Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.518.85; 517.518.88 № 826, 2008, с.115–127

Обобщенная интерполяционная задача для стилтьесовских функций в вырожденном случае

Ю.М. Дюкарев

Харьковский национальный университет, Украина

В этой статье рассмотрена вырожденная обобщенная интерполяционная задача для стилтьесовских функций. Предложен новый способ сведения вырожденных интерполяционных задач ко вполне неопределенным интерполяционным задачам. Все решения вырожденной интерполяционной задачи описаны в терминах дробно-линейных преобразований.
2000 Mathematics Subject Classification 41A05, 30E05.

1. Введение. В невырожденном случае обобщенная интерполяционная задача для стилтьесовских функций впервые была рассмотрена в статье [1]. В статье [2] были предложены некоторые подходы к вырожденной интерполяционной задаче для стилтьесовских функций. Более полное исследование вырожденных задач можно провести с помощью метода подпространств типа $\mathcal{K}$, который впервые был предложен в статье [3] для вырожденной задачи Шура. Впоследствии, в статьях [4] - [7] и в монографии [8] методом подпространств типа $\mathcal{K}$ были исследованы и некоторые другие интерполяционные задачи в вырожденном случае.

В этой статье рассмотрена обобщенная интерполяционная задача для стилтьесовских функций в вырожденном случае, которая охватывает широкий класс конкретных вырожденных интерполяционных задач. В статье получены следующие новые результаты для вырожденной обобщенной интерполяционной задачи стилтьесовского типа: а) введены пары согласованных подпространств типа $\mathcal{K}$ (см. определение 8); б) с помощью согласованных подпространств типа $\mathcal{K}$ сформулирована вспомогательная вполне неопределенная интерполяционная задача, резольвентная матрица которой (см. (28)) является резольвентной матрицей исходной вырожденной задачи; в) в терминах дробно-линейных преобразований над стилтьесовскими парами специального вида дано описание множества всех решений вырожденной обобщенной интерполяционной задачи для стилтьесовских функций (теорема 4).

Особенностью предложенной здесь схемы решения вырожденных задач является то обстоятельство, что вспомогательная интерполяционная задача является вполне неопределенной. В предлагавшихся другими авторами схемах вспомогательная интерполяционная задача была вырожденной.

Особо отметим, что в этой и во всех процитированных выше статьях используются многие идеи и методы подхода В.П. Потапова к решению интерполяционных задач анализа [9] - [13].

2. Обобщенная интерполяционная задача. Введем основные определения и обозначения и приведем без доказательства некоторые результаты по обобщенной интерполяционной задаче для стилтьесовских функций. Доказательства этих результатов имеются в статьях [1], [14].

Обозначим через $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$, $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$, $\mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$, $\mathbb{C}_\pm = \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$.

Пусть $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ – сепарабельные гильбертовы пространства и $\mathcal{H}$ – некоторое унитарное пространство. Символом $\{\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2\}$ обозначим множество всех ограниченных линейных операторов, действующих из $\mathcal{G}_1$ в $\mathcal{G}_2$, символом $\{\mathcal{G}_1\}$ обозначим множество $\{\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_1\}$, а символом $\{\mathcal{G}_1\}_H$ - множество ограниченных эрмитовых операторов в $\mathcal{G}_1$. Оператор $A \in \{\mathcal{G}_1\}_H$ называется неотрицательным, если $(f, Af) \geq 0$, $\forall f \in \mathcal{G}_1$. Множество неотрицательных операторов в $\mathcal{G}_1$ обозначим символом $\{\mathcal{G}_1\}_\geq$. Неотрицательный оператор $A \in \{\mathcal{G}_1\}_\geq$ называется строго положительным, если он обратим и $A^{-1} \in \{\mathcal{G}_1\}$. Множество строго положительных операторов в $\mathcal{G}_1$ обозначим символом $\{\mathcal{G}_1\}_>$. Пусть операторы $A, B \in \{\mathcal{G}_1\}_H$. Неравенство $A \geq B$ (соотв. $A > B$) означает, что $A - B \in \{\mathcal{G}_1\}_\geq$ (соотв. $A - B \in \{\mathcal{G}_1\}_>$).

Тождественный и нулевой операторы, действующие в пространстве $\mathcal{G}_1$, обозначим символами $I_{\mathcal{G}_1}$ и $O_{\mathcal{G}_1}$. Нулевой оператор, действующий из пространства $\mathcal{G}_1$ в пространство $\mathcal{G}_2$, обозначим символом $O_{\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2}$. Когда из контекста ясно, в каком пространстве действует оператор, мы иногда будем опускать нижний индекс у нулевого и тождественного операторов. Через $0_\mathcal{H}$ обозначим нулевой вектор в пространстве $\mathcal{H}$.

Пусть Ω область в $\mathbb{C}$ и $\mathcal{D} \subset \Omega$. Множество $\mathcal{D}$ называется дискретным в Ω, если $\mathcal{D} \cap \mathcal{K}$ является конечным множеством для любого компакта $\mathcal{K} \subset \Omega$.

Определение 1. Голоморфная оператор-функция (ОФ) $s : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+ \to \{\mathcal{H}\}$ называется *стилтьесовской*, если

$$(s(z) - s^*(z))/(z - \bar{z}) \geq O_\mathcal{H},\ \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \qquad s(x) \geq O_\mathcal{H},\ \forall x \in \mathbb{R}_-.$$

Класс всех стилтьесовских ОФ обозначим символом $\mathcal{S}$.

Определение 2. Пусть ОФ $p(z)$, $q(z)$ мероморфны в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ и принимают значения в $\{\mathcal{H}\}$. Пара $\operatorname{col}[p(z)\ q(z)]$ называется стилтьесовской, если для нее существует дискретное в $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ множество точек $\mathcal{D}_{pq}$ такое, что

$$
\begin{aligned}
&\text{ОФ } p(z),\ q(z) \text{ голоморфны в } \mathbb{C}\setminus\{\mathbb{R}_+\cup\mathcal{D}_{pq}\},\\
&p^*(z)p(z)+q^*(z)q(z)>O_{\mathcal{H}},\ \forall z\in\mathbb{C}\setminus\{\mathbb{R}_+\cup\mathcal{D}_{pq}\},\\
&[p^*(z),\bar{z}q^*(z)]\frac{J}{i(\bar{z}-z)}\begin{bmatrix} p(z)\\ zq(z)\end{bmatrix}\geq O_{\mathcal{H}},\ \forall z\in\mathbb{C}_\pm\setminus\mathcal{D}_{pq},\\
&[p^*(z),q^*(z)]\frac{J}{i(\bar{z}-z)}\begin{bmatrix} p(z)\\ q(z)\end{bmatrix}\geq O_{\mathcal{H}},\ \forall z\in\mathbb{C}_\pm\setminus\mathcal{D}_{pq},\ J=\begin{bmatrix} O_{\mathcal{H}} & -iI_{\mathcal{H}}\\ iI_{\mathcal{H}} & O_{\mathcal{H}}\end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Определение 3. Пусть даны две стилтьесовские пары $\operatorname{col}[p_1(z)\ q_1(z)]$ и $\operatorname{col}[p_2(z)\ q_2(z)]$ и $\mathcal{D}_{p_1q_1}$, $\mathcal{D}_{p_2q_2}$ обозначают соответствующие множества из определения 2. И пусть для этих пар существуют дискретное в $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ множество точек $\mathcal{D}$ и мероморфная ОФ $Q:\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+\to\{\mathcal{H}\}$ такие, что

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{D}\supset\{\mathcal{D}_{p_1q_1}\cup\mathcal{D}_{p_2q_2}\},\\
&\text{ОФ } p_1,\ q_1,\ p_2,\ q_2,\ Q \text{ голоморфны в } \mathbb{C}\setminus\{\mathbb{R}_+\cup\mathcal{D}\},\\
&Q^{-1}(z) \text{ существует и голоморфна в } \mathbb{C}\setminus\{\mathbb{R}_+\cup\mathcal{D}\},\\
&p_1(z)=p_2(z)Q(z),\ q_1(z)=q_2(z)Q(z),\ \forall z\in\mathbb{C}\setminus\{\mathbb{R}_+\cup\mathcal{D}\}.
\end{aligned}
$$

Тогда пары $\operatorname{col}[p_1(z)\ q_1(z)]$ и $\operatorname{col}[p_2(z)\ q_2(z)]$ называются *эквивалентными.*

Классы эквивалентности стилтьесовских пар обозначим через $\mathcal{S}_\infty$.

Пусть заданы операторы $K_1\in\{\mathcal{G}_1\}_\geq,\ K_2\in\{\mathcal{G}_2\}_\geq,\ L_1,\ L_2\in\{\mathcal{G}_2,\mathcal{G}_1\}$, $v_1\in\{\mathcal{H},\mathcal{G}_1\},\ u_2\in\{\mathcal{H},\mathcal{G}_2\}$. И пусть эти операторы удовлетворяют *основному тождеству* (ОТ)

$$K_1L_1-L_2K_2=-v_1u_2^*. \tag{1}$$

Рассмотрим операторы

$$T_1=L_2L_1^*,\ T_2=L_1^*L_2,\ u_1=L_2u_2,\ v_2=L_1^*v_1. \tag{2}$$

Непосредственно из определений операторов T_1 и T_2 имеем

$$T_1L_2=L_2T_2,\quad T_2L_1^*=L_1^*T_1. \tag{3}$$

Пусть операторы T_r таковы, что ОФ $R_{T_r}(z)=(I_{\mathcal{G}_r}-zT_r)^{-1},\ r=1,2$ мероморфны в $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$. Множество особых точек ОФ R_{T_1} и R_{T_2} в $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ обозначим символом $\mathcal{Z}$. И пусть $\overline{\mathcal{Z}}=\{z\in\mathbb{C}:\bar{z}\in\mathcal{Z}\}$. Из мероморфности R_{T_1} и R_{T_2} следует, что множества $\mathcal{Z}$ и $\overline{\mathcal{Z}}$ дискретны в $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$.

Из этих определений и из (3) следует, что $\forall z,t\in\mathbb{C}\setminus\{\mathbb{R}_+\cup\mathcal{Z}\}$

$$
\begin{gathered}
R_{T_1}(z)L_2=L_2R_{T_2}(z),\ R_{T_2}(z)L_1^*=L_1^*R_{T_1}(z),\\
(t-z)R_{T_r}(z)T_rR_{T_r}(t)=R_{T_r}(t)-R_{T_r}(z),\quad r=1,2.
\end{gathered} \tag{4}
$$

Определение 4. Упорядоченный набор операторов

$$\mathcal{P}=\{K_1,L_1,v_1,K_2,L_2,u_2\}, \tag{5}$$

удовлетворяющих всем перечисленным выше условиям, называется *обобщенной интерполяционной задачей стилтьесовского типа*, а пространства $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ называются *масштабными пространствами.*

Определение 5. ОФ $s \in \mathcal{S}$ называется решением обобщенной интерполяционной задачи, если она удовлетворяет следующей *системе основных матричных неравенств (ОМН) В.П. Потапова*

$$\left[\begin{array}{c|c} K_r & R_{T_r}(z)\{\, v_r z^{r-1} s(z) - u_r\,\} \\ \hline * & \{z^{r-1}s(z) - \bar{z}^{r-1}s^*(z)\}/\{z-\bar{z}\} \end{array}\right] \geq O,\ z \in \mathbb{C}_{\pm} \setminus \{\mathcal{Z} \cup \overline{\mathcal{Z}}\},\ r = 1, 2. \quad (6)$$

Множество всех решений обобщенной интерполяционной задачи обозначим символом $\mathcal{F}$.

Пусть дана обобщенная интерполяционная задача (5) и пусть масштабные пространства $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ представлены в виде ортогональной суммы своих подпространств (подпространства $\tilde{\mathcal{G}}_r$ предполагаются ненулевыми)

$$\mathcal{G}_r = \tilde{\mathcal{G}}_r \oplus \hat{\mathcal{G}}_r, \quad r = 1, 2. \quad (7)$$

Эти равенства понимаются в смысле естественного изоморфизма $\mathcal{G}_r$ и $\tilde{\mathcal{G}}_r \oplus \hat{\mathcal{G}}_r$. А именно, пусть $\tilde{P}_r$ (соотв. $\hat{P}_r$) обозначает ортопроектор пространства $\mathcal{G}_r$ на подпространство $\tilde{\mathcal{G}}_r$ (соотв. $\hat{\mathcal{G}}_r$). Тогда соответствующий изоморфизм имеет вид

$$\forall f \in \mathcal{G}_r \leftrightarrow \operatorname{col}[\tilde{P}_r f,\ \hat{P}_r f] \in \tilde{\mathcal{G}}_r \oplus \hat{\mathcal{G}}_r. \quad (8)$$

Пусть выполнены условия

$$L_1\tilde{P}_2 = \tilde{P}_1 L_1 \tilde{P}_2, \qquad \tilde{P}_1 L_2 = \tilde{P}_1 L_2 \tilde{P}_2. \quad (9)$$

В соответствии с (7) – (9) и (2) введем матричные обозначения ($r = 1, 2$)

$$K_r = \begin{bmatrix} \tilde{K}_r & B_r \\ B_r^* & C_r \end{bmatrix},\ L_1 = \begin{bmatrix} \tilde{L}_1 & D_1 \\ O_{\tilde{\mathcal{G}}_2\hat{\mathcal{G}}_1} & \hat{L}_1 \end{bmatrix},\ L_2 = \begin{bmatrix} \tilde{L}_2 & O_{\hat{\mathcal{G}}_2\tilde{\mathcal{G}}_1} \\ E_2 & \hat{L}_2 \end{bmatrix},\ v_1 = \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \hat{v}_1 \end{bmatrix},$$

$$u_2 = \begin{bmatrix} \tilde{u}_2 \\ \hat{u}_2 \end{bmatrix},\ u_1 = \begin{bmatrix} \tilde{L}_2\tilde{u}_2 \\ E_2\tilde{u}_2 + \hat{L}_2\hat{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \hat{u}_1 \end{bmatrix},\ v_2 = \begin{bmatrix} \tilde{L}_1^*\tilde{v}_1 \\ D_1^*\tilde{v}_1 + \hat{L}_1^*\hat{v}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{v}_2 \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix},$$

$$T_1 = L_2L_1^* = \begin{bmatrix} \tilde{L}_2\tilde{L}_1^* & O_{\hat{\mathcal{G}}_1\tilde{\mathcal{G}}_1} \\ E_2\tilde{L}_1^* + \hat{L}_2D_1^* & \hat{L}_2\hat{L}_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{T}_1 & O_{\hat{\mathcal{G}}_1\tilde{\mathcal{G}}_1} \\ \tilde{D}_1 & \hat{T}_1 \end{bmatrix},$$

$$T_2 = L_1^*L_2 = \begin{bmatrix} \tilde{L}_1^*\tilde{L}_2 & O_{\hat{\mathcal{G}}_2\tilde{\mathcal{G}}_2} \\ D_1^*\tilde{L}_2 + \hat{L}_1^*E_2 & \hat{L}_1^*\hat{L}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{T}_2 & O_{\hat{\mathcal{G}}_2\tilde{\mathcal{G}}_2} \\ \tilde{D}_2 & \hat{T}_2 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{P}_r = \begin{bmatrix} I_{\tilde{\mathcal{G}}_r} & O_{\hat{\mathcal{G}}_r\tilde{\mathcal{G}}_r} \\ O_{\tilde{\mathcal{G}}_r\hat{\mathcal{G}}_r} & O_{\hat{\mathcal{G}}_r} \end{bmatrix},\quad \hat{P}_r = \begin{bmatrix} O_{\tilde{\mathcal{G}}_r} & O_{\hat{\mathcal{G}}_r\tilde{\mathcal{G}}_r} \\ O_{\tilde{\mathcal{G}}_r\hat{\mathcal{G}}_r} & I_{\hat{\mathcal{G}}_r} \end{bmatrix},$$

$$R_{T_r}(z) = \begin{bmatrix} R_{\tilde{T}_r}(z) & O_{\hat{\mathcal{G}}\tilde{\mathcal{G}}} \\ R_{\hat{T}_r}(z)\tilde{D}_r R_{\tilde{T}_r}(z) & R_{\hat{T}_r}(z) \end{bmatrix},\quad R_{\tilde{T}_r}(z) = (I_{\tilde{\mathcal{G}}_r} - z\tilde{T}_r)^{-1},$$

$$R_{\hat{T}_r}(z) = (I_{\hat{\mathcal{G}}_r} - z\hat{T}_r)^{-1}. \tag{10}$$

Отметим, что операторы в левых частях двух первых равенств являются операторами в пространствах $\mathcal{G}_r$, а в правых частях записаны матричные представления тех же самых операторов в пространствах $\tilde{\mathcal{G}}_r \oplus \hat{\mathcal{G}}_r$. Матричные элементы операторов K_r имеют вид

$$\tilde{K}_r = \tilde{P}_r K_r|_{\tilde{\mathcal{G}}_r},\ B_r = \tilde{P}_r K_r|_{\hat{\mathcal{G}}_r},\ B_r^* = \hat{P}_r K_r|_{\tilde{\mathcal{G}}_r},\ C_r = \hat{P}_r K_r|_{\hat{\mathcal{G}}_r}.$$

В аналогичном смысле понимаем и остальные равенства в (10).

Из ОТ (1) и представлений (10) следует *индуцированное* ОТ

$$\tilde{K}_1\tilde{L}_1 - \tilde{L}_2\tilde{K}_2 = -\tilde{v}_1\tilde{u}_2^*. \tag{11}$$

Отсюда следует, что

$$\tilde{\mathcal{P}} = \{\tilde{K}_1, \tilde{L}_1, \tilde{v}_1, \tilde{K}_2, \tilde{L}_2, \tilde{u}_2\} \tag{12}$$

является интерполяционной задачей стилтьесовского типа с масштабными пространствами $\{\tilde{\mathcal{G}}_1, \tilde{\mathcal{G}}_2\}$.

Определение 6. Интерполяционная задача (12) называется *сужением* интерполяционной задачи (5) на подпространства $\tilde{\mathcal{G}}_1$ и $\tilde{\mathcal{G}}_2$.

Определение 7. Обобщенная интерполяционная задача (5) называется *вполне неопределенной*, если

$$K_1 \in \{\mathcal{G}_1\}_>,\ K_2 \in \{\mathcal{G}_2\}_>,\ v_1 h = 0_{\mathcal{G}_1} \Leftrightarrow h = 0_{\mathcal{H}},\ u_2 h = 0_{\mathcal{G}_2} \Leftrightarrow h = 0_{\mathcal{H}}. \tag{13}$$

С обобщенной вполне неопределенной задачей (5) свяжем резольвентную матрицу

$$U_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{\mathcal{H}} + zv_2^* R_{T_2^*}(z) K_2^{-1} u_2 & -zv_1^* R_{T_1^*}(z) K_1^{-1} v_1 \\ u_2^* R_{T_2^*}(z) K_2^{-1} u_2 & I_{\mathcal{H}} - zu_1^* R_{T_1^*}(z) K_1^{-1} v_1 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Здесь $R_{T_r^*}(z) = (I_{\mathcal{G}_r} - zT_r^*)^{-1},\ r = 1, 2$, а разбиение на блоки понимаем в соответствии с представлением $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Ясно, что ОФ U_1 голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_+ \cup \overline{\mathcal{Z}}\}$ и $U_1 : \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_+ \cup \overline{\mathcal{Z}}\} \to \{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}\}$.

Пусть дана вполне неопределенная обобщенная интерполяционная задача (5) и ее резольвентная матрица определена в (14). Тогда формула

$$s(z) = \{\gamma_1(z)p(z) + \delta_1(z)q(z)\} \cdot \{\alpha_1(z)p(z) + \beta_1(z)q(z)\}^{-1} \tag{15}$$

устанавливает биективное соответствие между решениями $\mathcal{F}$ обобщенной интерполяционной задачи и классами эквивалентности $\mathcal{S}_\infty$ стилтьесовских пар. Здесь $\alpha_1(z),\ \beta_1(z), \gamma_1(z),\ \delta_1(z)$ – блоки резольвентной матрицы $U_1(z)$, определенные в (14).

3. Вырожденная интерполяционная задача. В этом разделе мы будем рассматривать обобщенную интерполяционную задачу для стилтьесовских функций

$$\mathcal{P} = \{K_1, L_1, v_1, K_2, L_2, u_2\} \tag{16}$$

в вырожденном случае. Он характеризуются тем, что хотя бы один из операторов K_r имеет нетривиальное ядро. Кроме того, масштабные пространства $\mathcal{G}_r,\ r=1,2$ будем считать конечномерными.

Определение 8. Пара подпространств $\tilde{\mathcal{G}}_r \subset \mathcal{G}_r,\ r=1,2$ называется согласованной парой подпространств типа $\mathcal{K}$ для вырожденной обобщенной интерполяционной задачи (16), если выполнены следующие условия:

1) оба подпространства $\tilde{\mathcal{G}}_r$ являются ненулевыми и хотя бы одно из этих подпространств не совпадает со всем пространством $\mathcal{G}_r$;

2) выполнены условия

$$L_1\tilde{P}_2 = \tilde{P}_1L_1\tilde{P}_2,\ \tilde{P}_1L_2 = \tilde{P}_1L_2\tilde{P}_2 \tag{17}$$

($\tilde{P}_r$ обозначает ортопроектор пространства $\mathcal{G}_r$ на подпространство $\tilde{\mathcal{G}}_r$);

3) пространства $\mathcal{G}_r$ представимы в виде прямой суммы

$$\mathcal{G}_r = \tilde{\mathcal{G}}_r \dot{+} \ker K_r; \tag{18}$$

4) сужение $\tilde{\mathcal{P}}$ интерполяционной задачи $\mathcal{P}$ на пару подпространств $\tilde{\mathcal{G}}_1$ и $\tilde{\mathcal{G}}_2$ является вполне неопределенной обобщенной интерполяционной задачей.

Пусть дана вырожденная обобщенная интерполяционная задача (16), для которой $\tilde{\mathcal{G}}_1$ и $\tilde{\mathcal{G}}_2$ являются согласованной парой подпространств типа $\mathcal{K}$. Рассмотрим ортогональное разложение

$$\mathcal{G}_r = \tilde{\mathcal{G}}_r \oplus \hat{\mathcal{G}}_r,\quad r=1,2. \tag{19}$$

В соответствии с этими ортогональными разложениями имеют место следующие матричные представления (см. [3], [4])

$$K_r = \begin{bmatrix} \tilde{K}_r & B_r \\ B_r^* & \hat{C}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{\tilde{\mathcal{G}}_r} & O_{\hat{\mathcal{G}}_r\tilde{\mathcal{G}}_r} \\ B_r^*\tilde{K}_r^{-1} & I_{\hat{\mathcal{G}}_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{K}_r & O_{\hat{\mathcal{G}}_r\tilde{\mathcal{G}}_r} \\ O_{\tilde{\mathcal{G}}_r\hat{\mathcal{G}}_r} & O_{\hat{\mathcal{G}}_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\tilde{\mathcal{G}}_r} & \tilde{K}_r^{-1}B_r \\ O_{\tilde{\mathcal{G}}_r\hat{\mathcal{G}}_r} & I_{\hat{\mathcal{G}}_r} \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Подставим в ОТ (1) блочные представления (10) для операторов L_1, L_2, v_1, u_2 и блочные представления (20) для операторов K_1, K_2. Получим

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{K}_1\tilde{L}_1 - \tilde{L}_2\tilde{K}_2 & \tilde{K}_1D_1 + B_1\hat{L}_1 - \tilde{L}_2B_2 \\ \hline B_1^*\tilde{L}_1 - E_2\tilde{K}_2 - \hat{L}_2B_2^* & B_1^*D_1 + B_1^*\tilde{K}_1^{-1}B_1\hat{L}_1 - E_2B_2 - \hat{L}_2B_2^*\tilde{K}_2^{-1}B_2 \end{array}\right]$$

$$= -\left[\begin{array}{c|c} \tilde{v}_1\tilde{u}_2^* & \tilde{v}_1\hat{u}_2^* \\ \hline \hat{v}_1\tilde{u}_2^* & \hat{v}_1\hat{u}_2^* \end{array}\right]. \tag{21}$$

Из ОТ (1) следуют еще два тождества

$$T_rK_r - K_rT_r^* = v_ru_r^* - u_rv_r^*,\ r=1,2.$$

Подставим в эти тождества блочные представления (10) для операторов T_r, $v_r, u_r,\ r=1,2$ и блочные представления (20) для операторов K_1, K_2. Получим

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{K}_r\tilde{T}_r^* - \tilde{T}_r\tilde{K}_r & -\tilde{T}_r\tilde{B}_r + \tilde{K}_r\tilde{D}_r^* + \tilde{B}_r\hat{T}_r^* \\ \hline \tilde{B}_r^*\tilde{T}_r^* - \tilde{D}_r\tilde{K}_r - \hat{T}_r\tilde{B}_r^* & \tilde{B}_r^*\tilde{D}_r^* + \tilde{B}_r^*\tilde{K}_r^{-1}\tilde{B}_r\hat{T}_r^* - \tilde{D}_r\tilde{B}_r - \hat{T}_r\tilde{B}_r^*\tilde{K}_r^{-1}\tilde{B}_r \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \tilde{u}_r\tilde{v}_r^* - \tilde{v}_r\tilde{u}_r^* & \tilde{u}_r\hat{v}_r^* - \tilde{v}_r\hat{u}_r^* \\ \hline \hat{u}_r\tilde{v}_r^* - \hat{v}_r\tilde{u}_r^* & \hat{u}_r\hat{v}_r^* - \hat{v}_r\hat{u}_r^* \end{array}\right], \quad r = 1, 2. \tag{22}$$

Теорема 1. *Пусть дана вырожденная обобщенная интерполяционная задача $\mathcal{P} = \{K_1, L_1, v_1, K_2, L_2, u_2\}$ стилтьесовского типа, для которой $\tilde{\mathcal{G}}_1$ и $\tilde{\mathcal{G}}_2$ являются согласованной парой подпространств типа $\mathcal{K}$. Пусть интерполяционная задача $\tilde{\mathcal{P}} = \{\tilde{K}_1, \tilde{L}_1, \tilde{v}_1, \tilde{K}_2, \tilde{L}_2, \tilde{u}_2\}$ является сужением интерполяционной задачи $\mathcal{P}$ на подпространства $\tilde{\mathcal{G}}_1$ и $\tilde{\mathcal{G}}_2$. И пусть $\mathcal{F}$ и $\tilde{\mathcal{F}}$ обозначают соответственно множества решений интерполяционных задач $\mathcal{P}$ и $\tilde{\mathcal{P}}$.*

ОФ $s \in \mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда $s \in \tilde{\mathcal{F}}$ и

$$\Phi_r(z) z^{r-1} s(z) = \Psi_r(z), \quad r = 1, 2, \quad z \in \mathbb{C}_\pm \setminus \{\mathcal{Z} \cup \overline{\mathcal{Z}}\}. \tag{23}$$

Здесь

$$\Phi_r(z) = -B_r^* \tilde{K}_r^{-1} R_{\tilde{T}_r}(z)\tilde{v}_r + z R_{\hat{T}_r}(z)\tilde{D}_r R_{\tilde{T}_r}(z)\tilde{v}_r + R_{\hat{T}_r}(z)\hat{v}_r, \tag{24}$$

$$\Psi_r(z) = -B_r^* \tilde{K}_r^{-1} R_{\tilde{T}_r}(z)\tilde{u}_r + z R_{\hat{T}_r}(z)\tilde{D}_r R_{\tilde{T}_r}(z)\tilde{u}_r + R_{\hat{T}_r}(z)\hat{u}_r. \tag{25}$$

Доказательство. Пусть $s \in \mathcal{F}$. Тогда s удовлетворяет системе ОМН (6). Подставим представления операторов (10) и (19) в (6). Получим

$$\left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} I_{\tilde{\mathcal{G}}_r} & O_{\hat{\mathcal{G}}_r\tilde{\mathcal{G}}_r} \\ B_r^*\tilde{K}_r^{-1} & I_{\hat{\mathcal{G}}_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{K}_r & O_{\hat{\mathcal{G}}_r\tilde{\mathcal{G}}_r} \\ O_{\tilde{\mathcal{G}}_r\hat{\mathcal{G}}_r} & O_{\hat{\mathcal{G}}_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\tilde{\mathcal{G}}_r} & \tilde{K}_r^{-1}B_r \\ O_{\tilde{\mathcal{G}}_r\hat{\mathcal{G}}_r} & I_{\hat{\mathcal{G}}_r} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} R_{\tilde{T}_r}(z) & O_{\hat{\mathcal{G}}_r\tilde{\mathcal{G}}_r} \\ R_{\hat{T}_r}(z)\tilde{D}_r R_{\tilde{T}_r}(z) & R_{\hat{T}_r}(z) \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{v}_r \\ \hat{v}_r \end{bmatrix} z^{r-1}s(z) - \begin{bmatrix} \tilde{u}_r \\ \hat{u}_r \end{bmatrix} \right\} \\ \hline * & \{z^{r-1}s(z) - \bar{z}^{r-1}s^*(z)\}/\{z - \bar{z}\} \end{array}\right] \geq O_{\tilde{\mathcal{G}}_r \oplus \hat{\mathcal{G}}_r \oplus \mathcal{H}}.$$

Умножим это неравенство слева и справа на операторы

$$\left[\begin{array}{cc|c} I_{\tilde{\mathcal{G}}_r} & O_{\hat{\mathcal{G}}_r\tilde{\mathcal{G}}_r} & O_{\mathcal{H}_r\tilde{\mathcal{G}}_r} \\ -B_r^*\tilde{K}_r^{-1} & I_{\hat{\mathcal{G}}_r} & O_{\mathcal{H}_r\hat{\mathcal{G}}_r} \\ \hline * & & I_{\mathcal{H}_r} \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{cc|c} I_{\tilde{\mathcal{G}}_r} & -\tilde{K}_r^{-1}B & O_{\mathcal{H}_r\tilde{\mathcal{G}}_r} \\ O_{\tilde{\mathcal{G}}_r\hat{\mathcal{G}}_r} & I_{\hat{\mathcal{G}}_r} & O_{\mathcal{H}_r\hat{\mathcal{G}}_r} \\ \hline * & & I_{\mathcal{H}_r} \end{array}\right].$$

Получим

$$\left[\begin{array}{cc|c} \tilde{K}_r & O_{\hat{\mathcal{G}}_r\tilde{\mathcal{G}}_r} & \tilde{R}_{T_r}(z)[\tilde{v}_r z^{r-1}s(z) - \tilde{u}_r] \\ O_{\tilde{\mathcal{G}}_r\hat{\mathcal{G}}_r} & O_{\hat{\mathcal{G}}_r} & \Phi_r(z)z^{r-1}s(z) - \Psi_r(z) \\ \hline * & & \{z^{r-1}s(z) - \bar{z}^{r-1}s^*(z)\}/\{z - \bar{z}\} \end{array}\right] \geq O_{\tilde{\mathcal{G}}_r \oplus \hat{\mathcal{G}}_r \oplus \mathcal{H}}. \tag{26}$$

Отсюда $(r = 1, 2)$

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{K}_r & R_{\tilde{T}_r}(z)\{\, \tilde{v}_r w(z) - \tilde{u}_r \,\} \\ \hline * & \{z^{r-1}s(z) - \bar{z}^{r-1}s^*(z)\}/\{z - \bar{z}\} \end{array}\right] \geq O, \ \ \Phi_r(z)z^{r-1}s(z) = \Psi_r(z). \tag{27}$$

Таким образом, $s \in \tilde{\mathcal{F}}$ и выполнены соотношения (22).

Наоборот, пусть $s \in \tilde{\mathcal{F}}$ и выполнены соотношения (22). Тогда выполняются неравенства и равенства (27). Обращая приведенные только что результаты, получим, что s удовлетворяет системе ОМН (6), т.е. $s \in \mathcal{F}$. □

Теорема 2. *Пусть дана вырожденная обобщенная интерполяционная задача* $\mathcal{P} = \{K_1, L_1, v_1, K_2, L_2, u_2\}$ *стилтьесовского типа, для которой* $\tilde{\mathcal{G}}_1$ *и* $\tilde{\mathcal{G}}_2$ *являются согласованной парой подпространств типа* $\mathcal{K}$. *Пусть интерполяционная задача* $\tilde{\mathcal{P}} = \{\tilde{K}_1, \tilde{L}_1, \tilde{v}_1, \tilde{K}_2, \tilde{L}_2, \tilde{u}_2\}$ *является сужением интерполяционной задачи* $\mathcal{P}$ *на подпространства* $\tilde{\mathcal{G}}_1$ *и* $\tilde{\mathcal{G}}_2$. *И пусть ОФ*

$$\tilde{U}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_1 & \tilde{\beta}_1 \\ \tilde{\gamma}_1 & \tilde{\delta}_1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} I_{\mathcal{H}} + z\tilde{v}_2^* R_{\tilde{T}_2^*}(z)\tilde{K}_2^{-1}\tilde{u}_2 & -z\tilde{v}_1^* R_{\tilde{T}_1^*}(z)\tilde{K}_1^{-1}\tilde{v}_1 \\ \hline \tilde{u}_2^* R_{\tilde{T}_2^*}(z)\tilde{K}_2^{-1}\tilde{u}_2 & I_{\mathcal{H}} - z\tilde{u}_1^* R_{\tilde{T}_1^*}(z)\tilde{K}_1^{-1}\tilde{v}_1 \end{array}\right] \tag{28}$$

является резольвентной матрицей вполне неопределенной интерполяционной задачи , а $\Phi_r(z),\ \Psi_r(z),\ r = 1, 2$ *определены формулами (24) и (25).*

Тогда имеют место равенства

$$\Psi_1(z)\tilde{\beta}_1(z) - \Phi_1(z)\tilde{\delta}_1(z) = R_{\hat{T}_1}(z)\Big(B_1^*\tilde{K}_1^{-1}\tilde{v}_1 - \hat{v}_1\Big), \tag{29}$$

$$\Phi_1(z)\tilde{\gamma}_1(z) - \Psi_1(z)\tilde{\alpha}_1(z) = R_{\hat{T}_1}(z)\hat{L}_2\Big(B_2^*\tilde{K}_2^{-1}\tilde{u}_2 - \hat{u}_2\Big), \tag{30}$$

$$\Psi_2(z)\tilde{\beta}_1(z) - z\Phi_2(z)\tilde{\delta}_1(z) = zR_{\hat{T}_2}(z)\hat{L}_1^*\Big(B_1^*\tilde{K}_1^{-1}\tilde{v}_1 - \hat{v}_1\Big), \tag{31}$$

$$z\Phi_2(z)\tilde{\gamma}_1(z) - \Psi_2(z)\tilde{\alpha}_1(z) = R_{\hat{T}_2}(z)\Big(B_2^*\tilde{K}_2^{-1}\tilde{u}_2 - \hat{u}_2\Big). \tag{32}$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}
&\Psi_1(z)\tilde{\beta}_1(z) - \Phi_1(z)\tilde{\delta}_1(z) \\
&= -\Big\{\Big[-B_1^*\tilde{K}_1^{-1}R_{\tilde{T}_1}(z) + zR_{\hat{T}_1}(z)\tilde{D}_1R_{\tilde{T}_1}(z)\Big]\tilde{u}_1 + R_{\hat{T}_1}(z)\hat{u}_1\Big\}\,\tilde{v}_1^*R_{\tilde{T}_1^*}(z)\tilde{K}_1^{-1}\tilde{v}_1 z \\
&\quad -\Big\{\Big[-B_1^*\tilde{K}_1^{-1}R_{\tilde{T}_1}(z) + zR_{\hat{T}_1}(z)\tilde{D}_1R_{\tilde{T}_1}(z)\Big]\tilde{v}_1 + R_{\hat{T}_1}(z)\hat{v}_1\Big\} \\
&\quad +\Big\{\Big[-B_1^*\tilde{K}_1^{-1}R_{\tilde{T}_1}(z) + zR_{\hat{T}_1}(z)\tilde{D}_1R_{\tilde{T}_1}(z)\Big]\tilde{v}_1 + R_{\hat{T}_1}(z)\hat{v}_1\Big\}\,\tilde{u}_1^*R_{\tilde{T}_1^*}(z)\tilde{K}_1^{-1}\tilde{v}_1 z \\
&= -\Big[-B_1^*\tilde{K}_1^{-1}R_{\tilde{T}_1}(z) + zR_{\hat{T}_1}(z)\tilde{D}_1R_{\tilde{T}_1}(z)\Big]\Big[\tilde{u}_1\tilde{v}_1^* - \tilde{v}_1\tilde{u}_1^*\Big]R_{\tilde{T}_1^*}(z)\tilde{K}_1^{-1}\tilde{v}_1 z \\
&\quad +R_{\hat{T}_1}(z)\Big[-\hat{u}_1\tilde{v}_1^* + \hat{v}_1\tilde{u}_1^*\Big]R_{\tilde{T}_1^*}(z)\tilde{K}_1^{-1}\tilde{v}_1 z \\
&\quad -\Big[-B_1^*\tilde{K}_1^{-1}R_{\tilde{T}_1}(z) + zR_{\hat{T}_1}(z)\tilde{D}_1R_{\tilde{T}_1}(z)\Big]\tilde{v}_1 - R_{\hat{T}_1}(z)\hat{v}_1 \\
&= -\Big[-B_1^*\tilde{K}_1^{-1}R_{\tilde{T}_1}(z) + zR_{\hat{T}_1}(z)\tilde{D}_1R_{\tilde{T}_1}(z)\Big](\tilde{K}_1\tilde{T}_1^* - \tilde{T}_1\tilde{K}_1)R_{\tilde{T}_1^*}(z)\tilde{K}_1^{-1}\tilde{v}_1 z \\
&\quad +R_{\hat{T}_1}(z)\Big[-\tilde{B}_1^*\tilde{T}_1^* + \tilde{D}_1\tilde{K}_1 + \hat{T}_1\tilde{B}_1^*\Big]R_{\tilde{T}_1^*}(z)\tilde{K}_1^{-1}\tilde{v}_1 z \\
&\quad -\Big[-B_1^*\tilde{K}_1^{-1}R_{\tilde{T}_1}(z) + zR_{\hat{T}_1}(z)\tilde{D}_1R_{\tilde{T}_1}(z)\Big]\tilde{v}_1 - R_{\hat{T}_1}(z)\hat{v}_1 \\
&= -\Big[-B_1^*\tilde{K}_1^{-1}R_{\tilde{T}_1}(z) + zR_{\hat{T}_1}(z)\tilde{D}_1R_{\tilde{T}_1}(z)\Big]\tilde{K}_1\tilde{T}_1^*R_{\tilde{T}_1^*}(z)\tilde{K}_1^{-1}\tilde{v}_1 z
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\Big[-B_1^*\tilde K_1^{-1}R_{\tilde T_1}(z)+zR_{\hat T_1}(z)\tilde D_1R_{\tilde T_1}(z)\Big]\tilde T_1\tilde K_1R_{\tilde T_1^*}(z)\tilde K_1^{-1}\tilde v_1z\\
&+R_{\hat T_1}(z)\Big[-\tilde B_1^*\tilde T_1^*+\tilde D_1\tilde K_1+\hat T_1\tilde B_1^*\Big]R_{\tilde T_1^*}(z)\tilde K_1^{-1}\tilde v_1z\\
&-\Big[-B_1^*\tilde K_1^{-1}R_{\tilde T_1}(z)+zR_{\hat T_1}(z)\tilde D_1R_{\tilde T_1}(z)\Big]\tilde v_1-R_{\hat T_1}(z)\hat v_1\\
=&\Big[zY_1^*\tilde K_1^{-1}R_{\tilde T_1}(z)\tilde K_1\tilde T_1^*R_{\tilde T_1^*}(z)\tilde K_1^{-1}-z^2R_{\hat T_1}(z)\tilde D_1R_{\tilde T_1}(z)\tilde K_1\tilde T_1^*R_{\tilde T_1^*}(z)\tilde K_1^{-1}\\
&-zY_1^*\tilde K_1^{-1}R_{\tilde T_1}(z)\tilde T_1\tilde K_1R_{\tilde T_1^*}(z)\tilde K_1^{-1}+z^2R_{\hat T_1}(z)\tilde D_1R_{\tilde T_1}(z)\tilde T_1\tilde K_1R_{\tilde T_1^*}(z)\tilde K_1^{-1}\\
&-zR_{\hat T_1}(z)\tilde B_1^*\tilde T_1^*R_{\tilde T_1^*}(z)\tilde K_1^{-1}+zR_{\hat T_1}(z)\tilde D_1\tilde K_1R_{\tilde T_1^*}(z)\tilde K_1^{-1}\\
&+zR_{\hat T_1}(z)\hat T_1\tilde B_1^*R_{\tilde T_1^*}(z)\tilde K_1^{-1}+B_1^*\tilde K_1^{-1}R_{\tilde T_1}(z)-zR_{\hat T_1}(z)\tilde D_1R_{\tilde T_1}(z)\Big]\tilde v_1-R_{\hat T_1}(z)\hat v_1\\
=&\Big[zR_{\hat T_1}(z)\tilde D_1R_{\tilde T_1}(z)\Big(-z\tilde K_1\tilde T_1^*+z\tilde T_1\tilde K_1+(I-z\tilde T_1)\tilde K_1-\tilde K_1(I-z\tilde T_1^*)\Big)\\
&\qquad\qquad\times R_{\tilde T_1^*}(z)\tilde K_1^{-1}\\
&+B_1^*\tilde K_1^{-1}R_{\tilde T_1}(z)\Big(z\tilde K_1\tilde T_1^*-z\tilde T_1\tilde K_1+\tilde K_1(I-z\tilde T_1^*)\Big)R_{\tilde T_1^*}(z)\tilde K_1^{-1}\\
&-zR_{\hat T_1}(z)\tilde B_1^*\tilde T_1^*R_{\tilde T_1^*}(z)\tilde K_1^{-1}+zR_{\hat T_1}(z)\hat T_1\tilde B_1^*R_{\tilde T_1^*}(z)\tilde K_1^{-1}\Big]\tilde v_1-R_{\hat T_1}(z)\hat v_1\\
=&\Big[B_1^*\tilde K_1^{-1}R_{\tilde T_1}(z)(I-z\tilde T_1)\tilde K_1R_{\tilde T_1^*}(z)\tilde K_1^{-1}\\
&-zR_{\hat T_1}(z)\tilde B_1^*\tilde T_1^*R_{\tilde T_1^*}(z)\tilde K_1^{-1}+zR_{\hat T_1}(z)\hat T_1\tilde B_1^*R_{\tilde T_1^*}(z)\tilde K_1^{-1}\Big]\tilde v_1-R_{\hat T_1}(z)\hat v_1\\
=&R_{\hat T_1}(z)\Big[(I-z\hat T)B_1^*-z\tilde B_1^*\tilde T_1^*+z\hat T_1\tilde B_1^*\Big]R_{\tilde T_1^*}(z)\tilde K_1^{-1}\tilde v_1-R_{\hat T_1}(z)\hat v_1\\
=&R_{\hat T_1}(z)\Big(B_1^*\tilde K_1^{-1}\tilde v_1-\hat v_1\Big).
\end{aligned}
$$

В этой цепочке равенств первое равенство следует из (24), (25) и (28), а третье – из (22). Формула (29) доказана. Формулы (30)-(32) доказываются аналогичным образом. □

Теорема 3. *Пусть дана вырожденная обобщенная интерполяционная задача $\mathcal P=\{K_1,L_1,v_1,K_2,L_2,u_2\}$ стилтьесовского типа, для которой $\tilde{\mathcal G}_1$ и $\tilde{\mathcal G}_2$ являются согласованной парой подпространств типа $\mathcal K$. Пусть вполне неопределенная интерполяционная задача $\tilde{\mathcal P}=\{\tilde K_1,\tilde L_1,\tilde v_1,\tilde K_2,\tilde L_2,\tilde u_2\}$ является сужением интерполяционной задачи $\mathcal P$ на подпространства $\tilde{\mathcal G}_1$ и $\tilde{\mathcal G}_2$. И пусть резольвентная матрица задачи $\tilde{\mathcal P}$ определена в (28).*

Тогда формула

$$
s(z)=\Big\{\tilde\gamma_1(z)p(z)+\tilde\delta_1(z)q(z)\Big\}\cdot\Big\{\tilde\alpha_1(z)p(z)+\tilde\beta_1(z)q(z)\Big\}^{-1} \tag{33}
$$

устанавливает биективное соответствие между решениями $\mathcal F$ обобщенной интерполяционной задачи $\mathcal P$ и классами эквивалентности стилтьесовских пар, удовлетворяющих условиям

$$
\hat L_2\Big(B_2^*\tilde K_2^{-1}\tilde u_2-\hat u_2\Big)p(z)=\Big(B_1^*\tilde K_1^{-1}\tilde v_1-\hat v_1\Big)q(z), \tag{34}
$$

$$
\Big(B_2^*\tilde K_2^{-1}\tilde u_2-\hat u_2\Big)p(z)=\hat L_1^*\Big(B_1^*\tilde K_1^{-1}\tilde v_1-\hat v_1\Big)zq(z). \tag{35}
$$

Доказательство. Заметим, что если некоторая стилтьесовская пара удовлетворяет условиям (34) и (35), то этим условиям удовлетворяют и все эквивалентные пары.

Пусть ОФ $s \in \mathcal{F}$. По теореме 1 $s \in \tilde{\mathcal{F}}$ и, следовательно, допускает представление (33). Кроме того, выполнены равенства (23). Подставим в (23) представление (33). Получим

$$\Phi_r(z)z^{r-1}\left\{\tilde{\gamma}_1(z)p(z)+\tilde{\delta}_1(z)q(z)\right\} = \Psi_r(z)\left\{\tilde{\alpha}_1(z)p(z)+\tilde{\beta}_1(z)q(z)\right\}, \quad r=1,2.$$

Отсюда

$$\big(z^{r-1}\Phi_r(z)\tilde{\gamma}_1(z)-\Psi_r(z)\tilde{\alpha}_1(z)\big)p(z) = \big(\Psi_r(z)\tilde{\beta}_1(z)-z^{r-1}\Phi_r(z)\tilde{\delta}_1(z)\big)q(z),\ r=1,2.$$

Воспользовавшись формулами (29) - (32), получим (34) и (35).

Пусть теперь ОФ $s(z)$ допускает представление (33) и для стилтьесовской пары $\operatorname{col}[p(z),\, q(z)]$ выполнены условия (34) - (35). Из (33) следует, что $s(z) \in \tilde{\mathcal{F}}$. Из условий (34) - (35) и теоремы 2 следуют условия (23). По теореме 1 $s(z) \in \mathcal{F}$. □

Операторы $A_1 : \mathcal{H} \to \hat{\mathcal{G}}_1, \quad A_2 : \mathcal{H} \to \hat{\mathcal{G}}_2$ зададим формулами

$$A_1 = B_1^*\tilde{K}_1^{-1}\tilde{v}_1 - \hat{v}_1, \quad A_2 = B_2^*\tilde{K}_2^{-1}\tilde{u}_2 - \hat{u}_2. \tag{36}$$

Лемма 1. *Стилтьесовская пара* $\operatorname{col}[p(z),\, q(z)]$ *удовлетворяет условиям (34) и (35) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условиям*

$$A_2p(z) = O, \quad A_1q(z) = O. \tag{37}$$

Доказательство. Пусть стилтьесовская пара $\operatorname{col}[p(z),\, q(z)]$ удовлетворяет условиям (34) и (35). Умножим (35) слева на оператор $-\hat{L}_2$ и сложим с (34). Получим

$$\Big(I - z\hat{L}_2\hat{L}_1^*\Big)\Big(B_1^*\tilde{K}_1^{-1}\tilde{v}_1 - \hat{v}_1\Big)q(z) = O.$$

Отсюда и из того, что $\det(I - z\hat{L}_2\hat{L}_1^*)$ не равен тождественно нулю, следует второе из равенств (37). Первое равенство в (37) доказывается аналогичным образом. Очевидно, что из (37) следуют (34) и (35). □

Рассмотрим ортогональные разложения

$$\mathcal{H} = \ker A_1 \oplus \operatorname{im} A_1^*, \quad \mathcal{H} = \ker A_2 \oplus \operatorname{im} A_2^*. \tag{38}$$

Лемма 2. *Подпространства* $\operatorname{im} A_1^* \subset \mathcal{H}$ *и* $\operatorname{im} A_2^* \subset \mathcal{H}$ *ортогональны .*

Доказательство. Докажем равенство

$$(A_1^*f_1, A_2^*f_2) = 0, \quad \forall f_1 \in \hat{\mathcal{G}}_1,\ \forall f_2 \in \hat{\mathcal{G}}_2.$$

Достаточно доказать равенство $A_1A_2^* = O$. Имеем

$$
\begin{aligned}
A_1A_2^* &= \Big(B_1^*\tilde K_1^{-1}\tilde v_1 - \hat v_1\Big)\Big(\tilde u_2^*\tilde K_2^{-1}B_2 - \hat u_2^*\Big)\\
&= \Big[B_1^*\tilde K_1^{-1},\ -I\Big]\begin{bmatrix}\tilde v_1\\ \hat v_1\end{bmatrix}\Big[\tilde u_2^*,\ \hat u_2^*\Big]\begin{bmatrix}\tilde K_2^{-1}B_2\\ -I\end{bmatrix}\\
&= \Big[B_1^*\tilde K_1^{-1},\ -I\Big]\Bigg\{-\begin{bmatrix}\tilde K_1 & B_1\\ B_1^* & C_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde L_1 & D_1\\ O_{\tilde{\mathcal G}_2\hat{\mathcal G}_1} & \hat L_1\end{bmatrix}\\
&\qquad +\begin{bmatrix}\tilde L_2 & O_{\hat{\mathcal G}_2\tilde{\mathcal G}_1}\\ E_2 & \hat L_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde K_2 & B_2\\ B_2^* & C_2\end{bmatrix}\Bigg\}\begin{bmatrix}\tilde K_2^{-1}B_2\\ -I\end{bmatrix}\\
&= -\Big[O,\ B_1^*\tilde K_1^{-1}B_1 - C_1\Big]\begin{bmatrix}\tilde L_1 & D_1\\ O_{\tilde{\mathcal G}_2\hat{\mathcal G}_1} & \hat L_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde K_2^{-1}B_2\\ -I\end{bmatrix}\\
&\qquad +\Big[B_1^*\tilde K_1^{-1},\ -I\Big]\begin{bmatrix}\tilde L_2 & O_{\hat{\mathcal G}_2\tilde{\mathcal G}_1}\\ E_2 & \hat L_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}O\\ B_2^*\tilde K_2^{-1}B_2 - C_2\end{bmatrix} = O.
\end{aligned}
$$

В этой цепочке равенств третье равенство следует из ОТ (1), а последнее – из равенств $C_r - B_r^*\tilde K_r^{-1}B_r = O,\ r = 1,2$ (см. формулу (20)). □

Пусть P_1 и P_2 обозначают операторы ортогонального проектирования на подпространства $\operatorname{im} A_1^*$ и $\operatorname{im} A_2^*$ соответственно. Из леммы 2 непосредственно вытекает следующая лемма.

Лемма 3. *Стилтьесовская пара* $\operatorname{col}[p(z),\ q(z)]$ *удовлетворяет условиям (37) (или, что то же самое, условиям (34) и (35)) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условиям*

$$P_2p(z) = O, \quad P_1q(z) = O. \tag{39}$$

Рассмотрим ортогональное разложение пространства $\mathcal H$ вида

$$\mathcal H = \tilde{\mathcal H} \oplus \operatorname{im} A_1^* \oplus \operatorname{im} A_2^*. \tag{40}$$

Относительно такого разложения матричные представления операторов ортогонального проектирования P_1 и P_2 имеют вид

$$
P_1 = \begin{bmatrix} O_{\tilde{\mathcal H}} & O_{\operatorname{im} A_1^*\ \tilde{\mathcal H}} & O_{\operatorname{im} A_2^*\ \tilde{\mathcal H}}\\ O_{\tilde{\mathcal H}\ \operatorname{im} A_1^*} & I_{\operatorname{im} A_1^*} & O_{\operatorname{im} A_2^*\ \operatorname{im} A_1^*}\\ O_{\tilde{\mathcal H}\ \operatorname{im} A_2^*} & O_{\operatorname{im} A_1^*\ \operatorname{im} A_2^*} & O_{\operatorname{im} A_2^*}\end{bmatrix},
$$

$$
P_2 = \begin{bmatrix} O_{\tilde{\mathcal H}} & O_{\operatorname{im} A_1^*\ \tilde{\mathcal H}} & O_{\operatorname{im} A_2^*\ \tilde{\mathcal H}}\\ O_{\tilde{\mathcal H}\ \operatorname{im} A_1^*} & O_{\operatorname{im} A_1^*} & O_{\operatorname{im} A_2^*\ \operatorname{im} A_1^*}\\ O_{\tilde{\mathcal H}\ \operatorname{im} A_2^*} & O_{\operatorname{im} A_1^*\ \operatorname{im} A_2^*} & I_{\operatorname{im} A_2^*}\end{bmatrix}.
$$

Теорема 4. *Пусть дана вырожденная обобщенная интерполяционная задача* $\mathcal P = \{K_1, L_1, v_1, K_2, L_2, u_2\}$ *стилтьесовского типа, для которой существует согласованная пара подпространств* $\tilde{\mathcal G}_1$ *и* $\tilde{\mathcal G}_2$ *типа* $\mathcal K$. *Пусть вполне* *неопределенная интерполяционная задача* $\tilde{\mathcal{P}} = \{\tilde{K}_1, \tilde{L}_1, \tilde{v}_1, \tilde{K}_2, \tilde{L}_2, \tilde{u}_2\}$ *является сужением интерполяционной задачи* $\mathcal{P}$ *на подпространства* $\tilde{\mathcal{G}}_1$ *и* $\tilde{\mathcal{G}}_2$*. И пусть резольвентная матрица интерполяционной задачи* $\tilde{\mathcal{P}}$ *определена в (24).*

Тогда формула

$$s(z) = \left\{\tilde{\gamma}_1(z)p(z) + \tilde{\delta}_1(z)q(z)\right\} \cdot \left\{\tilde{\alpha}_1(z)p(z) + \tilde{\beta}_1(z)q(z)\right\}^{-1} \tag{41}$$

устанавливает биективное соответствие между решениями $\mathcal{F}$ *обобщенной интерполяционной задачи* $\mathcal{P}$ *и такими классами эквивалентности стилтьесовских пар, в которых имеются пары* $\mathrm{col}[p(z),\, q(z)]$ *вида*

$$p(z) = \begin{bmatrix} \tilde{p}(z) & O_{\mathrm{im}\, A_1^* \ \tilde{\mathcal{H}}} & O_{\mathrm{im}\, A_2^* \ \tilde{\mathcal{H}}} \\ O_{\tilde{\mathcal{H}} \ \mathrm{im}\, A_1^*} & I_{\mathrm{im}\, A_1^*} & O_{\mathrm{im}\, A_2^* \ \mathrm{im}\, A_1^*} \\ O_{\tilde{\mathcal{H}} \ \mathrm{im}\, A_2^*} & O_{\mathrm{im}\, A_1^* \ \mathrm{im}\, A_2^*} & O_{\mathrm{im}\, A_2^*} \end{bmatrix},$$

$$q(z) = \begin{bmatrix} \tilde{q}(z) & O_{\mathrm{im}\, A_1^* \ \tilde{\mathcal{H}}} & O_{\mathrm{im}\, A_2^* \ \tilde{\mathcal{H}}} \\ O_{\tilde{\mathcal{H}} \ \mathrm{im}\, A_1^*} & O_{\mathrm{im}\, A_1^*} & O_{\mathrm{im}\, A_2^* \ \mathrm{im}\, A_1^*} \\ O_{\tilde{\mathcal{H}} \ \mathrm{im}\, A_2^*} & O_{\mathrm{im}\, A_1^* \ \mathrm{im}\, A_2^*} & I_{\mathrm{im}\, A_2^*} \end{bmatrix}.$$

Здесь матричные представления операторов указаны в смысле ортогонального разложения (40). Пара $\mathrm{col}[\tilde{p}(z),\, \tilde{q}(z)]$ *является произвольной стилтьесовской парой ОФ, принимающих значения во множестве операторов* $\{\tilde{\mathcal{H}}\}$*.*

Доказательство. В теореме 3 условия (34) и (35) можно заменить эквивалентными условиями (39). После этого следует воспользоваться леммой 5.2 из статьи [4]. □

ЛИТЕРАТУРА

1. Дюкарев Ю.М. Общая схема решения интерполяционных задач в классе Стилтьеса, основанная на согласованных интегральных представлениях пар неотрицательных операторов. 1 // Математическая физика, анализ, геометрия. – 1999. – Т. 6. – N 1/2. – С. 30 – 54.

2. Bolotnikov V., Sakhnovich L. On an operator approach to interpolation problems for Stieltjes fanctions // Integr. equ. oper. theory. – 1999. – N 35. – P. 423 – 470.

3. Дубовой В.К. Индефинитная метрика в интерполяционной проблеме Шура для аналитических функций IV // Теория функций, функ. анализ и их приложения. – 1984. – Вып. 42. – С. 46 – 57.

4. Bolotnikov V. Degenerate Stieltjes moment problem and associated J – inner polynomials // Zeitschrift für analisis und ihre anwendungen. – 1995. – V.14. – N3. – P. 441 – 468.

5. Bolotnikov V. On degenerate Hamburger moment problem and extensions of nonnegative Hankel blok matrices // Integral Equations Operator Theory. – 1996. – **25**. – N3. – P. 253 – 276.

6. Bolotnikov V., Dym H. On degenerate interpolation, entropy and extremal problems for Schur functions // Integral Equations Operator Theory. – 1998. – **28**. – N2. – P. 275 – 292.

7. Дюкарев Ю.М. Вырожденная задача Неванлинны – Пика // Укр. мат. журн. – 2005. – Т.57. – N10. – С. 1334 – 1343.

8. Sakhnovich L.A Interpolation theory and its applications. – Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1997. – 197 p.

9. Ковалишина И.В., Потапов В.П. Индефинитная метрика в проблеме Неванлинны-Пика // ДАН Арм. ССР. – 1974. – 59. – Вып. 1. – С. 17 – 22.

10. Потапов В.П. Дробно-линейные преобразования матриц. Исследования по теории операторов и их приложениям: Сб. науч. тр. (изд. Марченко В.А.). – Киев: Наукова думка. – 1979. – С.75–97.

11. Ковалишина И.В., Потапов В.П. Радиусы круга Вейля в матричной проблеме Неванлинны – Пика // Теория операторов в функциональных пространствах и ее приложения: Сб. науч. тр. – Киев: Наукова думка. – 1981. – С. 25 – 49.

12. Потапов В.П. К теории матричных кругов Вейля. Функциональный анализ и прикладная математика: Сб. науч. тр. (изд. Марченко В.А.). – Киев: Наукова думка. – 1982. – С. 113 – 121.

13. Ковалишина И.В. Аналитическая теория одного класса интерполяционных задач. // Изв. АН СССР. Сер.матем. – 1983. – Т.47. – N3. – С. 455 – 497.

14. Дюкарев Ю.М. О неопределенности интерполяционных задач в классе Стилтьеса // Математический сборник. – 2005. – Т.196. – N3. – С. 61 – 88.