Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 514.76 № 826, 2008, с.141–150

# Внутренняя геометрия грассманова многообразия псевдоевклидова пространства

М.А. Гургенидзе, П.Г. Стеганцева

*Запорожский национальный университет*
*Украина*

Изучается совокупность неизотропных плоскостей псевдоевклидова пространства индекса 1. Введена гладкая структура, определена метрика, найден вид метрики в локальных координатах, получены выражения для символов Кристоффеля первого и второго рода и уравнения геодезических линий.

*2000 Mathematics Subject Classification* 58A05.

Изучение внутренней геометрии многообразия начинается с введения метрики. В случае погруженного многообразия метрика на нем индуцируется метрикой объемлющего пространства. Внутренняя геометрия грассманова многообразия $G(l,n)$ $l$-плоскостей в евклидовом $n$-пространстве хорошо изучена. В работе К.Лейхтвейса [7] найдены все римановы метрики многообразия $G(l,n)$, инвариантные относительно группы движений евклидова $n$-пространства. В [8] Ю.Вонг определил метрику на $G(l,n)$ как сумму квадратов $l$ стационарных углов между двумя бесконечно близкими $l$-плоскостями и сформулировал теорему о виде этой метрики в локальных координатах. Там же методами вариационного исчисления получены уравнения геодезических линий многообразия $G(l,n)$ и изучены замкнутые геодезические. Основные результаты исследования стандартных грассмановых многообразий можно найти в обзорной статье А.А.Борисенко, Ю.А.Николаевского [2]. В монографии [1] Ю.А.Аминова исследовано подмногообразие многообразия $G(l,n)$ - грассманов образ поверхности.

Со второй половины XX века растет интерес к дифференциальной геометрии грассмановых многообразий $l$-плоскостей псевдоевклидова пространства. И.Маазикас в [4] доказал существование инвариантной метрики грассманова многообразия $l$-плоскостей индекса $k$ в псевдоевклидовом $n$-пространстве индекса $m$, показал, что эта метрика превращает грассманово многообразие в пространство Эйнштейна постоянной скалярной кривизны при всех допустимых значениях $k$ и $m$.

В данной статье изучается грассманово многообразие неизотропных $l$-плоскостей, погруженное в псевдоевклидово $n$-пространство индекса 1. Целью статьи является получение явного вида метрики этого многообразия в локальных координатах.

1. Гладкая структура и метрика во множестве плоскостей

Евклидовым $n$-мерным пространством называется $n$-мерное аффинное пространство, в котором задана билинейная скалярная функция $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ двух векторных аргументов $\bar{x}, \bar{y}$, удовлетворяющая условиям симметричности и невырожденности [5].

Функцию $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ называют скалярным произведением векторов $\bar{x}, \bar{y}$ и обозначают $(\bar{x}, \bar{y})$. Скалярные произведения $(\bar{e_i}, \bar{e_j})$ векторов базиса являются компонентами дважды ковариантного тензора $g_{ij}$, который называется метрическим. Если $(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, то векторы называются ортогональными. Скалярный квадрат вектора $\bar{x}$ определяется формулой $\bar{x}^2 = (\bar{x}, \bar{x})$. Евклидовы пространства называются собственно евклидовыми, если в них для любого вектора $\bar{x} \neq \bar{0}$ имеет место неравенство $\bar{x}^2 > 0$, и псевдоевклидовыми, если $\bar{x}^2$ для $\bar{x} \neq \bar{0}$ может принимать положительные, отрицательные и нулевые значения. В этом случае векторы называются соответственно евклидовыми, псевдоевклидовыми и изотропными. В псевдоевклидовом пространстве при нормировании векторов необходимо использовать формулу $\bar{e} = \frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2}}$ для евклидовых векторов и формулу $\bar{e} = \frac{\bar{x}}{\sqrt{-\bar{x}^2}}$ - для псевдоевклидовых векторов. После нормировки векторы принято называть единичными и мнимоединичными соответственно.

Ортогональный базис псевдоевклидова пространства, состоящий из единичных и мнимоединичных векторов, по аналогии с евклидовым пространством, называется ортонормированным, а координаты векторов относительно такого базиса - декартовыми.

Пространство с метрическим тензором $g_{ij} = \varepsilon_i \delta_i^j$, где $\delta_i^j$-символ Кронекера, $\varepsilon_1 = -1, \varepsilon_i = 1, i \neq 1$ называют псевдоевклидовым пространством индекса 1 и обозначают ${}^1R_n$. Скалярное произведение векторов $\bar{x}, \bar{y}$ в пространстве ${}^1R_n$ относительно ортонормированного базиса можно записать в виде $\bar{x}E'\bar{y}$, где $E' = diag(-1, 1, ..., 1)$.

Рассмотрим в ${}^1R_{l+p}$ множество неизотропных (псевдоевклидовых и евклидовых) $l$-плоскостей, проходящих через начало координат. Будем, по аналогии с евклидовым пространством, называть это множество грассмановым многообразием и обозначать $G(l, l+p)$. В пространстве ${}^1R_{l+p}$ в грассмановом многообразии естественно рассматривать два подмногообразия: псевдоевклидовых $l$-плоскостей и евклидовых $l$-плоскостей. Для каждого подмногообразия относительно любого фиксированного базиса получаем $p \times l$-матрицу локальных координат. Специализируем базис $\{\bar{e}_i, \bar{e}_\alpha\}(i = 1, ...l, \alpha = l+1, ..., l+p)$ как и в работе [2] и обозначим через $Z = \{\xi_i^\mu\}(i = 1, ..., l, \mu = 1, ..., p)$ матрицу локальных координат $l$-плоскости относительно этого базиса. Перейдем к базису $\{\bar{f}_i, \bar{f}_\alpha\}$, связанному с базисом $\{\bar{e}_i, \bar{e}_\alpha\}$ соотношениями $\bar{e}_i E' \bar{f}_j = \bar{e}_j E' \bar{f}_i$

и $\bar{e}_\alpha E' \bar{f}_\beta = \bar{e}_\beta E' \bar{f}_\alpha (j = 1, ...l, \beta = l+1, ..., l+p)$. Для подмногообразия псевдоевклидовых плоскостей нами получено условие

$$QE_l' Q^t = (E_l' + Z^t Z)^{-1}, \tag{1}$$

которому удовлетворяет матрица $Q$ перехода от первого базиса ко второму.

Матрицу локальных координат $l$-плоскости относительно второго базиса будем обозначать $N = \{\eta_j^\nu\}$ $(j = 1, ..., l, \nu = 1, ..., p)$. Связь между двумя наборами локальных координат задается формулой $N = ZQ$.

Для $l$-плоскостей подмногообразия евклидовых плоскостей получим также два набора локальных координат, связь между которыми устанавливается с помощью матрицы $Q$ , для которой

$$QQ^t = (E_l + Z^t E_l' Z)^{-1}. \tag{2}$$

Формулы (1) и (2) являются аналогами соответствующей формулы из работы [2].

Метрику в грассмановом многообразии псевдоевклидова пространства ${}^1R_{l+p}$ определим формулой

$$ds^2 = Tr[(E + ZE' Z^t)^{-1} dZ (E' + Z^t Z)^{-1} dZ^t] \tag{3}$$

для псевдоевклидовых плоскостей и формулой

$$ds^2 = Tr[(E' + ZZ^t)^{-1} dZ (E + Z^t E' Z)^{-1} dZ^t] \tag{4}$$

для евклидовых плоскостей.

Покажем, что данное определение является естественным, и в этой метрике квадрат расстояния между достаточно близкими плоскостями равен сумме квадратов углов, которые ниже будут названы стационарными. Для этого построим связность грассманова многообразия, согласованную с метрикой (символы Кристоффеля II рода), выведем уравнения геодезических линий и вычислим расстояние между достаточно близкими $l$-плоскостями грассманова многообразия пространства ${}^1R_{l+p}$.

2. Символы Кристоффеля I и II рода, геодезические линии

2.1 Случай грассманова многообразия евклидова пространства

Исходя из вида метрики грассманова многообразия евклидова пространства $R_{l+p}$ , метрический тензор записывается следующим образом [2]

$$g_{(\mu i)(\nu j)} = ((E_p + ZZ^t)^{-1})_\mu^\nu ((E_l + Z^t Z)^{-1})_i^j. \tag{5}$$

Для получения дважды контравариантного метрического тензора $g^{(\mu i)(\nu j)}$ запишем разложение компонент метрического тензора $g_{(\mu i)(\nu j)}$ в ряд по переменным $\xi_i^\mu$ в окрестности нуля. С точностью до бесконечно малых второго порядка он может быть записан в виде

$$g_{(\mu i)(\nu j)} = (E_p - ZZ^t)_\mu^\nu (E_l - Z^t Z)_i^j,$$

или в координатах

$$g_{(\mu i)(\nu j)} = (\delta_\mu^\nu - \xi_s^\mu \xi_s^\nu)(\delta_i^j - \xi_i^\alpha \xi_j^\alpha) = \delta_\mu^\nu \delta_i^j - \delta_\mu^\nu \xi_i^\alpha \xi_j^\alpha - \delta_i^j \xi_s^\mu \xi_s^\nu + O(\xi^4), \quad (6)$$

где $\alpha, s$ - индексы суммирования.

Обозначим $\delta_\mu^\nu \xi_i^\alpha \xi_j^\alpha + \delta_i^j \xi_s^\mu \xi_s^\nu = f$. Компоненты тензора $g^{(\mu i)(\nu j)}$ будем искать в виде $g^{(\mu i)(\nu j)} = \delta_\mu^\nu \delta_i^j + F + O(\xi^4)$ требуя, чтобы $g_{(\mu i)(\alpha k)} g^{(\alpha k)(\nu j)} = \delta_\mu^\nu \delta_i^j$. Тогда легко получить, что $F = -f$. Таким образом, искомое разложение имеет вид

$$g^{(\mu i)(\nu j)} = \delta_\mu^\nu \delta_i^j + \delta_\mu^\nu \xi_i^\alpha \xi_j^\alpha + \delta_i^j \xi_s^\mu \xi_s^\nu + O(\xi^4). \quad (7)$$

В римановом пространстве символы Кристоффеля I и II рода являются инвариантами внутренней геометрии. Для нахождения символов Кристоффеля I рода в локальных координатах воспользуемся формулой

$$\Gamma_{(\mu i)(\nu j),(\beta l)} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial g_{(\mu i)(\nu j)}}{\partial \xi_l^\beta} + \frac{\partial g_{(\nu j)(\beta l)}}{\partial \xi_i^\mu} + \frac{\partial g_{(\beta l)(\mu i)}}{\partial \xi_j^\nu}\right). \quad (8)$$

После дифференцирования, замены индексов и приведения подобных слагаемых получим

$$\Gamma_{(\mu i)(\nu j),(\beta l)} = -\delta_\nu^\beta \delta_i^l \xi_j^\mu - \delta_\mu^\beta \delta_j^l \xi_i^\nu.$$

Для нахождения символов Кристоффеля II рода будем использовать разложение метрического тензора в ряд по степеням $\xi_i^\mu$ в окрестности нуля с точностью до бесконечно малых четвертого порядка. Тогда в соответствии с формулой

$$\Gamma_{(\mu i)(\nu j)}^{(\rho k)} = \Gamma_{(\mu i)(\nu j),(\beta l)} g^{(\beta l)(\rho k)}$$

получим

$$\Gamma_{(\mu i)(\nu j)}^{(\rho k)} = -2\delta_\mu^\rho \delta_i^k \xi_j^\gamma (\delta_\gamma^\mu - \xi_s^\mu \xi_s^\gamma) + O(\xi^4).$$

Геодезической линией в римановом пространстве называется кривая этого пространства, касательный вектор которой переносится вдоль нее параллельно. Следовательно, уравнения геодезических линий можно получить из уравнений параллельного переноса в виде

$$\ddot{\xi}_k^\rho + \Gamma_{(\mu i)(\nu j)}^{(\rho k)} \dot{\xi}_i^\mu \dot{\xi}_j^\nu = 0. \quad (9)$$

Подставляя в это уравнение выражение для символов Кристоффеля II рода, запишем уравнения геодезических в локальных координатах $Z = \{\xi_j^\mu\}$

$$\ddot{Z} - 2\dot{Z}Z^t(E + ZZ^t)^{-1}\dot{Z} = 0.$$

2.2 Случай грассманова многообразия псевдоевклидова пространства

Для получения символов Кристоффеля и уравнения геодезических линий для грассманова многообразия псевдоевклидова пространства поступим таким же образом.

Из формулы (3) метрический тензор подмногообразия псевдоевклидовых плоскостей грассманова многообразия пространства ${}^1R_{l+p}$ можно записать в виде

$$g_{(\mu i)(\nu j)} = ((E + ZE^{'}Z^t)^{-1})^{\nu}_{\mu}((E^{'} + Z^tZ)^{-1})^j_i.$$

Обращение матрицы $(E+ZE^{'}Z^t)$ дает $E-ZE^{'}Z^t+O(Z^4)$. Для второй матрицы можно записать $(E^{'}+Z^tZ)^{-1} = (E^{'}(E+E^{'}Z^tZ))^{-1} = E^{'}-E^{'}Z^tZE^{'}+O(Z^4)$. В локальных координатах, с точностью до бесконечно малых третьего порядка, получим

$$g_{(\mu i)(\nu j)} = \delta^{\nu}_{\mu}\varepsilon_i\delta^j_i - \delta^{\nu}_{\mu}\varepsilon_i\xi^{\alpha}_i\xi^{\alpha}_j\varepsilon_j - \varepsilon_i\delta^j_i\xi^{\mu}_s\varepsilon_s\xi^{\nu}_s + O(\xi^4).$$

Аналогично, для подмногообразия евклидовых плоскостей этого пространства

$$g_{(\mu i)(\nu j)} = ((E^{'} + ZZ^t)^{-1})^{\nu}_{\mu}((E + Z^tE^{'}Z)^{-1})^j_i,$$

или, в координатном виде

$$g_{(\mu i)(\nu j)} = \delta^{\nu}_{\mu}\varepsilon_{\mu}\delta^j_i - \delta^{\nu}_{\mu}\varepsilon_{\mu}\xi^{\alpha}_i\varepsilon_i\xi^{\alpha}_j - \delta^j_i\varepsilon_{\mu}\xi^{\mu}_s\varepsilon_s\xi^{\nu}_s\varepsilon_{\nu} + O(\xi^4).$$

Для нахождения символов Кристоффеля I рода воспользуемся формулой (8). В результате получим, что для псевдоевклидовых плоскостей

$$\Gamma_{(\mu i)(\nu j),(\beta l)} = -\varepsilon_l\varepsilon_j\delta^l_i\delta^{\beta}_{\nu}\xi^{\mu}_j - \varepsilon_l\varepsilon_i\delta^l_j\delta^{\beta}_{\mu}\xi^{\nu}_i + O(\xi^3),$$

а для евклидовых плоскостей

$$\Gamma_{(\mu i)(\nu j),(\beta l)} = -\varepsilon_{\beta}\varepsilon_{\mu}\delta^l_i\delta^{\beta}_{\nu}\xi^{\mu}_j - \varepsilon_{\beta}\varepsilon_{\nu}\delta^l_j\delta^{\beta}_{\mu}\xi^{\nu}_i + O(\xi^3).$$

Для нахождения символов Кристоффеля II рода будем использовать разложение метрического тензора в ряд по степеням $\xi^{\mu}_i$ в окрестности нуля с точностью до бесконечно малых четвертого порядка. Символы Кристоффеля II рода для помногообразий псевдоевклидовых и евклидовых плоскостей имеют, соответственно, вид

$$\Gamma^{(\rho k)}_{(\mu i)(\nu j)} = -2\varepsilon_j\delta^{\rho}_{\nu}\delta^k_i\xi^{\gamma}_j(\delta^{\mu}_{\gamma} - \varepsilon_l\xi^{\mu}_s\varepsilon_s\xi^{\gamma}_s)$$

и

$$\Gamma^{(\rho k)}_{(\mu i)(\nu j)} = -2\delta^{\rho}_{\nu}\delta^k_i\xi^{\gamma}_j(\varepsilon_{\mu}\delta^{\mu}_{\gamma} - \varepsilon_{\mu}\varepsilon_{\gamma}\xi^{\mu}_s\xi^{\gamma}_s).$$

Уравнения (9) геодезических семейств псевдоевклидовых плоскостей в локальных координатах $Z = \{\xi^{\mu}_j\}$ будут иметь вид

$$\ddot{Z} - 2\dot{Z}E^{'}Z^t(E + ZE^{'}Z^t)^{-1}\dot{Z} = 0, \tag{10}$$

а для геодезических семейств евклидовых плоскостей эти уравнения запишутся в виде

$$\ddot{Z} - 2\dot{Z}Z^t(E^{'} + ZZ^t)^{-1}\dot{Z} = 0. \tag{11}$$

Для построения примера геодезических семейств в грассмановом многообразии псевдоевклидова пространства введем понятие стационарных углов пары $l$-плоскостей.

3. Стационарные углы пары $l$-плоскостей и $l$-геликоиды псевдоевклидова пространства

В евклидовом пространстве взаимное расположение пары $l$-плоскостей $\pi$ и $\tau$ однозначно задается набором углов $\varphi_i, i = 1, ..., l$ со значениями из $[0, \pi/2]$. Эти углы определяются как стационарные значения углов между произвольными векторами $\bar{a} \in \pi$ и $\bar{b} \in \tau$ [8].

Мы не можем оставить без изменения это определение в случае пространства ${}^1R_{l+p}$, поскольку в этом пространстве векторы неравноправны и значения углов между ними не всегда можно сравнить между собой.

Пусть $\pi$ и $\tau$ - две $l$-плоскости грассманова многообразия пространства ${}^1R_{l+p}$. Рассмотрим двумерную плоскость, проходящую через начало координат и перпендикулярную каждой из плоскостей $\pi$ и $\tau$. Угол между прямыми пересечения этой двумерной плоскости с плоскостями $\pi$ и $\tau$ будем называть стационарным углом плоскостей $\pi$ и $\tau$, а саму двумерную плоскость - угловой 2-плоскостью.

Покажем, что всегда существует $l$ угловых 2-плоскостей, часть из которых могут вырождаться в 1-плоскости, а также, что любые две угловые 2-плоскости вполне ортогональны.

Будем пользоваться понятием матричной координаты $l$-плоскости. Так называют $(l + p) \times l$-матрицу, столбцами которой являются координаты направляющих векторов этой плоскости [6]. Удобно записывать ее в виде строки направляющих векторов $l$-плоскости.

Пусть $A = (\bar{a}_1 \bar{a}_2 ... \bar{a}_l)$ и $B = (\bar{b}_1 \bar{b}_2 ... \bar{b}_l)$ - матричные координаты плоскостей $\pi$ и $\tau$ соответственно. Произвольная двумерная плоскость, пересекающая данные, имеет матричную координату $C = (\bar{c}_1 \bar{c}_2)$, где $\bar{c}_1 = A\Lambda$, $\bar{c}_2 = BM$, $\Lambda^t = (\lambda_1 ... \lambda_l)$, $M^t = (\mu_1 ... \mu_l)$. Будем искать ту двумерную плоскость, которая перепендикулярна каждой из плоскостей $\pi$ и $\tau$. В такой плоскости существуют векторы $\bar{d_1} = \alpha_1 \bar{c}_1 + \alpha_2 \bar{c}_2, \bar{d_2} = \beta_1 \bar{c}_1 + \beta_2 \bar{c}_2$ такие, что

$$\bar{d_1} E^{'} \bar{a}_i = 0,$$
$$\bar{d_2} E^{'} \bar{b}_i = 0, \qquad (12)$$

$i = 1, ..., l.$

Систему (12) можно записать в матричном виде

$$(\alpha_1 A\Lambda + \alpha_2 BM)^t A = 0,$$
$$(\beta_1 A\Lambda + \beta_2 BM)^t B = 0,$$

или,

$$\alpha_1 (A^t A)\Lambda + \alpha_2 (B^t A) M = 0,$$
$$\beta_1 (A^t B)\Lambda + \beta_2 (B^t B) M = 0$$

и рассматривать как систему уравнений относительно $\Lambda$ и $M$. Нас интересуют ненулевые решения этой системы, поэтому

$$\begin{vmatrix} \alpha_1(A^tA) & \alpha_2(B^tA) \\ \beta_1(A^tB) & \beta_2(B^tB) \end{vmatrix} = 0.$$

Мы можем упростить последнее уравнение, если выберем в данных плоскостях $\pi$ и $\tau$ ортонормированные базисы. Тогда $(A^tA) = E^{'}$, $(B^tB) = E^{'}$ в случае подмногообразия псевдоевклидовых плоскостей, и $(A^tA) = E$, $(B^tB) = E$ в случае подмногообразия евклидовых плоскостей. В первом случае получим

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 E^{'} & \alpha_2(B^tA) \\ \beta_1(A^tB) & \beta_2 E^{'} \end{vmatrix} = 0.$$

Используя [3, с.59], можем привести это уравнение к виду

$$\left| \; E^{'}(A^tB)E^{'}(B^tA) - \frac{\alpha_1\beta_2}{\alpha_2\beta_1}E \; \right| = 0.$$

Величины $\frac{\alpha_1\beta_2}{\alpha_2\beta_1}$ есть собственные значения матрицы $E^{'}(A^tB)E^{'}(B^tA)$. Так как эта матрица совпадает с матрицей из работы [6] Б.А. Розенфельда, то последнее уравнение имеет ровно $l$ действительных корней, по каждому из которых можно определить векторы $\bar{d}_1$ и $\bar{d}_2$, причем разным собственным значениям соответствуют вполне ортогональные угловые 2-плоскости. Угол между векторами $\bar{d}_1$ и $\bar{d}_2$ равен стационарному углу данных $l$-плоскостей.

Пусть $l$-плоскости $\pi$ и $\tau$ пространства ${}^1R_{l+p}$ не имеют общих направлений. Это возможно только если $l \leq p$. Так как угловые 2-плоскости вполне ортогональны, то при $l = p$ одна из угловых 2-плоскостей обязательно будет псевдоевклидовой, остальные $l-1$ угловых 2-плоскостей - евклидовы. В ортонормированных базисах $\{\bar{a}_i\}$ в плоскости $\pi$ и $\{\bar{b}_i\}, i = 1, ..., l$ в плоскости $\tau$ стационарные углы этих $l$-плоскостей определяются из равенств

$$\bar{a}_1 E^{'} \bar{b}_1 = ch\varphi_1, \bar{a}_i E^{'} \bar{b}_i = \cos\varphi_i, i = 2, ..., l. \tag{13}$$

Если же $l < p$, то либо имеет место описанный выше случай, либо все угловые 2-плоскости евклидовы и тогда для стационарных углов получим

$$\bar{a}_i E^{'} \bar{b}_i = \cos\varphi_i, i = 1, ..., l. \tag{14}$$

Пусть теперь направляющие подпространства $l$-плоскостей $\pi$ и $\tau$ имеют $k$ общих направлений.

Если эти плоскости псевдоевклидовы и среди их общих векторов нет псевдоевклидова вектора, то $k$ стационарных углов равны 0, а остальные $l-k$ находятся из равенств (13), в которых $i = 2, ..., l-k$. Если же псевдоевклидов вектор $l$-плоскостей $\pi$ и $\tau$ находится среди $k$ общих векторов их направляющих подпространств, то все $l-k$ ненулевые стационарные углы реализуются в евклидовых 2-плоскостях и поэтому находятся из равенств (14), в которых $i = 1, ..., l-k$.

Если же плоскости $\pi$ и $\tau$ евклидовы и имеют $k$ общих направлений (они могут быть только евклидовыми), то при $l \leq p$ среди стационарных углов $k$ углов равны нулю, а для остальных $l-k$ углов возможны два случая: либо одна из угловых 2-плоскостей является псевдоевклидовой, а остальные евклидовы, либо все угловые 2-плоскости евклидовы. Если же $l > p$, то $l-k$ ненулевых стационарных углов находятся из формул (13), в которых $i = 2, ..., l-k$.

Рассмотрим однопараметрическое семейство $l$-плоскостей грассманова многообразия псевдоевклидова пространства ${}^1R_{l+p}$, обладающее таким свойством: стационарные углы между произвольной $l$-плоскостью семейства и фиксированной $l$-плоскостью пропорциональны. Такие семейства называются $l$-геликоидами [6].

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что $l$-геликоиды в многообразии $G(l, l+p)$ являются геодезическими линиями. Для этого выберем ортонормированный базис аналогично описанию в работе [1, с.300 ]. Пусть $r (r \leq l)$ стационарных углов не равны нулю. В каждой из $r$ угловых 2-плоскостей выберем вектор, лежащий в фиксированной плоскости семейства, и ортогональный ему вектор. Так как угловые 2-плоскости вполне ортогональны, то получим набор из $2r$ попарно ортогональных векторов. Дополним, в случае необходимости, этот набор до ортогонального базиса всего пространства и нормируем векторы этого базиса. Тогда направляющие векторы произвольной плоскости семейства псевдоевклидовых плоскостей имеют вид

$$\bar{x}_1 = \mathrm{ch}(\varphi_1 t)\bar{e}_1 + \mathrm{sh}(\varphi_1 t)\bar{e}_{1+l},$$

$$\bar{x}_\alpha = \cos(\varphi_\alpha t)\bar{e}_\alpha + \sin(\varphi_\alpha t)\bar{e}_{\alpha+l}, \alpha = 2, ..., r,$$

$$\bar{x}_\mu = \bar{e}_\mu, \mu = r+1, ..., l, t \in [0, 1].$$

В выбранном базисе матричная координата произвольной плоскости семейства имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} ch(\varphi_1 t) & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & cos(\varphi_2 t) & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & cos(\varphi_r t) & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 1 \\ sh(\varphi_1 t) & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & sin(\varphi_2 t) & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & sin(\varphi_r t) & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}, \qquad (15)$$

а матрица локальных координат

$$Z = \begin{pmatrix} th(\varphi_1 t) & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & tg(\varphi_2 t) & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & tg(\varphi_r t) & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}. \qquad (16)$$

Нетрудно убедиться в том, что $Z$ удовлетворяет уравнению (10), то есть $l$-геликоид является геодезической линией. Для $l$-геликоида евклидовых плоскостей базис выберем так, что направляющие векторы произвольной $l$-плоскости будут иметь вид

$$\bar{x}_1 = \mathrm{ch}(\varphi_1 t)\bar{e}_{1+l} + \mathrm{sh}(\varphi_1 t)\bar{e}_1,$$

$$\bar{x}_\alpha = \cos(\varphi_\alpha t)\bar{e}_{\alpha+l} + \sin(\varphi_\alpha t)\bar{e}_\alpha, \alpha = 2, ..., r.$$

$$\bar{x}_\mu = \bar{e}_\mu, \mu = r+1, ..., l, t \in [0, 1].$$

Матрица локальных координат такой плоскости будет удовлетворять уравнению (11).

4. Расстояние между $l$-плоскостями.

Покажем, что при использовании формулы (3) квадрат расстояния между $l$-плоскостями равен сумме квадратов стационарных углов данных плоскостей. Рассмотрим две достаточно близкие псевдоевклидовы $l$-плоскости. Пусть стационарные углы между ними равны $\varphi_i$. Рассмотрим $l$-геликоид, содержащий две данные $l$-плоскости. Как показано выше, матрица локальных координат произвольной плоскости $l$-геликоида может быть приведена к виду (16). Вычисляя расстояние между этими плоскостями по формуле (3), получим

$$ds^2 = (\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + ... + \varphi_l^2)dt^2 \qquad (17)$$

или

$$s = \int_0^1 \sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + ... + \varphi_l^2}dt = \sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + ... + \varphi_l^2}.$$

Таким образом, мы как и в случае грассманова многообразия евклидова пространства имеем метрику, связанную со стационарными углами.

Для вычисления расстояния между достаточно близкими евклидовыми $l$-плоскостями воспользуемся формулой (4) , которая после интегрирования также приводится к виду (17).

Внешний вид формулы (17) такой же как и в случае евклидова пространства, но их содержания различны. Одна из угловых 2-плоскостей может быть псевдоевклидовой, а значит один из стационарных углов может оказаться мнимым.

Полученные в статье факты внутренней геометрии грассманова многообразия псевдоевклидова пространства можно в дальнейшем использовать для изучения грассманова образа поверхности в этом пространстве.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Аминов Ю.А. Геометрия подмногообразий. – К.: Наукова думка, 2002. – 467с.
2. Борисенко А.А., Николаевский Ю.А. Многообразия Грассмана и грассманов образ подмногообразий //УМН - 1991. - Т.46. Вып.2(278). - С.41-80
3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц - М.: Наука, 1967. - 575с.
4. Маазикас И. К римановой геометрии грассмановых многообразий неизотропных подпространств псевдоевклидова пространства // Уч. записки Тартуск. ун-та - 1974. - 342. - С.76-82
5. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. - М.: Наука, 1967. - 664с.
6. Розенфельд Б.А. Неевклидовы пространства. - М.: Наука, 1969. - 547с.
7. Leichtweiss K. Zur Riemannschen Geometrie in Grassmanschen Mannigfultigkeiten // Math. Zeit. - 1961. - №4, - S.334-366.
8. Wong Y. C. Differential geometry of Grassman manifolds // Proc. Math.Acad. Sci. USA. - 1967. - P.589-594