Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.9 № 826, 2008, с.38–51

Проблеми керованості для рівняння струни та тригонометрична проблема моментів Маркова

К.С. Халіна

ФТІНТ ім. Б. І. Вєркіна НАНУ, Харків, Україна

У цій роботі досліджується проблема керованості для хвильового рівняння на відрізку, керованого крайовими умовами. Релейні керування, що розв'язують проблему ε-керованості цього рівняння, побудовано за допомогою розв'язків тригонометричної проблеми моментів Маркова. Крім цього, дана оцінка похибки обчислення та точності влучення для кінцевого стану керованої системи.

2000 Mathematics Subject Classification 93B05, 35B37, 35L05.

Вступ

Як відомо, проблеми керованості для гіперболічних рівнянь розглядаються зараз в роботах багатьох математиків (див, напр., бібліографію в [1]).

У цій роботі досліджується крайова L^∞-керованість хвильового рівняння на скінченому відрізку за просторовою змінною. В більшості робіт, в яких вивчалося таке рівняння, досліджується L^p-керованість $(2 \le p \le \infty)$ [2]—[7], але лише L^∞-керування можуть бути практично реалізовані. Відмінність цієї роботи полягає у тому, що керування обмежені наперед заданою константою. Таке обмеження виправдовується практичними міркуваннями. Крайова L^∞-керованість хвильового рівняння на відрізку з обмеженими наперед заданою константою керуваннями розглянута у [8]. Дана робота продовжує розпочаті дослідження.

У [8] одержані формули для керувань, які розв'язують проблему 0-керованості хвильового рівняння на відрізку, і вони є досить складними для практичної реалізації. Також у [8] показано, що розв'язки тригонометричних проблем моментів Маркова, які побудовані за даними керованої системи, є розв'язками проблеми ε-керованості для цієї системи. Як відомо, серед розв'язків тригонометричних проблем моментів Маркова є релейні керування (див. [9]), які з практичної точки зору є найкращими для реалізації. Тому в даній роботі для розв'язання побудованих тригонометричних проблем моментів Маркова використовуються результати, одержані в [9], які дають алгоритм пошуку цих керувань. Таким чином одержуються релейні керування, що розв'язують проблему ε-керованості для хвильового рівняння на відрізку.

При застосуванні на практиці наведеного алгоритму точки перемикання релейних керувань, як правило, обчислюються з деякою похибкою, що призводить до неточного визначення кінцевого стану керованої системи. Тому в роботі дається оцінка цієї похибки визначення кінцевого стану системи.

1. Умови керованості для рівняння струни

Розглянемо хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad x \in (0,\pi),\ t \in (0,T),\ T > 0, \tag{1.1}$$

з початковими умовами

$$\begin{cases} w(x,0) &= w_0^0(x) \\ \frac{\partial w(x,0)}{\partial t} &= w_1^0(x) \end{cases}, \qquad x \in (0,\pi), \tag{1.2}$$

крайовими умовами

$$w(0,t) = u_0(t),\ w(\pi,t) = u_\pi(t), \qquad t \in (0,T), \tag{1.3}$$

та умовами влучення

$$\begin{cases} w(x,T) &= w_0^T(x) \\ \frac{\partial w(x,T)}{\partial t} &= w_1^T(x) \end{cases}, \qquad x \in (0,\pi). \tag{1.4}$$

Керування u_0, u_π задовольняють умову

$$u_j \in \mathcal{B}(0,T) = \left\{ v \in L^\infty(0,T) \mid |v(t)| \le 1 \text{ майже скрізь на } (0,T) \right\}, \quad j = 0,\pi.$$

Усі функції, що розглядаються в (1.1)—(1.4), визначені на скінченому відрізку. Ми будемо вважати, що такі функції визначені на $\mathbb{R}$ та набувають значення 0 на доповненні в $\mathbb{R}$ своєї області визначення.

У роботі використовуються наступні функціональні простори. $\mathcal{S}$ — це простір Шварца [10]: $\mathcal{S} = \Big\{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) : \forall m \in \{\mathbb{N} \cup 0\}\ \forall l \in \{\mathbb{N} \cup 0\}\ \exists C_{ml} > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}\ \left|\varphi^{(m)}(x)\left(1+|x|^2\right)^l\right| \le C_{ml}\Big\}$, та $\mathcal{S}'$ — простір узагальнених функцій над $\mathcal{S}$. Послідовність $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{S}$ називається збіжною в $\mathcal{S}$, якщо $\forall m \in \mathbb{N}$ $\forall l \in \mathbb{N}$ $\{\exists C_{ml}\ \forall n \in \mathbb{N}\ |x^l \varphi^{(m)}(x)| \le C_{ml}$ та $x^l \varphi^{(m)}(x) \rightrightarrows 0$ коли $n \to \infty$ в $\mathbb{R}\}$. Під збіжністю в $\mathcal{S}'$ розуміється слабка збіжність.

Як і в [8],позначимо через H_l^s наступні простори Соболева [11, гл. 1]:

$$H_l^s = \left\{\varphi \in \mathcal{S}' : \left(1+|x|^2\right)^{l/2}\left(1+|D|^2\right)^{s/2}\varphi \in L^2(\mathbb{R})\right\},$$

$$H_l^s[a,b] = \{\varphi \in H_l^s : \operatorname{supp}\varphi \subset [a,b]\},$$

$$\|\varphi\|_l^s = \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\left(1+|x|^2\right)^{l/2}\left(1+|D|^2\right)^{s/2}\varphi(x)\right|^2 dx\right)^{1/2}.$$

$$\widetilde{H}_l^s = \left\{\varphi \in H_l^s \times H_l^{s-1} : \varphi \text{ – непарна, } 2\pi\text{-періодична }\right\}, \quad \varphi = \begin{pmatrix}\varphi_0\\ \varphi_1\end{pmatrix}.$$

$$\widetilde{H}_l^s[a,b] = H_l^s[a,b] \times H_l^{s-1}[a,b],$$

$$|\!|\!|\varphi|\!|\!|_l^s = \left(\left(\|\varphi_0\|_l^s\right)^2 + \left(\|\varphi_1\|_l^{s-1}\right)^2\right)^{1/2};$$

де $D = -id/dx$.
Вважається, що завжди $l < -1/2$, $s \le 0$, якщо явно не вказано інше.

Позначимо $w^0 = \begin{pmatrix} w_0^0\\ w_1^0\end{pmatrix} \in \widetilde{H}_0^s[0,\pi]$, $w^T = \begin{pmatrix} w_0^T\\ w_1^T\end{pmatrix} \in \widetilde{H}_0^s[0,\pi]$ — дійсні функції. Розв'язки системи (1.1)—(1.4) дійсні і належать простору H_0^s.

Наведемо основні результати, що були доведені у [8], на які буде спиратися дана робота. Введемо два оператора: $\Omega : \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}'$— оператор непарного продовження, тобто $(\Omega f)(x) = f(x) - f(-x)$, $f \in \mathcal{S}'$, $\operatorname{supp} f \subset [0,+\infty)$ та $\Xi : \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}'$ — оператор парного продовження: $(\Xi f)(x) = f(x) + f(-x)$,$f \in \mathcal{S}'$, $\operatorname{supp} f \subset [0,+\infty)$. Розглянемо непарні 2π-періодичні продовження (за x) функцій, що входять до керованої системи (1.1)—(1.4).

$$\mathrm{w}(\cdot,t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{2\pi k}\Omega\begin{pmatrix} w(\cdot,t)\\ \frac{\partial w(\cdot,t)}{\partial t}\end{pmatrix}, \quad t \in (0,T),$$

$$\mathrm{w}^0 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{2\pi k}\Omega w^0, \qquad \mathrm{w}^T = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{2\pi k}\Omega w^T,$$

де $\mathcal{T}_h$ — оператор зсуву: $(\mathcal{T}_h\varphi)(x) = \varphi(x+h)$, $\varphi \in \mathcal{S}$, та $(\mathcal{T}_h f, \varphi) = (f, \mathcal{T}_{-h}\varphi)$, $f \in \mathcal{S}'$, $\varphi \in \mathcal{S}$.
У роботі [8] показано, що $\mathrm{w}^0, \mathrm{w}^T \in \widetilde{H}_l^s$, $\mathrm{w}(\cdot,t) \in \widetilde{H}_l^s$ $(t \in (0,T))$.

Як легко бачити, задача (1.1) — (1.3) з умовами влучення (1.4) може бути зведена до задачі

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial t} &= \begin{pmatrix} 0 & 1\\ (\partial/\partial x)^2 & 0\end{pmatrix}\mathrm{w} - 2u_0(t)\sum_{k\in\mathbb{Z}}\begin{pmatrix} 0\\ \delta'(x+2\pi k)\end{pmatrix}\\ &+ 2u_\pi(t)\sum_{k\in\mathbb{Z}}\begin{pmatrix} 0\\ \delta'(x-\pi+2\pi k)\end{pmatrix}, \qquad x\in\mathbb{R},\ t\in(0,T), \quad (1.5)\\ \mathrm{w}(x,0) &= \mathrm{w}^0(x), \qquad x\in\mathbb{R}, \quad (1.6)\end{aligned}$$

з умовами влучення

$$\mathrm{w}(x,T) = \mathrm{w}^T(x), \qquad x\in\mathbb{R}, \quad (1.7)$$

де δ — функція Дірака.

У [8] одержано явну формулу, що пов'язує керування, початковий та кінцевий стани системи (1.5)—(1.7):

$$\mathrm{w}^T(x) = \mathcal{E}(x,T) * \left[\mathrm{w}^0(x) - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{2\pi k} \begin{pmatrix} (\Omega u_0)(x) - (\Omega u_\pi)(x-\pi) \\ (\Omega(u_0'))(x) - (\Omega(u_\pi'))(x-\pi) \end{pmatrix} \right], \quad (1.8)$$

де $*$ означає згортку за x,

$$\mathcal{E}(x,t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \delta(x+t) + \delta(x-t) & \frac{1}{2}(\operatorname{sign}(x+t) - \operatorname{sign}(x-t)) \\ -\delta'(x+t) + \delta'(x-t) & \delta(x+t) + \delta(x-t) \end{pmatrix}.$$

Ця формула дозволяє дослідити не тільки проблему 0-керованості, але й проблему ε-керованості.

Позначимо $\mathcal{R}_T(w^0)$ множину станів $w^T \in \widetilde{H}_0^s[0,\pi]$, для яких існують керування $u_j \in \mathcal{B}(0,T)$, $j = 0,\pi$ такі, що задача (1.5)—(1.7) з $\mathrm{w}^\beta = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{2\pi k}\Omega w^\beta$, $\beta = 0, T$ має єдиний розв'язок в $\widetilde{H}_l^s$.

Означення 1. Стан $w^0 \in \widetilde{H}_0^s[0,\pi]$ називається 0-керованим за час T, якщо 0 належить $\mathcal{R}_T(w^0)$, та ε-керованим за час T, якщо 0 належить замиканню $\mathcal{R}_T(w^0)$ в $\widetilde{H}_0^s[0,\pi]$.

Згідно з [8], позначимо $\overline{H}_0^s[-\pi,\pi] = \{\varphi \in H_0^s : \operatorname{supp}\varphi \in [-\pi,\pi]\}$. Введемо також оператор диференціювання $\partial : \overline{H}_0^s[-\pi,\pi] \longrightarrow \overline{H}_0^{s-1}[-\pi,\pi]$ з областю визначення $D(\partial) = \{\varphi \in \overline{H}_0^s[-\pi,\pi] : \varphi$ — парна $\}$. Тоді $Im(\partial) = \{\varphi \in \overline{H}_0^{s-1}[-\pi,\pi] : \varphi$— непарна $\}$. В [8] доведено, що він є лінійним неперервним оператором, та має обернений: $\partial^{-1} : \overline{H}_0^{s-1}[-\pi,\pi] \longrightarrow \overline{H}_0^s[-\pi,\pi]$, $D(\partial^{-1}) = Im(\partial)$, $Im(\partial^{-1}) = D(\partial)$.

У [8] доведено, що якщо $g \in \overline{H}_0^{s-1}[-\pi,\pi]$ — непарна, то існує $\widetilde{g} \in \overline{H}_0^s[-\pi,\pi]$ — парна і така, що $\widetilde{g}' = g$.

Це дозволяє ввести функцію: $\widetilde{w}_1^0(x) = \partial^{-1}\Omega w_1^0(x) \cdot H(x)$, де H – функція Хевісайда: $H(t) = 1$, якщо $t > 0$ та $H(t) = 0$, якщо $t \le 0$.

Також в [8] доведено наступний критерій 0- та ε-керованості системи (1.1)—(1.4):

Твердження 1.1. *Нехай $T > 0$, $w^0 \in \widetilde{H}_0^s(0,\pi)$ та нехай $K \in \mathbb{N}$ таке число, що $\pi(K-1) < T \le \pi K$. Тоді наступні твердження рівносильні*

(i) Стан w^0 є 0-керованим за час T;

(ii) Стан w^0 є ε-керованим за час T;

(iii) Виконано наступні три умови
$|\partial^{-1}\Omega w_1^0(x) \pm \Omega w_0^0(x) + \mu\left[\frac{T}{\pi K}\right]| \le 2K$ *м. с. на* $[-\pi,\pi]$, *для деякого* $\mu \in \mathbb{R}$,
$\operatorname{supp}\{H(x)\partial^{-1}\Omega w_1^0(x) + w_0^0\} \subset [0, T - \pi(K-1)]$,
$\operatorname{supp}\{H(x)\partial^{-1}\Omega w_1^0(x) - w_0^0\} \subset [\pi K - T, \pi]$.

Як вже було відмічено у вступі, системи вигляду (1.5)—(1.7) було розглянуто в багатьох роботах, зокрема в [2]—[8]. Серед них найближчою за результатами до роботи [8], продовженням якої є дана стаття, є робота [6]. Тому порівняємо результати цих робіт.

У [6] було розглянуто в просторах $W^{0,p}(0,L)\times W^{-1,p}(0,L)$ систему (1.5)—(1.7) при $\mathrm{w}^T=0$ з керуванням з L^p, ($p\in[2,+\infty)$, якщо $p=\infty$, то розв'язки системи розглядаються в $W^{0,2}(0,L)\times W^{-1,2}(0,L)$. Тут L — це довжина струни, у [8] $L=\pi$, що не є суттєвим обмеженням. У [6] розглянуто проблему оптимізації, а саме мінімізації L^p-норми керувань. Розв'язок цієї проблеми дає теорема 2.3 роботи [6], зокрема, наведено в явному вигляді керування, що розв'язують проблему оптимізації. Для розв'язання проблеми використано подання функцій, що входять в систему (1.5)—(1.7), тригонометричними рядами відносно тригонометричної системи $\left\{\sin\frac{\pi k}{L}t,\cos\frac{\pi k}{L}t\right\}$. Зв'язок між керуванням, початковим та кінцевим станом системи (1.5)—(1.7) задаються в [6] моментними рівностями відносно цієї тригонометричної системи. Таким чином, проблема оптимізації зводиться до тригонометричної проблеми моментів, після розв'язання якої одержують шукані керування.

На відміну від цього в роботі [8] досліджено проблеми 0- та ε-керованості системи (1.5)—(1.7) в $\widetilde{H}_l^s\times\widetilde{H}_l^{s-1}$, де $l<-1/2$, $s\le 0$, з керуваннями, обмеженими наперед заданою константою. Відмітимо, що простори $\widetilde{H}_l^s$ $(l<-1/2)$ та $W^{s,2}$ збігаються за запасом функцій та мають еквівалентні норми. В роботі [8] для одержання формули (1.8), що пов'язує керування, початковий та кінцевий стани системи (1.5)—(1.7), та дослідження 0- та ε-керованості використано метод перетворення Фур'є (для функціоналів з $\mathcal{S}'$). Окрім того, суттєвим тут є використання теореми Пелі-Вінера (про перетворення Фур'є фінітної функції) та її узагальнення на фінітні функціонали. Оскільки оператор згортки за x з $\mathcal{E}(x,t)$ є обмеженим в H_l^s та має обмежений обернений, формула (1.8) є зручним інструментом дослідження не тільки 0-керованості, а й ε-керованості системи (1.5)—(1.7), оскільки явно описує вплив керування та початкового стану на кінцевий стан.

Слід відмітити, шо якщо відмовитися від умов оптимальності в теоремі 2.3 роботи [6] та від обмежень на керування в теоремі 1.1 роботи [8], то на "перерізі"просторів, які розглядаються в цих роботах (тобто в $W^{0,2}\times W^{-1,2}$ для [6] та в $\widetilde{H}_l^0\times\widetilde{H}_l^{-1}$ для [8]), керування, що розв'язують проблему 0-керованості, одержані в цих роботах, фактично збігаються між собою.

Далі скрізь будемо позначати $\widetilde{w}_1^0(x)=H(x)\partial^{-1}\Omega w_1^0(x)+\mu\left[\frac{T}{\pi K}\right](H(x)-H(x-T))$. Розглянемо наступні 2π-періодичні функції:
$\mathrm{w}_0^0(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\mathcal{T}_{2\pi k}\Omega w_0^0(x)$, $\widetilde{\mathrm{w}}_1^0(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\mathcal{T}_{2\pi k}\Xi\widetilde{w}_1^0(x)$.

Визначимо число $K\in\mathbb{N}$ таке, що $\pi(K-1)<T\le\pi K$. Позначимо

$$\begin{aligned}\widehat{w}_0(x) &= \frac{1}{2K}(\widetilde{\mathrm{w}}_1^0(x)+\mathrm{w}_0^0(x))(H(x)-H(x-\pi K)),\\ \widehat{w}_\pi(x) &= \frac{1}{2K}(\widetilde{\mathrm{w}}_1^0(\pi-x)-\mathrm{w}_0^0(\pi-x))(H(x)-H(x-\pi K)).\end{aligned}$$

Введемо послідовність $\left\{\widehat{\omega}_\gamma^m\right\}_{m=-\infty}^{\infty}$ наступним чином:

$$\widehat{\omega}_\gamma^m = \int_0^{\pi K} \widehat{w}_\gamma(x) e^{i\frac{2mx}{K}}\, dx, \qquad m \in \mathbb{Z},\ \gamma = 0, \pi. \tag{1.9}$$

Розглянемо тепер для фіксованого $\gamma = 0, \pi$, та $N \in \mathbb{N}$ проблему пошуку $u_\gamma \in \mathcal{B}(0,T)$ такого, що

$$\int_0^T u_\gamma(x) e^{i\frac{2mx}{K}}\, dx = \widehat{\omega}_\gamma^m, \qquad m = \overline{-N, N}. \tag{1.10}$$

Така проблема називається тригонометричною проблемою моментів Маркова для скінченної послідовності $\left\{\widehat{\omega}_\gamma^m\right\}_{m=-N}^{N}$.

У [8] доведено наступну теорему:

Теорема 1.1. *Нехай $T > 0$, $s < -1/2$, для $w^0 \in \widetilde{H}_0^s(0,\pi)$ виконано умову (iii) твердження1.1, $K \in \mathbb{N}$ таке, що $\pi(K-1) < T \leq \pi K$. Нехай також $\left\{\widehat{\omega}_\gamma^m\right\}_{m=-\infty}^{+\infty}$ визначено за (1.9). Тоді для кожного $N \in \mathbb{N}$ існують $u_\gamma^N \in \mathcal{B}(0,T)$, $\gamma = 0, \pi$, — розв'язки тригонометричних проблем моментів Маркова (1.10) для цього N, та для кожного $\varepsilon > 0$ існує $N \in \mathbb{N}$ таке, що кінцевий стан w^T керованої системи (1.1)—(1.4) задовольняє умову $\left\|\left|w^T\right\|\right|_0^s \leq \varepsilon$, причому N визначається умовою $\frac{2^{s+6} P_s C_l^{2K} C_l^K N^{s+1/2}}{c_l^2 c_l^K K^{s-1}\sqrt{-2s-1}} < \varepsilon$.*

У цій теоремі використовуються наступні позначення: $c_l^M = (\pi M)^l \sqrt{2S_l - 1}$, $C_l^M = \sqrt{3 + 2(\pi M)^{2l} S_l}$, $S_l = \sum_{k=1}^{\infty} k^{2l}$, $P_s > 0$ — стала, для якої виконується нерівність: $\left\|\Omega^{-1} g\right\|_0^s \leq P_s \left\|g\right\|_0^s$, $g \in H_0^s$ — непарна. У роботі [8] показано, що така стала існує для $s \leq 0$.

Дана робота присвячена пошуку розв'язків тригонометричної проблеми моментів Маркова (1.10) які, за теоремою 1.1, будуть розв'язками задачі ε-керованості системи (1.1)—(1.4).

Спростимо формули (1.9). Позначимо

$$\int_0^\pi w_0^0(x) e^{i\frac{2mx}{K}}\, dx = \breve{\omega}_0^m, \quad \int_0^\pi \widetilde{w}_1^0(x) e^{i\frac{2mx}{K}}\, dx = \breve{\omega}_1^m, \qquad m \in \mathbb{Z}. \tag{1.11}$$

Виразимо $\widehat{\omega}_\gamma^m$ через $\breve{\omega}_0^m$ та $\breve{\omega}_1^m$, $\gamma = 0, \pi$.

Перепишемо рівності (1.9) у вигляді

$$\begin{aligned}
\widehat{\omega}_0^m &= \int_0^{\pi K} \widehat{w}_0(x) e^{i\frac{2mx}{K}} = \frac{1}{2K}\int_0^{\pi K} (\widetilde{\mathrm{w}}_1^0(x) + \mathrm{w}_0^0(x)) e^{i\frac{2mx}{K}}\, dx, \qquad m \in \mathbb{Z},\\
\widehat{\omega}_\pi^m &= \int_0^{\pi K} \widehat{w}_\pi(x) e^{i\frac{2mx}{K}} = \frac{1}{2K}\int_0^{\pi K} (\widetilde{\mathrm{w}}_1^0(\pi - x) - \mathrm{w}_0^0(\pi - x)) e^{i\frac{2mx}{K}}\, dx,\ m \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Маємо для $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$:

$$\int_0^{\pi K} \mathrm{w}_0^0(x) e^{i\frac{2mx}{K}}\,dx = \sum_{j=0}^{\left[\frac{K-1}{2}\right]} \int\limits_{2j\pi}^{(2j+1)\pi} w_0^0(x-2j\pi) e^{i\frac{2mx}{K}}\,dx -$$

$$- \sum_{j=1}^{\left[\frac{K}{2}\right]} \int\limits_{(2j-1)\pi}^{2j\pi} w_0^0(-x+2j\pi) e^{i\frac{2mx}{K}}\,dx = \breve{\omega}_0^m \sum_{j=0}^{\left[\frac{K-1}{2}\right]} e^{i\frac{4m}{K}j\pi} - \breve{\omega}_0^{-m} \sum_{j=1}^{\left[\frac{K}{2}\right]} e^{i\frac{4m}{K}j\pi}.$$

Для $m = 0$ одержуємо

$$\int_0^{\pi K} \mathrm{w}_0^0(x)\,dx = \sum_{j=0}^{\left[\frac{K-1}{2}\right]} \int\limits_0^{\pi} w_0^0(x)\,dx - \sum_{j=1}^{\left[\frac{K}{2}\right]} \int\limits_0^{\pi} w_0^0(x)\,dx = \begin{cases} 0, \ K\text{—парне} \\ \breve{\omega}_0^0, \ K\text{—непарне} \end{cases}.$$

Аналогічно обчислюємо відповідні інтеграли від $\widetilde{\mathrm{w}}_1^0(x) e^{i\frac{2mx}{K}}$.

Позначивши $s_K^1(m) = \sum\limits_{j=0}^{\left[\frac{K-1}{2}\right]} e^{i\frac{4m}{K}j\pi}$ та $s_K^2(m) = \sum\limits_{j=1}^{\left[\frac{K}{2}\right]} e^{i\frac{4m}{K}j\pi}$ одержуємо:

$$\begin{aligned} &\widehat{\omega}_0^m = \tfrac{1}{2K}\left[\left(\breve{\omega}_1^m + \breve{\omega}_0^m\right) s_K^1(m) + \left(\breve{\omega}_1^{-m} - \breve{\omega}_0^{-m}\right) s_K^2(m)\right], \ m \in \mathbb{Z}, \ m \neq 0, \\ &\widehat{\omega}_0^0 = \begin{cases} \tfrac{1}{2}\breve{\omega}_1^0, & K\text{— парне} \\ \tfrac{1}{2K}\left(\breve{\omega}_0^0 + K\breve{\omega}_1^0\right), & K\text{—непарне} \end{cases}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Розглядаючи $\mathrm{w}_0^0(\pi - x)$ та $\widetilde{\mathrm{w}}_1^0(\pi - x)$ як нові функції $g_0^0(x)$ та $\widetilde{g}_1^0(x)$ та проводячи аналогічні міркування, для $m \in \mathbb{Z}$ одержуємо

$$\begin{aligned} &\widehat{\omega}_\pi^m = \tfrac{1}{2K}\left[e^{i\frac{2m\pi}{K}}\left(\breve{\omega}_1^{-m} - \breve{\omega}_0^{-m}\right) s_K^1(m) + e^{-i\frac{2m\pi}{K}}\left(\breve{\omega}_1^m + \breve{\omega}_0^m\right) s_K^2(m)\right], \quad m \neq 0, \\ &\widehat{\omega}_\pi^0 = \widehat{\omega}_0^0. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Для $s_K^1(m)$ та $s_K^2(m)$ одержуємо:

$$s_K^1(m) = \begin{cases} \left[\frac{K-1}{2}\right] + 1, & m = \frac{lK}{2} \\ 0, \quad m \neq \frac{lK}{2}, \ K\text{— парне} \\ \frac{1}{1+e^{i\frac{2m\pi}{K}}}, & m \neq \frac{lK}{2}, \ K\text{— непарне} \end{cases}, \qquad l \in \mathbb{Z}, \tag{1.14}$$

$$s_K^2(m) = \begin{cases} \left[\frac{K}{2}\right], & m = \frac{lK}{2} \\ -\overline{s_K^1(m)}, & m \neq \frac{lK}{2} \end{cases}, \qquad l \in \mathbb{Z}. \tag{1.15}$$

Таким чином, $\widehat{\omega}_\gamma^m$ $(\gamma = 0, \pi)$ можна обчислювати за формулами (1.11)—(1.15) замість (1.9).

2. Тригонометрична проблема моментів Маркова та ε-керованість для рівняння струни

Далі будемо вважати, що умови критерію керованості (твердження 1.1) виконано. Зафіксуємо $\gamma = 0, \pi$, та визначимо послідовність $\left\{\widehat{\omega}_\gamma^m\right\}_{m=0}^N$, за формулами (1.11)—(1.15). Далі індекс γ будемо опускати.

Нехай $\breve{u}(x)$— це розв'язок проблеми (1.10) для послідовності $\{\widehat{\omega}^m\}_{m=0}^N$. Завдяки тому, що функції $\widehat{w}(x)$ та $\breve{u}(x)$ є дійсними, для $m = \overline{-N,-1}$ маємо: $\overline{\widehat{\omega}^m} = \widehat{\omega}^{-m}$. Звідси одержуємо, що якщо для функції $\breve{u}(x)$ рівності (1.10) виконано для $m = \overline{0,N}$, то для цієї ж функції їх виконано і для $m = \overline{-N,-1}$. Тому далі будемо розглядати проблему моментів для послідовності $\{\widehat{\omega}^m\}_{m=0}^N$:

$$\int_0^T u(t) e^{i\frac{2mt}{K}}\, dt = \widehat{\omega}^m, \quad m = \overline{0,N}. \tag{2.1}$$

З [12, гл. 7] відомо, що серед розв'язків системи (2.1) є функції виду

$$u(t) = \rho \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j+1} \left[H(t-t_j) - H(t-t_{j+1})\right], \tag{2.2}$$

так звані релейні керування, де $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < t_{n+1} = T \le \pi K$ — точки перемикання, константа $\rho = \pm 1$. Таким чином, задача пошуку керувань, що розв'язують проблему ε-керованості системи (1.1)—(1.4) за час T, зводиться до пошуку точок перемикання та визначення константи ρ. Для розв'язання проблеми моментів (2.1) використовуються результати, одержані в [9]. Керування (2.2) з $\rho = +1$ у [9] називається керуванням I-го роду, а з $\rho = -1$ — керуванням II-го роду.
Розглянемо рівності (2.1) для $m = \overline{1,N}$, та підставимо в них керування (2.2):

$$\begin{aligned}\int_0^T u(t) e^{i\frac{2mt}{K}}\, dt &= \rho \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j+1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} e^{i\frac{2mt}{K}}\, dt = \\ &= \rho \frac{K}{2im} \left((-1)^n - e^{i\frac{2m}{K}T} + 2\sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-j} e^{i\frac{2m}{K}t_j} \right).\end{aligned}$$

Тому система (2.1) для $m = \overline{1,N}$, еквівалентна системі

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-j+1} e^{i\frac{2m}{K}t_j} = \frac{1}{2}\left((-1)^n - e^{i\frac{2m}{K}T} - i\frac{2m}{\rho K}\widehat{\omega}^m \right), \quad m = \overline{1,N},$$

яка в свою чергу еквівалентна такій системі

$$\sum_{j=\frac{(-1)^n+1}{2}}^{n} (-1)^{n-j+1} e^{i\frac{2m}{K}t_j} = \frac{1}{2}\left(1 - e^{i\frac{2m}{K}T} - \rho i\frac{2m}{K}\widehat{\omega}^m \right), \quad m = \overline{1,N}.$$

Розглянувши тепер рівняння системи (2.1) для $m = 0$, одержуємо

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-j} t_j = \frac{1}{2}\left(T + \frac{\widehat{\omega}^0}{\rho}\right).$$

Таким чином система (2.1) еквівалентна наступній

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=\frac{(-1)^n+1}{2}}^{n} (-1)^{n-j+1} e^{i\frac{2m}{K}t_j} = \frac{1}{2}\left(1 - e^{i\frac{2m}{K}T} - i\rho\frac{2m}{K}\widehat{\omega}^m\right), \quad m = \overline{1,N}, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{n-j} t_j = \frac{1}{2}\left(T + \rho\widehat{\omega}^0\right). \end{cases}$$

Система такого вигляду досліджена В. І. Коробовим та Г. М. Скляром [9]. Для неї в цій роботі одержано метод визначення точок перемикання та константи ρ для оптимального керування, що переводить систему із однієї точки в іншу. Скористаємося їх методом з невеликою зміною: будемо визначати не мінімальний (як в [9]), а максимальний на відрізку $[0, T]$ час, так як в заданій задачі потрібно дослідити ε-керованість системи (1.1)—(1.4) за заданий час T.

Позначимо $\widehat{\omega} = \begin{pmatrix} \widehat{\omega}^0 \\ \vdots \\ \widehat{\omega}^N \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{N+1}$ і, згідно з [9], введемо позначення:

$$c_m(\widehat{\omega}, T, \rho) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{i\frac{2m}{K}T} - i\rho\frac{2m}{K}\widehat{\omega}^m\right), \qquad m = \overline{1,N},$$

$$\alpha(\widehat{\omega}, T, \rho) = \frac{1}{2}\left(T + \rho\widehat{\omega}^0\right), \qquad \alpha_0(\widehat{\omega}, T, \rho) = ie^{-\frac{i}{K}\alpha(\widehat{\omega}, T, \rho)}.$$

Введемо послідовності функцій $\{\alpha_j(\widehat{\omega}, T, \rho)\}_{j=1}^{N}$, для яких у [9] одержана рекуррентна формула:

$$\begin{aligned} \Delta_m &= \begin{vmatrix} \alpha_1(\widehat{\omega}, T, \rho) & 2\alpha_2(\widehat{\omega}, T, \rho) & \cdots & m\alpha_m(\widehat{\omega}, T, \rho) \\ \alpha_0(\widehat{\omega}, T, \rho) & \alpha_1(\widehat{\omega}, T, \rho) & \cdots & \alpha_{m-1}(\widehat{\omega}, T, \rho) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_1(\widehat{\omega}, T, \rho) \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^{m-1}\left(\alpha_0(\widehat{\omega}, T, \rho)\right)^m c_m(\widehat{\omega}, T, \rho), \quad m = \overline{1,N}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Покажемо, що члени цих послідовностей можуть бути підраховані за іншою формулою.

Лема 2.1. *Члени послідовностей $\{\alpha_j(\widehat{\omega}, T, \rho)\}_{j=1}^{N}$ можна обчислити за формулою*

$$\alpha_m(\widehat{\omega}, T, \rho) = \alpha_0(\widehat{\omega}, T, \rho)\frac{\lambda_m}{m}, \qquad m = \overline{1,N}, \tag{2.4}$$

де

$$\lambda_0 = 1,\ \lambda_1 = c_1(\widehat{\omega}, T, \rho),\ \lambda_m = \sum_{j=1}^{m-1} \frac{c_{m-j}(\widehat{\omega}, T, \rho)}{j}\lambda_j + c_m(\widehat{\omega}, T, \rho)\lambda_0, \quad m = \overline{2, N}. \tag{2.5}$$

Доведення. В доведенні будемо писати α_m замість $\alpha_m(\widehat{\omega}, T, \rho)$ та c_m замість $c_m(\widehat{\omega}, T, \rho)$.

Легко перевірити, що для $m = 1$ та $m = 2$ формули правильні. Нехай формула вірна для α_m. Доведемо, що вона вірна для α_{m+1}. Розглянемо

$$\Delta_{m+1} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & 2\alpha_2 & \cdots & (m-1)\alpha_{m-1} & m\alpha_m & (m+1)\alpha_{m+1} \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{m-2} & \alpha_{m-1} & \alpha_m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 \end{vmatrix},$$

Розкладаючи цей визначник на доданки за останнім рядком одержуємо лінійну комбінацію визначників на одиницю меншого порядку:

$$\Delta_{m+1} = \alpha_1\Delta_m - \alpha_0 Q_m^1,$$

де Q_m^1 — визначник, одержаний викреслюванням з визначника Δ_{m+1} останнього рядка і передостаннього стовпця. Знову розкладаючи визначник Q_m^1 за останнім рядком, одержуємо:

$$\Delta_{m+1} = \alpha_1\Delta_m - \alpha_0\alpha_2\Delta_{m-1} + (\alpha_0)^2 Q_{m-1}^2,$$

де Q_{m-1}^2 — визначник, одержаний викреслюванням з визначника Q_m^1 останнього рядка і передостаннього стовпця. І так далі. На m-му кроці одержуємо наступну формулу:

$$\Delta_{m+1} = \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j (\alpha_0)^j \alpha_{j+1}\Delta_{m-j} + (-1)^m(\alpha_0)^m(m+1)\alpha_{m+1}.$$

За (2.3) маємо $\Delta_{m+1} = (-1)^m(\alpha_0)^{m+1}c_{m+1}$. Таким чином

$$(-1)^m(\alpha_0)^m(m+1)\alpha_{m+1} = (-1)^m(\alpha_0)^{m+1}c_{m+1} - \sum_{j=0}^{m-1}(-1)^j(\alpha_0)^j\alpha_{j+1}\Delta_{m-j}.$$

Підставляючи вирази (2.4) замість α_{j+1} та (2.3) замість Δ_{m-j}, одержуємо

$$\begin{aligned} (-1)^m(\alpha_0)^m(m+1)\alpha_{m+1} &= (-1)^m(\alpha_0)^{m+1}c_{m+1} + \\ &+ (-1)^m(\alpha_0)^{m+1}\sum_{j=1}^{m} c_{m-j+1}\frac{\lambda_j}{j}, \end{aligned}$$

або $\alpha_{m+1} = \frac{\alpha_0}{m+1}\left(\sum\limits_{j=1}^{m} c_{m+1-j}\frac{\lambda_j}{j} + c_{m+1}\lambda_0\right).$

Порівнявши з формулами (2.4) та (2.5), можна стверджувати, що ці формули вірні для α_{m+1}. Лему доведено.

Отже, для розв'язання задачі знаходження точок перемикання та константи ρ застосовується наступний алгоритм, наведений у [9]:

Складемо матриці для $m = \overline{1, N}$:

$$A_m(\widehat{\omega}, T, \rho) = \begin{pmatrix} \alpha_0(\widehat{\omega}, T, \rho) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_1(\widehat{\omega}, T, \rho) & \alpha_0(\widehat{\omega}, T, \rho) & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_2(\widehat{\omega}, T, \rho) & \alpha_1(\widehat{\omega}, T, \rho) & \alpha_0(\widehat{\omega}, T, \rho) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_m(\widehat{\omega}, T, \rho) & \alpha_{m-1}(\widehat{\omega}, T, \rho) & \alpha_{m-2}(\widehat{\omega}, T, \rho) & \cdots & \alpha_0(\widehat{\omega}, T, \rho) \end{pmatrix}.$$

Позначимо $\widetilde{A}_m(\widehat{\omega}, T, \rho) = A_m + (A_m)^*$, де $*$ позначає спряжену матрицю.

(i) За умови (iii) твердження 1.1 проблема моментів (2.1) має розв'язок. Тому за [9] маємо: $\exists$ час T^* такий, який є найбільшим коренем рівняння $det\widetilde{A}_N(\widehat{\omega}, T^*, +1) \cdot det\widetilde{A}_N(\widehat{\omega}, T^*, -1) = 0$, на інтервалі $(0, T)$, і при цьому задовольняє умови: $0 \leq \alpha(\widehat{\omega}, T^*, \mu) < \pi K$, $\widetilde{A}_N(\widehat{\omega}, T^*, \mu) \geq 0$, $\mu = \pm 1$.

(ii) Кількість точок перемикання та константа ρ визначаються наступним чином:

Нехай $L(\mu) = min\left\{0 \leq k \leq N+1 : det\widetilde{A}_k(\widehat{\omega}, T^*, \mu) = 0,\ \mu = \pm 1\right\};$

(за означенням покладемо $det\widetilde{A}_{N+1}(\widehat{\omega}, T^*, \mu) = 0,\ \mu = \pm 1.$)

Тоді

а) якщо $L(+1) \neq L(-1)$, то кількість точок перемикання дорівнює $n = 2 \cdot min\{L(+1), L(-1)\}$. При цьому, якщо $n = 2L(+1)$ то $\rho = 1$; якщо $n = 2L(-1)$ то $\rho = -1$;

б) якщо $L(+1) = L(-1)$, то $n = 2L(+1) - 1$. При цьому, якщо із $\widetilde{A}_{L(+1)}(\widehat{\omega}, T^*, +1) \cdot \varphi = 0$ для вектора φ виконується $\sum\limits_{k=0}^{L(+1)} \varphi_k = 0$, то $\rho = 1$, інакше $\rho = -1$.

(iii) Точки перемикання для знайденого $\rho = \pm 1$ та $n = 2q$ або $n = 2q - 1$:

Визначаємо координати векторів φ та ψ за формулами:

$\widetilde{A}_q(\widehat{\omega}, T^*, \rho) \cdot \varphi = 0, \quad \psi = A_q(\widehat{\omega}, T^*, \rho) \cdot \varphi.$

Записуємо поліноми: $\widehat{\varphi}(z) = \sum\limits_{j=0}^{q} \varphi_j z^{q-j}$, $\widehat{\psi}(z) = \sum\limits_{j=0}^{q} \psi_j z^{q-j}$ і складаємо функцію $R(z) = \frac{\widehat{\psi}(z)}{\widehat{\varphi}(z)}$.

Знаходимо корені та полюси функції $R(z)$ — це точки $e^{i\frac{2}{K}t_j}$, $j = \overline{1, n}$.

Тоді $0 < t_1 < \ldots < t_n < T^*$ — це точки перемикання керування.

За цим алгоритмом знаходимо окремо керування $u_0(t)$ та $u_\pi(t)$. На відрізку $[T^*, T]$ кожному з керувань надаємо значення 0. Знайдені керування за теоремою 1.1 будуть розв'язками проблеми ε-керованості системи (1.1)—(1.4).

Зауваження 2.1. Під час застосування наведеного алгоритму, точки перемикання обчислюються з деякою похибкою. Наступна теорема дає оцінку похибки визначення кінцевого стану керованої системи (1.1)—(1.4), яка пов'язана з похибкою підрахування точок перемикання.

Теорема 2.2. *Нехай $\{t_j\}_{j=1}^n$ точні значення точок перемикання, $\{\tau_j\}_{j=1}^n$ — значення, підраховані з похибкою. Нехай число $\varepsilon_N > 0$, яке залежить від N, таке, що $| t_j - \tau_j | \leq \varepsilon_N$ для всіх $j = \overline{1,n}$. Нехай також $u_\gamma(t)$ та $\acute{u}_\gamma(\tau)$, $\gamma = 0, \pi$ — точне та наближене керування відповідно, підраховані за формулою (2.2), а w^T та $\acute{w}^T$ — точний та наближений кінцевий стан системи (1.1)—(1.4) відповідно.*
Тоді $\left\|\left| w^T - \acute{w}^T \right|\right\|_0^s \leq 40\pi K^2 \frac{P_s C_l^{2K} C_l^K}{c_l^2 c_l^K}(2N+3)\sqrt{1 + \frac{2^{2s+1}}{K^{2s}} \frac{N^{2s+1}+2s}{2s+1}} \cdot \varepsilon_N$.

Доведення. Скористаємося формулою, доведеною у [8], яка еквівалентна до формули (1.8):

$$\begin{aligned} \mathrm{w}^T(x) &= \mathcal{E}(x,T) * \sum_{m=0}^{2K-1} \mathcal{T}_{2\pi m} \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{2\pi K k} \Omega \begin{pmatrix} 1 \\ d/dx \end{pmatrix} (\widehat{w}_0(x) - u_0(x)) + \right. \\ & \left. + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{2\pi K k} \Omega \begin{pmatrix} 1 \\ d/dx \end{pmatrix} (\widehat{w}_\pi(x+\pi) - u_\pi(x+\pi)) \right\}, \\ \acute{\mathrm{w}}^T(x) &= \mathcal{E}(x,T) * \sum_{m=0}^{2K-1} \mathcal{T}_{2\pi m} \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{2\pi K k} \Omega \begin{pmatrix} 1 \\ d/dx \end{pmatrix} (\widehat{w}_0(x) - \acute{u}_0(x)) + \right. \\ & \left. + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{2\pi K k} \Omega \begin{pmatrix} 1 \\ d/dx \end{pmatrix} (\widehat{w}_\pi(x+\pi) - \acute{u}_\pi(x+\pi)) \right\}. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \left\|\left| \mathrm{w}^T - \acute{\mathrm{w}}^T \right|\right\|_l^s &= \mathcal{E}(x,T) * \sum_{m=0}^{2K-1} \mathcal{T}_{2\pi m} \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{2\pi K k} \Omega \begin{pmatrix} 1 \\ d/dx \end{pmatrix} (\acute{u}_0(x) - u_0(x)) + \right. \\ & \left. + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{2\pi K k} \Omega \begin{pmatrix} 1 \\ d/dx \end{pmatrix} (\acute{u}_\pi(x+\pi) - u_\pi(x+\pi)) \right\}. \end{aligned}$$

Скориставшись наступною оцінкою, доведеною в [8]:

$$\begin{aligned} \left\|\left| w^T \right|\right\|_0^s &\leq \frac{P_s}{c_l^2} \left\|\left| \mathrm{w}^T \right|\right\|_l^s \leq 10\pi K^2 \frac{P_s C_l^{2K}}{c_l^2 c_l^K} \left\{ \left\| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{\pi K k} (\widehat{w}_0(x) - u_0(x)) \right\|_l^s + \right. \\ & \left. + \left\| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{\pi K k} (\widehat{w}_\pi(x+\pi) - u_\pi(x+\pi)) \right\|_l^s \right\}, \end{aligned}$$

можемо записати:

$$\left\|w^T - \acute{w}^T\right\|_0^s \leq 10\pi K^2 \frac{P_s C_l^{2K}}{c_l^2 c_l^K}\left\{\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{\pi K k}(\acute{u}_0(x) - u_0(x))\right\|_l^s + \right.$$

$$\left. + \left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{\pi K k}(\acute{u}_\pi(x+\pi) - u_\pi(x+\pi))\right\|_l^s\right\}.$$

Розкладемо функції $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{\pi K k}(\acute{u}_\gamma(x) - u_\gamma(x))$, $\gamma = 0, \pi$ в ряди Фур'є

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{\pi K k}(\acute{u}_0(x) - u_0(x)) = \frac{1}{\pi K}\sum_{m=-N}^{N}(\acute{\nu}_0^m - \nu_0^m)e^{-i\frac{2mx}{K}},$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{\pi K k}(\acute{u}_\pi(x+\pi) - u_\pi(x+\pi)) = \frac{1}{\pi K}\sum_{m=-N}^{N}(\acute{\nu}_\pi^m - \nu_\pi^m)e^{-i\frac{2mx}{K}},$$

де коефіцієнти Фур'є визначаються за формулами:

$$\nu_0^m = \int_0^{\pi K} u_0(x)e^{i\frac{2mx}{K}}\,dx, \quad \nu_\pi^m = \int_0^{\pi K} u_\pi(x+\pi)e^{i\frac{2mx}{K}}\,dx, \qquad m = \overline{-N, N},$$

$\acute{\nu}_\gamma^m$ утворюються заміною в цих формулах u_γ на $\acute{u}_\gamma$, $\gamma = 0, \pi$.

Проводячи аналогічні міркування як в [8], прийдемо до наступного

$$\left\|w^T - \acute{w}^T\right\|_0^s \leq 10KP_s\frac{C_l^{2K}C_l^K}{c_l^2 c_l^K}\left\{\sqrt{\sum_{m=-N}^{N}\left(1+\left(\frac{2m}{K}\right)^2\right)^s |\acute{\nu}_0^m - \nu_0^m|^2} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\sum_{m=-N}^{N}\left(1+\left(\frac{2m}{K}\right)^2\right)^s |\acute{\nu}_\pi^m - \nu_\pi^m|^2}\right\}. \tag{2.6}$$

Так як $\acute{u}_0(x)$ та $u_0(x)$ — релейні керування, то $|\acute{\nu}_0^m - \nu_0^m| \leq \int\limits_0^{\pi K} |\acute{u}_0(x) - u_0(x)|\,dx \leq 2(n+1)\cdot\varepsilon_N\cdot\pi K$, де n — кількість точок перемикання. Аналогічно, $|\acute{\nu}_\pi^m - \nu_\pi^m| \leq 2(n+1)\cdot\varepsilon_N\cdot\pi K$.

Враховуючи алгоритм пошуку точок перемикання, можемо записати, що $n \leq 2(N+1)$. Таким чином, $|\acute{\nu}_\gamma^m - \nu_\gamma^m| \leq 2(2N+3)\cdot\varepsilon_N\cdot\pi K, \quad \gamma = 0, \pi$.

Оцінивши $\sum\limits_{m=2}^{N} m^{2s}$ через $\int\limits_1^N x^{2s}\,dx$, маємо:

$$\sum_{m=-N}^{N}\left(1+\left(\frac{2m}{K}\right)^2\right)^s \leq 1 + 2\left(\frac{2}{K}\right)^{2s}\sum_{m=1}^{N} m^{2s} \leq 1 + \frac{2^{2s+1}}{K^{2s}}\cdot\frac{N^{2s+1}+2s}{2s+1}.$$

Продовжуючи оцінку (2.6), одержемо твердження теореми. Теорему доведено.

ЛІТЕРАТУРА

1. Lasiecka I. and Triggiani R. Control theory for partial differential equations: Continuous and approximation theories. 2: Abstract hyperbolic-like systems over a finite time horizon. Cambridge University Press, 2000.

2. Krabs W. and Leugering G. On boundary controllability of one-dimension vibrating systems by $W_0^{1,p}$-controls for $p \in [0, \infty)$. Math. Methods Appl. Sci., **17** (1994), 77–93.

3. Gugat M. and Leugering G. Solutions of L^p-norm-minimal control problems for the wave equation. Comput. Appl. Math., **21** (2002), No. 1. 227–244.

4. Negreanu M. and Zuazua E. Convergence of multigrid method for the controllability of a 1-d wave equation. C. R. Math. Acad. Sci. Paris, **338** (2004), No. 5, 413-418.

5. Gugat M. Analytic solution of L^∞-optimal control problems for the wave equation. J. Optim. Theor. Appl., **114** (2002), 151–192.

6. Gugat M., Leugering and Sklyar G. L^p-optimal boundary control for the wave equation. SIAM J. Control Optim., **44** (2005), No. 1, 49–74.

7. Fattorini H. O. Infinite dimensional optimization and control Theory. Cambridge University Press, 1999.

8. Фардигола Л.В., Халіна К.С. Проблеми керованості для рівняння струни, УМЖ, 59 (2007), № 7, стр. 939-952

9. Коробов В. И., Скляр Г. М. Оптимальное быстродействие и тригонометрическая проблема моментов.– Серия математическая. Том 53, № 4, 1989.

10. Schwartz L. Théorie des distributions, I, II, Hermann, Paris, 1950–1951.

11. Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г. Обобщённые функции и уравнения в свёртках.– М.: Физматлит, 1994. — 336 с.

12. Крейн М. Г., Нудельман А. А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи.– М.: Наука, 1973. — 552 с.

13. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции. Вып. 3, М.: Физматгиз, 1958. — 308 с.