Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 514.177 № 826, 2008, с.197–210

О расстановке операторных коэффициентов перед членами ряда

Наталия Бойко
Харьковский национальный университет
пл. Свободы 4, 61077 Харьков, Украина
maletska.nata@gmail.com

Изучаются эффекты, связанные с заменой в определении безусловной сходимости ряда расстановки коэффициентов ± 1 на расстановку операторных коэффициентов из некоторого фиксированного множества. Получены аналоги теории котипа и теоремы М.И.Кадеца о безусловной сходящихся рядах в равномерно выпуклом пространстве.

2000 Mathematics Subject Classification 46B20.

1. Введение

Всюду в тексте X и Y используются для обозначения банаховых пространств; $L(X,Y)$ – пространство непрерывных линейных операторов, действующих из X в Y; $L(X) := L(X,X)$; S_X – единичная сфера пространства X.

Ряд $\sum_1^\infty x_n$ элементов пространства X называется безусловно сходящимся, если для любой расстановки коэффициентов $c_n = \pm 1$ перед членами ряда ряд $\sum_1^\infty c_n x_n$ сходится.

Безусловно сходящиеся ряды – это полезный аппарат теории банаховых пространств, и теория безусловно сходящихся рядов пересекается со многими смежными разделами математики: гармоническим анализом, теорией вероятностей и др. Подробнее об условной и безусловной сходимости можно прочитать в [3].

Введем следующее обобщение безусловной сходимости.

Определение 1 *Пусть X, Y – банаховы пространства, $G \subset L(X,Y)$, $\sum_1^\infty x_n$ – ряд в X. Ряд $\sum_{n=1}^\infty x_n$ назовем G-сходящимся, если для любого набора операторов $T_1, T_2, \ldots$ из G ряд $\sum_{n=1}^\infty T_n x_n$ сходится.*

Цель настоящей работы – изучить элементарные свойства G-сходимости и по возможности построить для G-сходимости аналоги теорем, известных для безусловной сходимости рядов.

Структура работы. В первом разделе мы изучаем связь между G-сходимостью и безусловной сходимостью ряда. Во втором разделе определяется модуль выпуклости по отношению к семейству операторов G и доказывается аналог теоремы М.И.Кадеца о безусловно сходящихся рядах в равномерно выпуклых пространствах. В третьем, последнем разделе работы, строится аналог теории М-котипа для G-сходимости, где G – полугруппа операторов с некоторым дополниительным свойством "правильности".

2. Связь G- и безусловной сходимостей

Докажем несколько утверждений, характеризующих связь между G-сходимостью и безусловной сходимостью.

Утверждение 1 *Если G – ограниченное семейство, то любой абсолютно сходящийся ряд G-сходится.*

Доказательство. Обозначим $M = sup\{\|T\| : T \in G\}$. Тогда для любых наборов $T_k \in G$ имеем $\sum_n ||T_n x_n|| \leq M \cdot \sum_n ||x_n|| < \infty$. □

Утверждение 2 *Пусть $G \subset L(X, Y)$ – произвольное семейство операторов и $\sum_n x_n$ – ряд в пространстве X. Тогда следующие условия эквивалентны:*

A. *$\sum_n x_n$ – G-сходящийся ряд*

B. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует такой индекс N, что для любых $m > n > N$ и любого выбора $T_k \in G$ выполнено неравенство*

$$\left\| \sum_{k=n}^{m} T_k x_k \right\| < \varepsilon.$$

Доказательство. То, что из условия **B** следует **A**, является очевидным, и интерес представляет только доказательство импликации **A** ⇒ **B**.

Будем рассуждать "от противного". Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть для любого N существует такой набор T_k и существуют такие $m > n > N$, что $\| \sum_{k=n}^{m} T_k x_k \| \geq \varepsilon$. Тогда существуют $U_k \in G$ и $n_1 < m_1 < n_2 < m_2 < ...$ такие, что $\| \sum_{k=n_i}^{m_i} U_k x_k \| \geq \varepsilon, \ i = 1, 2, ...$. Определим $U_k \in G$ при $k \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} [n_i, m_i]$ произвольным образом. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} U_k x_k$ не будет подчиняться критерию Коши сходимости. Противоречие. □

Определение 2 *Пусть $G \subset L(X, Y)$. Поточечной оболочкой семейства G назовем множество $pw(G)$ тех операторов $S \in L(X, Y)$, что для любого $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $T \in G$ с $\|Tx - Sx\| < \varepsilon$.*

Отметим, что $pw(G)$, вообще говоря, шире замыкания множества G в топологии поточечной сходимости пространства $L(X, Y)$.

Теорема 1 *Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ – это G-сходящийся ряд. Тогда для семейства $\widetilde{G} = pw(convG)$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ будет $\widetilde{G}$-сходиться.*

Доказательство. Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ G-сходится, следовательно, для него верно утверждение 2. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, и пусть $N = N(\varepsilon)$ подчиняется условию **B**. данного утверждения, то есть $\|\sum_{k=n}^{m} T_k x_k\| < \varepsilon$ при $n, m > N$ и $T_k \in G$. Доказательство теоремы равносильно доказательству верности такой оценки суммы с операторами из семейства $\widetilde{G}$. Для доказательства необходимой оценки будем в данной сумме последовательно, начиная с последнего, заменять коэффициенты из G на операторы из $\widetilde{G}$. На каждом шаге мы при этом сможем проверять верность необходимых оценок и сохранность связи между ε и соотвествующим ему значением $N = N(\varepsilon)$. Поэтому сначала проверим, что оценка суммы не изменится $\|\sum_{k=n}^{m} T_k x_k\|$, если последний в ней оператор T_m из G будет заменен на произвольный оператор S_m из $\widetilde{G}$. Так как $S_m \in \widetilde{G}$, для любого $\delta > 0$ существует такой набор $T_j' \in G$, что $\|\sum_{j=1}^{l} \lambda_j T_j' x_m - S_m x_m\| < \delta$, где $\sum_{j=1}^{l} \lambda_j = 1$ и $\lambda_j \geq 0$. Значит, $\|\sum_{k=n}^{m-1} T_k x_k + S_m x_m\| \leq \|\sum_{k=n}^{m-1} T_k x_k + \sum_{j=1}^{l} \lambda_j T_j' x_m\| + \delta \leq \sum_{j=1}^{l} \lambda_j \|\sum_{k=n}^{m-1} T_k x_k + T_j' x_m\| + \delta \leq \sum_{j=1}^{l} \lambda_j \varepsilon + \delta = \varepsilon + \delta$. Следовательно, в силу произвольности δ, выполнено и неравенство $\|\sum_{k=n}^{m-1} T_k x_k + S_m x_m\| \leq \varepsilon$. Таким образом, мы показали, что при замене одного коэффициента из G на коэффициент из $\widetilde{G}$ оценка суммы из условия **B**. утверждения 2 остается верным. Точно таким же образом, опираясь на уже полученную оценку, можно показать, что неравенство из условия **B**. утверждения 2 выполнено и при замене двух операторов T_k на S_k, затем трех и так по цепочке для всех $(m-n)$ операторов из суммы. То есть для каждого $\varepsilon > 0$ и соответствующего ему $N = N(\varepsilon)$ верно неравенство $\|\sum_{k=n}^{m} S_k x_k\| < \varepsilon$ при $n, m > N$ и $S_k \in \widetilde{G}$. Значит, для ряда $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ выполнено условие **B**. утверждения 2, следовательно, данный ряд $\widetilde{G}$-сходится. □

Определение 3 *Семейство операторов $G \subset L(X, Y)$ назовем правильным, если $0 \in pw(convG)$.*

Теорема 2 *Пусть $G \subset L(X, Y)$ – правильное семейство операторов в банаховом пространстве X. Тогда для любого G-сходящегося ряда $\sum_n x_n$ в X все ряды $\sum_n T_n x_n$, $T_n \in G$ сходятся безусловно. В частности, если G содержит ограниченый снизу оператор, то и сам ряд $\sum_n x_n$ сходится безусловно.*

Доказательство. По теореме 1 любой G-сходящийся ряд также и $pw(convG)$-сходится. А так как G – правильное семейство, то есть, $pw(convG)$ содержит 0, то при подстановке 0 перед произвольным количеством элементов ряда $\sum_n T_n x_n$ его сходимость не нарушится. Что и требовалось доказать, так как безусловная сходимость ряда эквивалентна тому, что ряд сходится при любой расстановке коэффициентов 0 и 1 перед его слагаемыми. □

Сформулируем достаточное условие того, чтобы из безусловной сходимости ряда следовала его G-сходимость.

Теорема 3 *Пусть существует такая последовательность операторов $\{U_1, U_2, ...\} \subset L(X, Y)$, что $\sum_1^{\infty} \|U_k\| = C < \infty$ и что $G \subset cl\{\sum_{k=1}^{N} a_k U_k :$*

$N \in \mathbb{N},\ |a_k| \leq 1\}$. *Тогда из безусловной сходимости ряда* $\sum_1^\infty x_k$ *в пространстве* X *следует его* $G-$*сходимость.*

Доказательство. Теорему достаточно доказать для случая $G = \{\sum_{i=1}^N a_k U_k : N \in \mathbb{N}, |a_k| \leq 1\}$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем такое L, что для любых $n > m > L$ и любого набора коэффициентов $|t_k| \leq 1$ выполнено $\| \sum_{k=m}^n t_k x_k\| < \varepsilon$. Рассмотрим ряд $\sum_1^\infty T_k x_k,\ T_k \in G,\ T_k = \sum_{i=1}^{N_k} t_k^i U_i,\ t_k^i \in [-1,1]$. Положим для удобства $t_k^i = 0$ при $i > N_k$. Тогда для любых $n > m > N$ имеем

$$\| \sum_{k=m}^n T_k x_k\| = \| \sum_m^n \sum_{i=1}^\infty t_k^i U_i x_k\| \leq \sum_{i=1}^\infty \|U_i(\sum_{k=n}^m t_k^i x_k)\| \leq C \cdot \varepsilon,$$

то есть данный ряд удовлетворяет критерию Коши сходимости ряда, а, значит, сходится. □

Следствие 1 *Пусть семейство операторов* $G \subset L(X,Y)$ *компактно и конечномерно. Тогда любой безусловно сходящийся ряд* $\sum_1^\infty x_k$ *в* X *будет* G*-сходящимся рядом.*

В случае, если компактное семейство операторов G бесконечномерно, из безусловной сходимости ряда не всегда следует его G-сходимость, что иллюстрирует следующий пример.

Пример 1. Рассмотрим пространство c_0. В качестве компактного семейства $G \subset (c_0)^*$ возьмем объединение нуля и такой последовательности функционалов $T_n : T_n(a_1, a_2, ..., a_n, ...) = b_n a_n$, где b_n стремятся к нулю, но ряд из b_n не сходится. Обозначим через $\{e_n\}_1^\infty$ канонический базис пространства c_0. Покажем, что существует последовательность $a_n \in \mathbb{R}$ такая, что $\sum_{n=1}^\infty a_n e_n$ безусловно сходится, но не $G-$сходится. Для этого достаточно выбрать $a_n \geq 0, a_n \longrightarrow 0$ так, чтобы ряд $\sum_{n=1}^\infty a_n b_n$ расходился. Существование таких a_n следуют из того, что $(b_n)_{n=1}^\infty \notin l_1 = c_0^*$.

Рассмотрим более подробно эффект, описаный в этом примере. Для этого введем следующие определения.

Определение 4 *Числовая последовательность* $b = (b_1, b_2, ...)$ *называется допустимой для пространства* X*, если для любого безусловно сходящегося ряда* $\sum_1^\infty x_n$ *в этом пространстве ряд* $\sum_1^\infty |b_n|\|x_n\|$ *сходится.*

Сумма двух допустимых последовательностей, в силу неравенства треугольника, тоже является допустимой последовательностью. Таким образом, множество всех допустимых последовательностей для данного пространства X образует линейное пространство, которое мы будем обозначать E_X. В этом пространст-ве можно определить норму следующим образом

$$\|b\| := \sup\{\sum_{n=1}^N |b_n|\|x_n\| : N \in \mathbb{N}, x_n \in X, \sup_{a_k = \pm 1} \| \sum_{k=1}^N a_k x_k\| \leq 1\}$$

Теорема 4 *Последовательность* $b = (b_1, b_2, ...)$ *принадлежит* E_X *тогда и только тогда, когда* $\|b\| < \infty$.

Доказательство. Докажем необходимость этого условия от противного. Пусть $b = (b_1, b_2, ...)$ – допустимая последовательность и $\|b\| = \infty$. Тогда можно выбрать такое n_1 и такой набор элементов $\{x_k\}_{k=1}^{n_1}$, что

$$\sum_{k=1}^{n_1} |b_k| \|x_k\| \geq 1, \sup_{a_k=\pm 1} \| \sum_{k=1}^{n_1} a_k x_k \| \leq 1.$$

При отбрасывании первых элементов последовательности $b = (b_1, b_2, ...)$ норма этой последовательности, очевидно, останется бесконечной. Следовательно, существует такое n_2 и такой набор элементов $\{y_k\}_{k=n_1+1}^{n_2}$, что $\sum_{k=n_1+1}^{n_2} |b_k| \|y_k\| \geq 2, \sup_{a_k=\pm 1} \| \sum_{k=n_1+1}^{n_2} a_k y_k \| \leq 1$. Обозначим $x_k = \frac{1}{2} \cdot y_k, k = n_1 + 1, .., n_2$. Продолжая этот процесс, мы получим такой безусловно сходящийся ряд $\sum_1^\infty x_n$ в X, что частные суммы ряда $\sum_1^\infty |b_n| \|x_n\|$ неограниченно возрастают. То есть этот ряд расходится, что противоречит предположению допустимости последовательности b.

Достаточность конечности нормы последовательности для того, чтобы данная последовательность была допустимой, легко устанавливается следующим образом. Рассмотрим произвольный безусловно сходящийся ряд $\sum_1^\infty x_n$. В силу его безусловной сходимости существует такая константа C, что $\sup_{a_k=\pm 1} \| \sum_{k=1}^N a_k x_k \| \leq C$ для любого $N \in \mathbb{N}$. Тогда для любого N выполнено неравенство $\sum_1^N |b_n| \|x_n\| \leq C \|b\|$, что в свою очередь означает сходимость ряда $\sum_1^\infty |b_n| \|x_n\|$. □

Теорема 5 *Пусть* $b = (b_1, b_2, ...)$ *– допустимая последовательность,* $G = \{T_1, T_2, ...\} \subset L(X, Y)$ *подчиняется условию* $\|T_n\| \leq b_n$. *Тогда любой безусловно сходящийся ряд* $\sum x_k$ *в* X *будет* G*-сходиться.*

Доказательство. Возьмем произвольный набор операторов U_k из G и докажем сходимость ряда $\sum U_k x_k$. Так как $\sum x_k$ безусловно сходится, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для любых $m > n > N$ для любой расстановки плюс-минусов выполнено неравенство $\| \sum_{k=n}^m \pm x_k \| < \varepsilon$. Оценим величину $\| \sum_{k=n}^m U_k x_k \|$ при $m > n > N$. Обозначим $A_i = \{k \in [n, m] : U_k = T_i\}$, $y_i = \sum_{k \in A_i} x_i$, $D = \{i : A_i \neq 0\}$. Тогда для любой расстановки плюс-минусов $\| \sum_{i \in D} \pm y_i \| \leq \varepsilon$. Соответственно $\| \sum_{k=n}^m U_k x_k \| = \| \sum_{i \in D} T_i y_i \leq \sum_{i \in D} |b_i| \cdot \|y_i\| \leq \varepsilon \|b\|$. □

Следующие теоремы призваны выявить, какие именно последовательности содержит пространство E_X при различных X.

Теорема 6 $E_X \supset l_1$ *для любого* X.

Доказательство. По предыдущей теореме E_X содержит все последовательности, норма которых конечна. Пусть последовательность $b = (b_1, b_2, ...) \in l_1$, $x_n \in X$, $\sup_{a_k=\pm 1} \| \sum_{k=1}^N a_k x_k \| \leq 1$. Тогда $\sup_k \|x_k\| \leq 1$ и

$\sum_{n=1}^{N}|b_n|\|x_n\| \leq \sum_1^\infty |b_n|$, $\|b\| \leq \sum_1^\infty |b_n|$. $\square$

Теорема 7 $E_{c_0} = l_1$

Доказательство. Включение $E_{c_0} \supset l_1$ уже доказано в предыдущей теореме. Докажем обратное включение. Пусть $b = (b_1, b_2, ...) \notin l_1$. Тогда для любого $C > 0$ существует такое n, что $\sum_{k=1}^{n}|b_k| > C$. Возьмем в качестве последовательности x_k канонический базис пространства c_0. Тогда $\sum_{k=1}^{n}|b_k|\|x_k\| > C$, но $\sup_{\alpha_k=\pm1}\|\sum_1^n \alpha_k x_k\| = 1$. Следовательно, $\|b\|_{E_{c_0}} = \infty$, т.е. $b \notin E_{c_0}$. $\square$

Теорема 8 $E_{l_2} = l_2$

Доказательство. Докажем сначала, что l_2 вложено в E_{l_2}, то есть, что любая последовательность b из l_2 является допустимой для пространства l_2. По неравенству Коши-Буняковского $\sum_{k=1}^{N}|b_k|\|x_k\| \leq \|b\|_{l_2}\|(\|x_1\|, \|x_2\|, ...)\|_{l_2}$. Так как последовательность b взята из l_2, ее норма в этом пространстве конечна. А конечность нормы в l_2 последовательности $(\|x_1\|, \|x_2\|, ...)$ следует из сходимости, по теореме Орлича, ряда из квадратов норм элементов безусловно сходящегося ряда в l_2 (см. [1] и также [3], с. 49). Таким образом норма последовательности b в пространстве E_{l_2} конечна.

Докажем теперь, что последовательность b, не лежащая в l_2, не может принадлежать пространству E_{l_2}, то есть, что норма b в E_{l_2} бесконечна.

Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2$ расходится, для любой константы C существует такое натуральное N, что $\sum_1^N b_k^2 > C$. Рассмотрим $x_k = \frac{b_k}{(\sum_{k=1}^{N} b_k^2)^{1/2}} \cdot e_k$, $k = 1, 2, ..., N$, где e_k – элементы канонического базиса пространства l_2. Тогда $\sup_{\alpha_k=\pm1}\|\sum_{k=1}^{N}\alpha_k x_k\| = 1$, но $\sum_1^N |b_n|\|x_n\| > \sqrt{C}$, т.е. $\|b\|_{E_{l_2}} = \infty$. $\square$

Определение 5 *Банахово пространство X имеет M-котип p с константой $C > 0$, если неравенство*

$$\max_{\alpha_i=\pm1}\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right\| \geq C\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

выполнено для всех конечных наборов элементов $\{x_i\}_{i=1}^n \subset X$.

Теорема 9 *Пусть пространство X имеет M-котип p. Тогда $E_X \supset l_{p'}$*

Доказательство. Рассмотрим последовательность b из $l_{p'}$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{N}|b_k|\|x_k\| \leq \left(\sum_{k=1}^{N}\|x_k\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{N}|b_k|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \leq$$

$$\le \frac{1}{C} \max_{a_k=\pm 1} \left\| \sum_{k=1}^{N} a_k x_k \right\| \times \left(\sum_{k=1}^{N} |b_k|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}},$$

где C - это константа из определения М-котипа. То есть $\|b\|_{E_X} \le \frac{1}{C}\|b\|_{p'}$. $\square$

Определение 6 *Расстоянием Банаха-Мазура между нормироваными пространствами X и Y называется величина $d(X,Y) = inf\{\|T\| \cdot \|T^{-1}\| : T \in L(X,Y),\ T$ – изоморфизм $\}$*

Определение 7 *Пространство X финитно представимо в пространстве $Y (X \xrightarrow{f} Y)$ если для любого $\varepsilon > 0$ и для любого конечномерного подпространства $Z \subset X$ существует конечномерное подпространство $Z_1 \subset Y$ такое, что $d(Z, Z_1) < 1 + \varepsilon$*

Из того, что норма в E_X определяется через конечные наборы элементов пространства X, с очевидностью вытекает следующая теорема.

Теорема 10 *Пусть $X \xrightarrow{f} Y$. Тогда $E_X \supset E_Y$.*

Следствие 2 *Пусть пространство X не имеет котипа. Тогда $E_X = l_1$*

Доказательство. По теореме 6 $E_X \supset l_1$ для всех X. То, что пространство X не имеет котипа, равносильно финитной представимости пространства c_0 в X. Следовательно, по теореме 10 $E_{c_0} = l_1 \supset E_X$. Значит $E_X = l_1$. $\square$

Следствие 3 *Пусть $l_p \xrightarrow{f} X$. Тогда $E_X \subset l_{p'}$*

Так как пространство l_2 финитно представимо в любом бесконечномерном пространстве X, с учетом теоремы 10 мы получаем следующее следствие.

Следствие 4 *$E_X \subset l_2$ для любого бесконечномерного X.*

3. Модуль выпуклости по отношению к семейству операторов

Определение 8 *Модулем выпуклости пространства X по отношению к семейству операторов $G \subset L(X)$ назовем функцию*

$$\delta^G(t) = \inf_{||x||=||y||=1} \{\sup\{||x + tTy|| : T \in G\} - 1\}$$

Пространство X назовем выпуклым по отношению к семейству операторов G, если $\delta^G(t) \ge 0$ и равномерно выпуклым по отношению к семейству операторов G, если $\delta^G(t) > 0$ при всех $t > 0$. Частным случаем равномерной G-выпуклости будут хорошо известные равномерная выпуклость (при

$G = \{I, -I\}$) и комплексная равномерная выпуклость (при $G = \{e^{i\theta} I : \theta \in (0, 2\pi]\}$).

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие только что введенное определение:

Пример 2. В пространстве $L_p[-\infty, +\infty]$ рассмотрим семейство операторов сдвига $G = \{T_s : (T_s(f))(u) = f(s+u)\}$. В этом случае для любых $x, y \in S_{L_p}$

$$\sup_s ||x + tT_s(y)|| = \sup_s \left(\int_{-\infty}^{\infty} (x(u) + ty(u+s))^p du \right)^{1/p} \geq (1 + t^p)^{1/p}.$$

Это значение достигается либо точно для x и y с ограниченными носителями при таких s, при которых носители функций x и $T_s y$ не пересекаются, либо в пределе при $s \to \infty$, если носитель хотя бы одной из функций x или y неограничен. Следовательно, $\delta^G(t) = (1+t^p)^{1/p} - 1$. При $t \to 0$ функция $\delta^G(t)$ будет эквивалентна $\frac{1}{p} t^p$.

Пример 3. Пусть $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Тогда $L_p(\mathbb{T})$ не является выпуклым по отношению к семейству всех операторов сдвига на окружности. Действительно, если взять в качестве x постоянную функцию на окружности, а в качестве $y = -x$, то

$$\sup_T ||x + tTy|| = ||x + ty|| = ||x - tx|| = |1 - t|,$$

а так как $t > 0$ полученное выражение будет меньше 1. Значит $\delta^G(t)$ будет отрицательным.

Пример 4. Рассмотрим в пространстве $L_p[0,1]$ семейство операторов умножения

$$G = \{T_g : T_g f = f \cdot g; g : [0,1] \to \{-1, 1\}\}.$$

Очевидно, что $\sup \|x(u) + tg(u)y(u)\|$ по $g : [0,1] \to \{-1, 1\}$ будет достигаться при том g, при котором оба слагаемых $x(u)$ и $tg(u)y(u)$ будут иметь одинаковый знак при всех u. Поэтому для поиска модуля выпуклости заданного пространства по отношению к данному семейству операторов можно рассматривать только положительные во всех точках функции x и y. Соответственно, требуется найти

$$\inf \left\{ \left(\int_0^1 (x(u) + ty(u))^p du \right)^{1/p} : x, y \geq 0; \|x\| = \|y\| = 1 \right\}.$$

Этот инфимум, очевидно, будет достигаться на тех x и y, носители которых не пересекаются и будет равен $(1 + t^p)^{1/p} - 1$.

Для L_∞ модуль выпуклости относительно рассматриваемого семейства операторов будет равен 0 для $t \leq 1$, это значение будет достигаться при любых x и y с непересекающимися носителями.

Пример 5. Вычислим модуль выпуклости гильбертового пространства по отношению к семейству G всех изометрий этого пространства. Максимум по рассматриваемому семейству G выражения $||x + tTy||$ достигается при такой изометрии, которая совмещает направление вектора Ty с направлением вектора x. Следовательно, $\sup\|x + tTy\|$ при любых единичных по норме элементах x и y равен $1+t$. А значит $\delta^G(t) = t$.

Утверждение 3 *Если семейство операторов G – правильное семейство на X, то $\delta^G \geq 0$.*

Доказательство. По условию для всех y из X нулевой элемент принадлежит множеству Z_y– замыканию выпуклой оболочки $\{Ty : T \in G\}$, следовательно, для всех элементов $x \in S_X$ сумма $x + tZ_y$ будет содержать точку x, то есть точку с нормой 1. А значит, так как Z_y является замыканием выпуклой оболочки, существует такой оператор T из G, что $\|x+tTy\| \geq 1$. Это, в свою очередь, означает, что $\delta^G \geq 0$. □

В обратную сторону только что доказанное утверждение не выполняется, что иллюстрирует следующий пример.

Определение 9 l^2_∞ *– это двумерное пространство, состоящее из пар вещественных чисел с нормой* $\|(x, y)\| = max\{|x|, |y|\}$.

Пример 6. Рассмотрим в l^2_∞ семейство G, состоящее из двух операторов P_1 и P_2 - операторов проектирования на первую и вторую координатные оси соответственно. Тогда для любых $x, y \in S_{l^2_\infty}$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ и для любого $t > 0$

$$\sup_{k\in\{1,2\}} ||x + tP_ky|| = \max\{\|x + t(y_1, 0)\|, \|x + t(0, y_2)\|\} = \max\{\max\{|x_1 + ty_1|,$$

$$|x_2 + t \cdot 0|\}, \max\{|x_1 + t \cdot 0|, |x_2 + ty_2|\}\} \geq max\{|x_1|, |x_2|\} = \|x\| = 1.$$

Следовательно, в рассматриваемом примере $\delta^G(t) \geq 0$, при этом семейство операторов не является правильным.

Утверждение 4 *Функция $\delta^G(t)/t$ не убывает с ростом t.*

Доказательство. Для данных x и y из S_X и данного $t_1 > 0$ для любого $\varepsilon > 0$ существует такой оператор $T \in G$, при котором $||x + t_1Ty|| \geq \delta^G(t_1) + 1 - \varepsilon$. Тогда для любого $t_2 > t_1$ имеем

$$||x + t_2Ty|| = \left|\left|\frac{t_2}{t_1}x + t_2Ty + \left(1 - \frac{t_2}{t_1}\right)x\right|\right| \geq \frac{t_2}{t_1}||x + t_1Ty|| - \left|1 - \frac{t_2}{t_1}\right| \geq$$

$$\geq \frac{t_2}{t_1}(1 + \delta^G(t_1) - \epsilon) - \frac{t_2}{t_1} + 1 = 1 + \frac{t_2}{t_1}\delta^G(t_1) - \frac{t_2}{t_1}\varepsilon.$$

Так как правое выражение в последнем неравенстве не зависит от выбора x и y, мы можем в левом выражении взять требуемую определением верхнюю и нижнюю грани и перейти к неравенству между значениями модуля выпуклости

$$\delta^G(t_2) \geq \frac{t_2}{t_1}\delta^G(t_1) - \frac{t_2}{t_1}\varepsilon,$$

при $t_2 > t_1$. В виду произвольности ε, утверждение доказано. $\square$

Следующая теорема - это прямое обобщение теоремы М.И.Кадеца о рядах в равномерно выпуклом пространстве(см. [2], [4]).

Теорема 11 *Пусть X – банахово пространство, $G \subset B_{L(X)}$ и X равномерно выпукло по отношению к семейству G. Тогда для любого G-сходящегося ряда $\sum_n x_n$ в X будет сходиться ряд $\sum_n \delta^G(\|x_n\|)$.*

Доказательство. Отбросив первые несколько слагаемых можно добиться, что $\|\sum_{i=1}^n T_i x_i\| \le 1$ для всех n и всех $T_i \in G$. Докажем индукцией по n, что

$$\sup_{T_i \in G} \|\sum_{i=1}^{n} T_i x_i\| \ge \sum_{k=1}^{n} \delta^G(\|x_k\|). \tag{1}$$

При $n = 1$ неравенство $\delta^G(\|x_1\|) \le \|x_1\|$ очевидно.

Пусть (1) выполнено при $n = N$, докажем (1) при $n = N + 1$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$, пусть $T_i^0 \in G, i = 1, 2, .., N$ выбраны так, что

$$\|\sum_{i=1}^{n} T_i^0 x_i\| \ge \sum_{k=1}^{n} \delta^G(\|x_k\|) - \varepsilon.$$

Обозначим $y = \sum_{i=1}^n T_i^0 x_i$. Тогда

$$\sup_{T_i \in G} \|\sum_{i=1}^{N+1} T_i x_i\| \ge \sup_{T \in G} \|\sum_{i=1}^{N} T_i^0 x_i + T x_{N+1}\| = \|y\| \sup_{T \in G} \|\frac{y}{\|y\|} + T\frac{x_{N+1}}{\|y\|}\| \ge$$

$$\ge \|y\| \cdot \left(1 + \delta^G\left(\frac{\|x_{N+1}\|}{\|y\|}\right)\right) = \|y\| + \|y\|\delta^G\left(\frac{\|x_{N+1}\|}{\|y\|}\right) \ge \sum_{k=1}^{N+1} \delta^G(\|x_k\|) - \varepsilon.$$

Последний знак неравенства мы можем поставить в силу утверждения 4. $\square$

В качестве следствия данной теоремы рассмотрим ее применение к приведенным выше примерам равномерно выпуклых пространств по отноше-нию к некоторому семейству операторов.

Пример 7. Если $\sum_n x_n$ – это G-сходящийся ряд в пространстве $L_p[-\infty, +\infty]$, где G – это семейство операторов сдвига, то по доказанной выше теореме $\sum_n \|x_n\|^p < \infty$.

Пример 8. Пусть $\sum_n x_n$ – это G-сходящийся ряд в гильбертовом пространстве, где G – это семейство всех изометрий этого пространства. Тогда сходится и ряд $\sum_n \|x_n\|$, то есть ряд $\sum_n x_n$ сходится абсолютно.

Пример 9. Если $\sum_n x_n$ – это G-сходящийся ряд в пространстве $L_p[0, 1]$, где G – это семейство операторов умножения на функции $g : [0, 1] \to \{-1, 1\}$, то по теореме 11 будет сходиться ряд $\sum_n \|x_n\|^p$.

4. GM–котип

Пусть X, Y – банаховы пространства, $G \subset L(X,Y)$ – ограниченное семейство операторов. Будем говорить, что в пространстве X нет ограничений на G-сходящиеся ряды, если для любой последовательности скаляров $a_k \to 0$ существует G-сходящийся ряд $\sum_1^\infty x_k$ в X с $\|x_k\| = a_k$. Как следует из теоремы 11, в G-равномерно выпуклом пространстве есть ограничения на G-сходящиеся ряды.

В настоящем параграфе мы докажем, что если в X есть какие-то ограничения на G-сходящиеся ряды, и $G \subset L(X)$ – правильная полугруппа операторов, то в X есть и ограничения специального вида: существует такой показатель $p \geq 1$, что для любого G-сходящегося ряда $\sum x_k$ в X выполнено условие $\sum_1^\infty \|x_k\|^p < \infty$. Аналогичные результаты для безусловной сходимости рядов были получены Б. Море (B. Maurey) и Ж. Пизье (G. Pisier), а также С. Раковым. Изложение этих результатов можно найти, например, в [3], гл. 5, §2.

Для данного ограниченного семейства $G \subset L(X,Y)$ введем в рассмотрение величины $C(n,G) := \inf_{\|x_k\| \geq 1} \sup_{T_k \in G} \|\sum_{k=1}^n T_k x_k\|$.

Аналогично теореме 5.2.1 из [3] доказывается, что если $G \subset L(X,Y)$ – ограниченное правильное семейство операторов, и в X есть ограничения на G-сходящиеся ряды, то $\sup_n C(n,G) = \infty$.

Лемма 2 *Пусть $G \subset L(X)$ – правильное семейство, образующее полугруппу с единицей по отношению к композиции. Тогда $C(1,G) \geq 1$, $C(n,G)$ не убывает с ростом n, и*

$$C(n \cdot m, G) \geq C(n,G) \cdot C(m,G).$$

Доказательство. Первое утверждение немедленно следует из того, что $I \in G$. Второе следует из того, что G – это правильное семейство операторов, следовательно, $\sup_{T \in G} \|x + Ty\| \geq \|x\|$ для всех x, y.

Докажем третье утверждение леммы. Пусть $\{x_i\}_{i=1}^{nm} \subset X, \|x\| \geq 1$. Запишем последовательность $\{x_i\}_{i=1}^{nm}$ в виде таблицы: $y_{r,l}$, где $r \in \{1,..,n\}$, $l \in \{1,..,m\}$. Для всех l выберем операторы $T_{r,l} \in G, r = 1,...,n$, таким образом, что

$$\left\| \sum_{r=1}^n T_{r,l} y_{r,l} \right\| \geq C(n,G),$$

и обозначим суммы $\sum_{r=1}^n T_{r,l} y_{r,l}$ через z_l. Тогда, учитывая что G – это полугруппа операторов, мы можем записать

$$\sup_{T_k \in G} \left\| \sum_{k=1}^{nm} R_k x_k \right\| \geq \sup_{R_k \in G} \left\| \sum_{k=1}^{m} T_k z_k \right\| \geq C(m,G) \cdot \min_k(\|z_k\|) \geq$$

$$\geq C(m,G) \cdot C(n,G),$$

что, в виду произвольности элементов x_k, завершает доказательство леммы.□

Определение 10 *Пусть $G \subset L(X)$ – ограниченное семейство. Пространство X обладает GM-котипом p с константой C, если для любого n и произвольного набора $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ выполнено неравенство*

$$\sup\left\{\left\|\sum_{k=1}^{n} T_k x_k\right\| : T_k \in G\right\} \geq C\left(\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Из неравенства треугольника легко вывести, что в этом определнии p должно быть больше или равным 1.

Очевидным образом, если X имеет GM-котип p, то из G-сходимости ряда $\sum_1^\infty x_k$ в X следует сходимость ряда $\sum_1^\infty \|x_k\|^p$.

Основной результат параграфа можно сформулировать следующим образом:

Теорема 12 *Пусть $G \subset L(X)$ – ограниченное правильное семейство, образующее полугруппу с единицей по отношению к композиции, и для каких-то $n_1 \in \mathbb{N}$ и $\delta > 0$ выполнено неравенство $C(n_1, G) \geq 1 + \delta$. Тогда X имеет нетривиальный GM-котип.*

Доказательство. Зафиксируем некоторое $\alpha > 1$ и такое $p > 1$, что $(1+\delta)^{p-\varepsilon} \geq n_1$. Покажем, что пространство X обладает GM-котипом p с константой $C = \left(\frac{1-\alpha^{-\varepsilon}}{n_1}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$.

Возьмем произвольный набор элементов$\{x_i\}_{i=1}^n$ из X. Разобъем множество индексов $\{1, ..., n\}$ на дизъюнктные подмножества $A_k, k = 0, 1, 2, ...$ следую-щим образом:

$$A_k = \left\{ j : \frac{(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p)^{1/p}}{\alpha^k} \geq \|x_j\| > \frac{(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p)^{1/p}}{\alpha^{k+1}} \right\}.$$

Обозначим $m_k = |A_k|,\ D = \{k : m_k \neq 0\}$. Тогда

$$\sum_{j \in A_k} \|x_j\|^p \leq m_k \frac{\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p}{\alpha^{kp}},$$

откуда

$$\sum_{j=1}^n \|x_j\|^p = \sum_{k \in D}\sum_{j \in A_k} \|x_j\|^p \leq \sum_{k=0}^{\infty} m_k \frac{\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p}{\alpha^{kp}}$$

Следовательно,$\sum_{k\in D} m_k/\alpha^{kp} \geq 1$. Докажем существование индекса $k \in D$, для которого

$$C \leq \frac{C(m_k, G)}{\alpha^{k+1}}. \tag{2}$$

Предположим противное, то есть, что $C > \frac{C(m_k,G)}{\alpha^{k+1}}$ для всех k. Для каждого $k \in D$ при некотором $r \in \{0, 1, 2, ...\}$ выполнено неравенство $n_1^r \leq m_k < n_1^{r+1}$, следовательно, по лемме $(1+\delta)^r \leq C(m_k, G)$. Получаем, что $m_k < (1+\delta)^{r(p-\varepsilon)} n_1 \leq C(m_k, G)^{p-\varepsilon} n_1$.

Тогда

$$1 \leq \sum_{k \in D} \frac{m_k}{\alpha^{kp}} \leq \sum_{k \in D} \frac{C(m_k, G)^{p-\varepsilon}}{\alpha^{kp}} \cdot n_1 < \sum_{k \in D} \frac{C^{p-\varepsilon} \cdot \alpha^{(k+1)(p-\varepsilon)} \cdot n_1}{\alpha^{kp}} =$$

$$= C^{p-\varepsilon} \sum_{k \in D} \frac{n_1}{\alpha^{k\varepsilon}} \cdot \alpha^{p-\varepsilon} \leq C^{p-\varepsilon} \frac{n_1}{1-\alpha^{-\varepsilon}} \cdot \alpha^{p-\varepsilon} = 1.$$

Противоречие. Обозначим через j_0 то значение k, при котором имеет мес-то неравенство (2).

Так как G – это правильное семейство операторов, то

$$\sup_{T_i \in G} \left\| \sum_{i=1}^{n} T_i x_i \right\| \geq \sup_{T_i \in G} \left\| \sum_{i \in A} T_i x_i \right\|$$

для всех наборов $A \subset \{1, ..., n\}$. Имеем

$$\sup_{T_i \in G} \left\| \sum_{i=1}^{n} T_i x_i \right\| \geq \sup_{T_i \in G} \left\| \sum_{i \in A_{j_0}} T_i x_i \right\| \geq \min_{i \in A_{j_0}} \|x_i\| \cdot C(m_{j_0}, X) \geq$$

$$\geq C(m_{j_0}, X) \cdot \frac{(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p)^{1/p}}{\alpha^{j_0+1}} \geq C \cdot (\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p)^{1/p}.$$

Таким образом, пространство X обладает GM-котипом p с константой C. □

Отметим, что условия, наложенные на семейство G в последней теореме, нельзя отбросить, что показывают следующие примеры.

Пример 10. В пространстве $X = c_0$ рассмотрим правильное семейство $G = \{\lambda I : \lambda \in [-2, 2]\}$ не являющееся полугруппой. В этом случае, $C(n, G) = 2$ при всех значениях n и утверждение теоремы 12 не выполняется.

Пусть $\omega = (\omega_1, \omega_2, ...)$ – невозрастающая последовательность положительных чисел, $\sum_{k=1}^{\infty} \omega_k = \infty$, $\omega_k \to 0$ при $k \to \infty$. Пространством Лоренца называется пространство стремящихся к 0 последовательностей $x = (x_1, x_2, ...)$, для которых $\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^* \omega_k < \infty$, где через (x_k^*) обозначена невозрастающая перестановка последовательности (x_k).

Пример 11. Рассмотрим пространство $X = C[0, 1]$. Выберем в X подпространство Y, изометричное $(C[0, 1] \oplus C[0, 1] \oplus ...)_{d(\omega)}$ – сумме по $d(\omega)$ последовательности изометрических копий $C[0, 1]$. Такое Y существует ввиду универсальности пространства $C[0, 1]$. Обозначим через $J_k \in L(X, Y)$ операторы изометрического вложения пространства $C[0, 1]$ в к-тое слагаемое пространства Y и рассмотрим семейство $G = (J_k)_{k=1}^{\infty}$.

Докажем, что $C(n, G) \geq \sum_{k=1}^{n} \omega_k$. Пусть $\{x_k\}_{k=1}^{n} \in X$, $\|x_k\| \geq 1$. Тогда

$$\| \sum_{k=1}^{n} T_k x_k \| = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^* \cdot \omega_k \geq \sum_{k=1}^{n} \omega_k.$$

Докажем, что $C(n,G) \le \sum_{k=1}^{n} \omega_k$. Для этого рассмотрим набор $\{e_k\}_{k=1}^{n} \subset X$, $\|e_k\| = 1$, состоящий из функций с непересекающимися носителями. Пусть $T_k \in G$, обозначим $A_i = \{k : T_k = J_k\}$ и $A = \{i : A_i \neq \varnothing\}$. Тогда

$$\|\sum_{k=1}^{n} T_k e_k\| = \|\sum_{i\in A}\sum_{k\in A_i} T_k e_k\| = \|\sum_{i\in A} J_i(\sum_{k\in A_i} e_k)\| = \sum_{i=1}^{|A|}\omega_i \le \sum_{i=1}^{n}\omega_i.$$

Последний знак равенства мы можем поставить так как $\|\sum_{k\in A_i} e_k\| = 1$.

Отметим, что рассматриваемое семейство G – это правильное семейство, так как $\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} J_k x\| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\omega_k \cdot \|x\| \longrightarrow_{n\to\infty} 0$.

Таким образом в последнем примере $C(n,G) = \sum_{k=1}^{n}\omega_k$. Этим показано, что, вообще говоря, величина $C(n,G)$ может возрастать сколь угодно медленно. Отметим, что если X имеет GM-котип p, то $C(n,G)$ возрастает не медленнее, чем $n^{1/p}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Orlicz W., Über unbedingte Konvergenz in Funktionenräumen (II)// Studia Math.– 1933.– **4**.– P.41-47.

2. Кадец М.И., Безусловно сходящиеся ряды в равномерно выпуклом пространстве// УМН.– 1956.– 11, **5**.– С.185-190.

3. Kadets M.I. and Kadets V.M., Series in Banach Spaces: conditional and unconditional convergence.– Operator Theory Advances and Applications, **94**. Birkhäuser.– 1997.

4. Diestel J., Geometry of Banach Spaces, Selected Topics.– Springer-Velag.– 1975.