при любом $T^{(p)}$ вместо T_1:
$$\left|\frac{1}{(T^{(p)})^k}\operatorname{card}\{a_n\in Q(\alpha,T^{(p)})\}-\frac{1}{T_2^k}\operatorname{card}\{a_n\in Q(\alpha,T_2)\}\right|$$
$$< C'\left(\frac{1}{T^{(p)}}+\frac{1}{T_2}\right) \quad \text{для любого } \alpha\in\mathbb{R}^k. \tag{10}$$
Выберем ε так, что $\operatorname{card}\{a_n\in Q(\alpha,T_1+\varepsilon)\setminus Q(\alpha,T_1)\} = \operatorname{card}\{a_n\in \overline{Q(\alpha,T_1)}\setminus Q(\alpha,T_1)\}$ (это возможно ввиду дискретности S-множества $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$). Поскольку $\partial Q(\alpha,T_1)$ можно покрыть $2kT_1^{k-1}$ кубами с ребром 1, для $p>N(\varepsilon)$ имеем
$$\operatorname{card}\{a_n\in Q(\alpha,T^{(p)})\}-\operatorname{card}\{a_n\in Q(\alpha,T_1)\}=\operatorname{card}\{a_n\in Q(\alpha,T^{(p)})\setminus Q(\alpha,T_1)\}$$
$$=\operatorname{card}\{a_n\in\overline{Q(\alpha,T_1)}\setminus Q(\alpha,T_1)\}\le\operatorname{card}\{a_n\in\partial Q(\alpha,T_1)\}\le 2MkT_1^{k-1},$$
где M удовлетворяет (4) и зависит только от $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Теперь, перейдя в (10) к пределу при $p\to\infty$, получим, что
$$\left|\frac{1}{T_1^k}\operatorname{card}\{a_n\in Q(\alpha,T_1)\}-\frac{1}{T_2^k}\operatorname{card}\{a_n\in Q(\alpha,T_2)\}\right|$$
$$< C'\left(\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}\right)+2Mk\frac{1}{T_1}< C''\left(\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}\right) \quad \text{для любого } \alpha\in\mathbb{R}^k. \tag{11}$$
Таким образом, для любых $T_1, T_2>\dfrac{2C''}{\varepsilon}$
$$\left|\frac{1}{T_1^k}\operatorname{card}\{a_n\in Q(\alpha,T_1)\}-\frac{1}{T_2^k}\operatorname{card}\{a_n\in Q(\alpha,T_2)\}\right|<\varepsilon \text{ для любого } \alpha\in\mathbb{R}^k.$$
По критерию Коши это эквивалентно существованию конечного предела
$$\lim_{T\to\infty}\frac{\operatorname{card}\{a_n\in Q(\alpha,T)\}}{T^k}=:\Delta$$
равномерно по $\alpha\in\mathbb{R}^k$.

Осталось показать, что $\Delta\neq 0$. Пусть L то же, что и в (2). По утверждению 2, в кубе $Q(\mathbf{0},R)$ содержится не менее $\left[\dfrac{R}{2L}\right]^k$ точек д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Переходя к пределу при $R\to\infty$, получим, что плотность этого д.м.м. не менее $(2L)^{-k}>0$. Теорема доказана.

III. Связь с равномерно протяженными множествами М.Лашковича

Напомним, что д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^k$ называется *равномерно протяженным* с плотностью α, если существует такое число $\alpha > 0$, что

$$dist(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \alpha^{-1/k}\mathbb{Z}^k) < \infty.$$

Для равномерно протяженных множеств справедлива следующая
Теорема [М.Лашкович [3]]. Для любого д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^k$ и для любой константы α следующие условия эквивалентны:

1) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — равномерно протяженное д.м.м. с плотностью α.

2) существует положительная константа C такая, что неравенство

$$|\mathrm{card}\{a_n \in H\} - \alpha m_k(H)| \leq C m_{k-1}(\partial H) \tag{12}$$

выполнено для любого множества H в $\mathbb{R}^k$, являющегося конечным объединением единичных кубов.

3) существует положительная константа C такая, что неравенство

$$|\mathrm{card}\{a_n \in H\} - \alpha m_k(H)| \leq C p(H),$$

где $p(H) = m_k(\{x \in \mathbb{R}^k \mid dist(x, \partial H) \leq 1\})$, выполнено для любого ограниченного измеримого множества $H \subset \mathbb{R}^k$.

Теорема 6. a) Д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ обладает S-свойством тогда и только тогда, когда оно является равномерно протяженным.

b) Плотность α равномерно протяженного д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ совпадает с величиной Δ из (7).

Доказательство. Как было показано в разделе I, равномерно протяженные множества обладают S-свойством. Покажем, что верно и обратное. Отметим, что утверждение 2) теоремы Лашковича в случае, когда H — произвольный куб в $\mathbb{R}^k$, доказано, по существу, в утверждении 1.

Пусть д.м.м. $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ обладает S-свойством и имеет плотность α. Обозначим $a_n = \sqrt[k]{\alpha} b_n$. Тогда $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ обладает S-свойством и имеет плотность 1. Покажем, что $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ является равномерно протяженным с плотностью 1. Отсюда, очевидно, следует, что д.м.м. $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — равномерно протяженное с плотностью α, т.е. пункт b) теоремы.

Выберем такое целое $L < \infty$, что для любого $v \in \mathbb{R}^k$ и некоторой биекции $\sigma_v : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |(a_n + v) - a_{\sigma_v(n)}| \leq L. \tag{13}$$

По теореме 4 существует такое $M < \infty$, что число точек д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ в любом кубе с ребром 1 не превосходит M. Зафиксируем кратное L целое число R, $R > 2{\cdot}6^k M L^{k+1}$. Представим $\mathbb{R}^k$ как объединение непересекающихся кубов $Q(iR, R),\ i \in \mathbb{Z}^k$:

$$\mathbb{R}^k = \bigsqcup_{i\in\mathbb{Z}^k} Q(iR, R). \tag{14}$$

Рассмотрим произвольное $v \in \mathbb{Z}^k$ и соответствующую ему по (13) биекцию σ_v. Заметим, что, т.к. $R > L$, то ввиду (13) включение $a_{\sigma_v(n)} \in Q(iR, R)$, где $a_n \in Q((j+v)R, R)$, может иметь место только для таких j, что $\|j-i\| \le 1$. Для любых $i, j \in \mathbb{Z}^k$ таких, что $\|j-i\| = 1$, обозначим через $C^v_{i,j}$ количество точек д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ в $Q(iR, R)$, которым при биекции σ_v соответствуют точки д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ в $Q((j+v)R, R)$. Тогда $C^v_{j,i}$ — количество точек д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ в $Q(jR, R)$, которым при биекции σ_v соответствуют точки д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ в $Q((i+v)R, R)$. Для любого i справедливо равенство

$$\mathrm{card}\{a_n \in Q((i+v)R, R)\} = \mathrm{card}\{a_n \in Q(iR, R)\} - \sum_{j:\|j-i\|=1} C^v_{i,j} + \sum_{j:\|j-i\|=1} C^v_{j,i}. \tag{15}$$

Просуммируем обе части равенства по $v \in [0, T)^k \bigcap \mathbb{Z}^k$ и разделим на T^k. Ввиду (13), для любых $i, j, v \in \mathbb{Z}^k$ $C^v_{i,j}$ не превосходит максимального количества точек д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ в параллелепипеде, одно ребро которого равно L, а остальные R, т.е. $C^v_{i,j} \le MLR^{k-1}$. Следовательно, усреднения $C_{i,j}$ также ограничены:

$$C_{i,j} \le MLR^{k-1} \quad \text{для любых} \;\; i, j \in \mathbb{Z}^k. \tag{16}$$

Поэтому из каждой последовательности усредненных значений можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, т.е. существует подпоследовательность $T_p \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ такая, что выражение

$$\mathrm{card}\{a_n \in Q(iR, R)\} - \frac{1}{(T_p)^k} \sum_{\substack{v\in[0,T_p)^k \bigcap \mathbb{Z}^k \\ j:\|j-i\|=1}} C^v_{i,j} + \frac{1}{(T_p)^k} \sum_{\substack{v\in[0,T_p)^k \bigcap \mathbb{Z}^k \\ j:\|j-i\|=1}} C^v_{j,i}$$

для любого $i \in \mathbb{Z}^k$ сходится при $p \to \infty$ к величине

$$\mathrm{card}\{a_n \in Q(iR, R)\} - \sum_{j:\|j-i\|=1} C_{i,j} + \sum_{j:\|j-i\|=1} C_{j,i},$$

где $C_{i,j} = \lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{1}{(T_p)^k} \sum\limits_{v\in[0,T_p)^k \bigcap \mathbb{Z}^k} C^v_{i,j}$. В левой части (15) по теореме 5 получим

$$\lim_{p\to\infty} \sum_{v\in[0,T_p)^k \bigcap \mathbb{Z}^k} \frac{\mathrm{card}\{a_n \in Q(vR, R)\}}{(T_p)^k} = 1 \cdot R^k.$$

Имеем:

$$R^k = \mathrm{card}\{a_n \in Q(iR, R)\} - \sum_{j:\|j-i\|=1} C_{i,j} + \sum_{j:\|j-i\|=1} C_{j,i}.$$

Положим $D_{i,j} := C_{i,j} - C_{j,i}$. Тогда для любых $i, j \in \mathbb{Z}^k$ выполнены равенства:

$$D_{i,j} = -D_{j,i}, \tag{17}$$

$$R^k = \operatorname{card}\{a_n \in Q(iR, R)\} - \sum_{j:\|j-i\|=1} D_{i,j}. \tag{18}$$

Предположим, что для любых i, j можно найти такие целые числа $\widetilde{D}_{i,j}$, что

$$\widetilde{D}_{i,j} = -\widetilde{D}_{j,i}, \tag{19}$$

$$\sum_{j:\|j-i\|=1} D_{i,j} = \sum_{j:\|j-i\|=1} \widetilde{D}_{i,j}, \tag{20}$$

$$|\widetilde{D}_{i,j}| \le |[D_{i,j}]| + 1. \tag{21}$$

Ввиду (16) и (21), $|\widetilde{D}_{i,j}| \le MLR^{k-1} + 1$ для любых $i, j \in \mathbb{Z}^k$, поэтому

$$\sum_{j:\|j-i\|=1,\, j\ne i} |\widetilde{D}_{i,j}| \le (3^k - 1)(MLR^{k-1} + 1).$$

По утверждению 2 в кубе с ребром R содержится не менее $\left(\frac{R}{2L}\right)^k$ точек д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. По выбору R имеем $R^k > 2 \cdot 6^k ML^{k+1} R^{k-1}$, следовательно,

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^k > 2 \cdot 3^k MLR^{k-1} > (3^k - 1)(MLR^{k-1} + 1) \ge \sum_{j:\|j-i\|=1} |\widetilde{D}_{i,j}|. \tag{22}$$

Для каждой пары индексов (i, j), для которых $\widetilde{D}_{i,j} > 0$, поставим во взаимооднозначное соответствие $\widetilde{D}_{i,j}$ точкам д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \bigcap Q(iR, R)$ столько же точек д.м.м. $\mathbb{Z}^k \bigcap Q(jR, R)$. Ввиду (22) это можно сделать так, что для любых пар (i, j) и (i, j') при $j \ne j'$, $\widetilde{D}_{i,j} > 0$, $\widetilde{D}_{i,j'} > 0$, соответствие устанавливается для различных точек д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, а для любых пар (i, j) и (i', j) при $i \ne i'$, $\widetilde{D}_{i,j} > 0$, $\widetilde{D}_{i',j} > 0$, соответствие устанавливается для различных точек д.м.м. $\mathbb{Z}^k$. Наконец, ввиду (18), (19) и (20), для каждого i число "незадействованных" точек д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \bigcap Q(iR, R)$ совпадает с числом "незадействованных" точек д.м.м. $\mathbb{Z}^k \bigcap Q(iR, R)$, поэтому между ними также можно установить взаимооднозначное соответствие. Таким образом, построена такая биекция σ между д.м.м. $\mathbb{Z}^k$ и д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, что

$$\sup_{i\in\mathbb{Z}^k} |i - a_{\sigma(i)}| < 2\sqrt{k}R.$$

Осталось показать, что для любых $i, j \in \mathbb{Z}^k$ можно найти такие целые числа $\widetilde{D}_{i,j}$, для которых выполнены условия (19), (20) и (21).

Введем следующие обозначения: последовательность пар $\ldots (i_1, i_2), (i_2, i_3), (i_3, i_4), \ldots$ (конечную или бесконечную в одну или обе стороны) назовем *цепью*, если число $D_{i_k, i_{k+1}}$ не целое для любой пары из последовательности. Конечную цепь $(i_0, i_1), (i_1, i_2), \ldots, (i_{p-1}, i_p)$ назовем *циклом*, если $i_0 = i_p$. Заметим, что если в цикле заменить все $D_{i_k, i_{k+1}}$ на $D'_{i_k, i_{k+1}} = D_{i_k, i_{k+1}} - \theta$, где

$\theta \in \mathbb{R}$ (и, соответственно, D_{i_{k+1},i_k} на $D'_{i_{k+1},i_k} = D_{i_{k+1},i_k} + \theta$), то условия (17) и (18) сохраняются. Докажем, что это можно сделать таким образом, что $[D_{i,j}] \le D'_{i,j} \le [D_{i,j}] + 1$ для любых $i, j \in \mathbb{Z}^k$ и при этом в наборе $\{D'_{i,j}\}$ не будет ни одного цикла. Для этого перенумеруем все циклы: $c_1, c_2, \ldots$. Пусть $c_1 = \{(i_0, i_1), \ldots, (i_{p-1}, i_p)\}$. Положим δ равным минимуму дробных частей чисел D_{i_{l-1},i_l}, $l = \overline{1,p}$. Теперь, проводя указанную выше замену, приходим к набору $\{D'_{i,j}\}$, в котором для одной из пар (i_{l-1}, i_l), $l = \overline{1,p}$, число D_{i_{l-1},i_l} целое, поэтому цикла c_1 уже нет. При этом $[D_{i,j}] \le D'_{i,j} \le [D_{i,j}] + 1$ для всех пар (i, j). Если циклов конечное число, то за конечное число шагов придем к набору $\{\widehat{D}_{i,j}\}$, не содержащему циклов и удовлетворяющему (19)-(21). Если же циклов бесконечное число, то мы построим последовательность наборов $\left(D^{(p)}_{i,j}\right)_{p=1}^{\infty}$, для которых

$$[D_{i,j}] \le D^{(p)}_{i,j} \le [D_{i,j}] + 1 \quad \text{для всех } i, j \in \mathbb{Z}^k. \tag{23}$$

Значит, для каждой пары (i, j) существует подпоследовательность p_s, для которой

$$D^{(p_s)}_{i,j} \underset{s\to\infty}{\longrightarrow} \widehat{D}_{i,j}. \tag{24}$$

Применяя диагональный процесс, получим подпоследовательность, для которой (24) выполнено для любых $i, j \in \mathbb{Z}^k$, следовательно, предельный набор $\{\widehat{D}_{i,j}\}$ удовлетворяет (19)-(21), неравенству

$$[D_{i,j}] \le \widehat{D}_{i,j} \le [D_{i,j}] + 1 \quad \text{для всех } i, j \in \mathbb{Z}^k. \tag{25}$$

и не имеет циклов. При этом из (25) следует, что

$$[\widehat{D}_{i,j}] = [D_{i,j}] \quad \text{для всех } i, j \in \mathbb{Z}^k. \tag{26}$$

Для удобства вновь переобозначим $\widehat{D}_{i,j}$ через $D_{i,j}$. Ввиду (26) попрежнему требуется для любых $i, j \in \mathbb{Z}^k$ найти такие целые числа $\widetilde{D}_{i,j}$, для которых выполнены условия (19), (20) и (21).

Рассмотрим граф с вершинами $i \in \mathbb{Z}^k$ и ребрами (i, j) такими, что $D_{i,j}$ — дробное число. Пусть Γ — произвольная связная компонента этого графа. По доказанному, Γ есть дерево, т.е. не содержит циклов.

Рассмотрим некоторую вершину j_1 дерева Γ. Для любого $j \in \Gamma : \|j - j_1\| = 1$, положим $D'_{j_1,j} = [D_{j_1,j}]$. Пусть сумма дробных частей чисел $D_{j_1,j}$ равна N_1. Из (18) следует, что N_1 — целое число. Так как $\#\{j \in \Gamma : \|j_1 - j\| = 1\} > N_1$, то можно добавить по единице к произвольным N_1 числам $D'_{j_1,j}$, $j \in \Gamma : \|j_1 - j\| = 1$. Получившиеся в результате числа обозначим через $\widetilde{D}_{j_1,j}$. Тогда

$$\sum_{j\in\Gamma:\|j-j_1\|=1} \widetilde{D}_{j_1,j} = \sum_{j\in\Gamma:\|j-j_1\|=1} [D_{j_1,j}] + N_1 = \sum_{j\in\Gamma:\|j-j_1\|=1} D_{j_1,j}.$$

Каждое из чисел $D_{j_1,j}$, $j \in \Gamma : \|j - j_1\| = 1$, было изменено не более, чем на единицу. Поэтому

$$|\widetilde{D}_{j_1,j}| \le |[D_{j_1,j}]| + 1 \quad \text{для любого } j \in \Gamma : \|j - j_1\| = 1.$$

Положим

$$\widetilde{D}_{j,j_1} := -\widetilde{D}_{j_1,j} \quad \text{для любого } j \in \Gamma : \|j - j_1\| = 1.$$

При этом, очевидно,

$$|\widetilde{D}_{j,j_1}| \le |[D_{j,j_1}]| + 1 \quad \text{для любого } j \in \Gamma : \|j - j_1\| = 1.$$

В качестве j_2 возьмем любую вершину j дерева Γ со свойством $\|j - j_1\| = 1$. Вообще, в качестве j_r возьмем любую незанумерованную еще вершину j дерева Γ, для которой выполнено $\|j_s - j\| = 1$ для некоторого $s < r$.

Заметим, что в случае $\widetilde{D}_{j_1,j} = [D_{j_1,j}]$ мы имеем $\widetilde{D}_{j,j_1} = [D_{j,j_1}] + 1$, а в случае $\widetilde{D}_{j_1,j} = [D_{j_1,j}] + 1$ мы имеем $\widetilde{D}_{j,j_1} = [D_{j,j_1}]$.

Пусть $\widetilde{D}_{j_2,j_1} = [D_{j_2,j_1}]$. Для любого $j \in \Gamma : \|j - j_2\| = 1$, $j \ne j_1$, положим $D'_{j_2,j} = [D_{j_2,j}]$. Пусть сумма дробных частей чисел $D_{j_2,j}$, $j \in \Gamma : \|j - j_2\| = 1$, равна N_2. Из (18) следует, что N_2 — целое число. Так как $\#\{j \in \Gamma : \|j_2 - j\| = 1\} > N_2$, то можно добавить по единице к произвольным N_2 числам $D'_{j_2,j}$, $j \in \Gamma : \|j_2 - j\| = 1$, $j \ne j_1$. Получившиеся в результате числа обозначим через $\widetilde{D}_{j_2,j}$, $j \in \Gamma : \|j_2 - j\| = 1$, $j \ne j_1$. Тогда

$$\sum_{j\in\Gamma:\|j-j_2\|=1} \widetilde{D}_{j_2,j} = \widetilde{D}_{j_2,j_1} + \sum_{\substack{j\in\Gamma:\|j-j_2\|=1,\\ j\ne j_1}} \widetilde{D}_{j_2,j}$$

$$= [D_{j_2,j_1}] + \sum_{\substack{j\in\Gamma:\|j-j_2\|=1,\\ j\ne j_1}} [D_{j_2,j}] + N_2 = \sum_{j\in\Gamma:\|j-j_2\|=1} D_{j_2,j}.$$

Пусть $\widetilde{D}_{j_2,j_1} = [D_{j_2,j_1}]+1$. Для любого $j \in \Gamma : \|j - j_2\| = 1$, $j \ne j_1$, положим $D'_{j_2,j} = [D_{j_2,j}]$. Пусть по-прежнему N_2 есть сумма дробных частей чисел $D_{j_2,j}$, $j \in \Gamma : \|j - j_2\| = 1$. Как и ранее, N_2 — целое число. Очевидно, что $N_2 \ge 1$ и $\#\{j \in \Gamma : \|j_2 - j\| = 1\} > N_2$, поэтому можно добавить по единице к произвольным $N_2 - 1$ числам $D'_{j_2,j}$, $j \in \Gamma : \|j_2 - j\| = 1$, $j \ne j_1$. Получившиеся в результате числа обозначим через $\widetilde{D}_{j_2,j}$, $j \in \Gamma : \|j_2 - j\| = 1$, $j \ne j_1$. Тогда

$$\sum_{j\in\Gamma:\|j-j_2\|=1} \widetilde{D}_{j_2,j} = \widetilde{D}_{j_2,j_1} + \sum_{\substack{j\in\Gamma:\|j-j_2\|=1,\\ j\ne j_1}} \widetilde{D}_{j_2,j}$$

$$= [D_{j_2,j_1}] + 1 + \sum_{\substack{j\in\Gamma:\|j-j_2\|=1,\\ j\ne j_1}} [D_{j_2,j}] + N_2 - 1 = \sum_{j\in\Gamma:\|j-j_2\|=1} D_{j_2,j}.$$

Каждое из чисел $D_{j_2,j}$, $j \in \Gamma : \|j - j_2\| = 1, j \neq j_1$, было изменено не более, чем на единицу. Поэтому

$$|\widetilde{D}_{j_2,j}| \leq |[D_{j_2,j}]| + 1 \quad \text{для любого } j \in \Gamma : \|j - j_2\| = 1.$$

Положим

$$\widetilde{D}_{j,j_2} := -\widetilde{D}_{j_2,j} \quad \text{для любого } j \in \Gamma : \|j - j_2\| = 1.$$

При этом, очевидно,

$$|\widetilde{D}_{j,j_2}| \leq |[D_{j,j_2}]| + 1 \quad \text{для любого } j \in \Gamma : \ \|j - j_2\| = 1.$$

Проведем аналогичную процедуру для каждой вершины каждой связной компоненты Γ графа. Заметим, что, ввиду отсутствия циклов, числа $D_{i,j}$ мы изменяем только один раз — при рассмотрении вершины $\min\{i,j\}$. Таким образом, для любых i, j существуют такие целые числа $\widetilde{D}_{i,j}$, для которых выполнены условия (19), (20) и (21). Теорема доказана.

Следствие. Если два д.м.м. имеют одинаковую плотность, то расстояние между ними конечно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рашковский А.Ю., Ронкин Л.И. и Фаворов С.Ю. О почти-периодических множествах в комплексной плоскости.// Доповіді Національної академії Наук України. - 1998. - Н.12. - С.37-39.

2. Favorov S.Yu. Sunyer-i-Balaguer's Almost Elliptic Functions and Yosida's Normal Functions J. Anal. Math. 104 (2008), 307-340.

3. Laczkovich M. Uniformly spread discrete sets in $\mathbb{R}^d$. J.London Math.Soc. (2) 46 (1992), p.39-57.

4. Laczkovich M. Equidecomposability and discrepancy; a solution of Tarski's circle-squaring problem. J. reine Angew. Math. 404 (1990), 77-117.

5. Кадец В.М. Курс функционального анализа, ХНУ имени В.Н.Каразина, 2006. -600с., с.294.

6. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. - М., Мир, 1975, с.50.