

Волновые процессы в двухслойной системе несмешивающихся токонесущих жидкостей

И.Д. Борисов, С.А. Пославский, Ю.И. Руднев

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, Украина

Исследуются волновые процессы в двухслойной системе несмешивающихся токонесущих жидкостей, заполняющих цилиндрический сосуд прямоугольного сечения. Показано, что равновесное состояние рассматриваемой системы, отвечающее плоской поверхности раздела жидкостей и однородному распределению электрического тока, при определенных условиях теряет устойчивость, сменяясь волновым режимом движения. На основе галеркинских аппроксимаций уравнений магнитной гидродинамики проведены расчеты границы области устойчивости в пространстве безразмерных параметров системы. Выяснен характер влияния основных параметров на пороги волнообразования и формы генерируемых волн.

2000 Mathematics Subject Classification 76W05.

Введение

Исследования механизмов генерации волн и сопровождающих их физических эффектов в электропроводных жидкостях имеют важное прикладное значение. Большой интерес проявляется, в частности, к МГД-процессам, наблюдаемым в электролизерах для производства алюминия. Хорошо известно [1], что при определенных условиях стационарное состояние расплавов электролита и алюминия теряет устойчивость, сменяясь волновым режимом движения. Это приводит к значительному снижению выхода алюминия по току и увеличению удельных энергозатрат на его производство.

Физический механизм потери устойчивости, приводящий к появлению волн на поверхности раздела "металл – электролит", был описан в работе [2]. В основе этого механизма лежит взаимодействие вертикального магнитного поля с горизонтальными токами, появляющимися в электролите и металле при возмущениях их поверхности раздела. В [3] – [9] и целом ряде других работ были предложены упрощенные модели на основе теории мелкой воды для описания динамики поверхности раздела расплавов.

Данная работа продолжает исследования, начатые в [10]. По сравнению с [10] дополнительно учитывается ряд факторов, оказывающих существенное влияние на развитие волновых процессов в алюминиевых электролизерах. К числу таких факторов относятся, в частности, контактные сопротивления на границах раздела электропроводных сред. Показано также, что значительное влияние на пороги генерации волн оказывают токи, индуцируемые движением жидкостей. Исследовано влияние горизонтальных компонент индукции внешнего магнитного поля.

1. Физическая постановка задачи

Рассматривается система двух несмешивающихся жидкостей, заполняющих цилиндрическую полость, ограниченную плоскими горизонтальными поверхностями электродов и непроводящей боковой стенкой, как показано на рис.1. Пусть Ω_1, Ω_2 – области, занимаемые нижней и верхней жидкостями, Ω_3, Ω_4 – верхний и нижний электроды, соответственно. Верхний электрод, для определенности, будем считать анодом, нижний – катодом. Пусть $\partial\Omega_k$

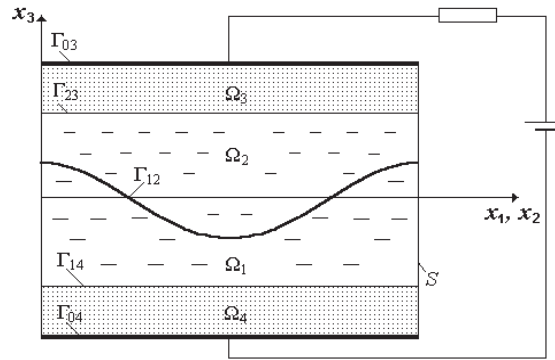


Рис. 1: Схема МГД – системы

- граница области Ω_k , $\Gamma_{ik} := \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_k$, $i, k = \overline{1, 4}$, $i < k$ – общий участок границ двух соприкасающихся областей Ω_i, Ω_k . Отметим, что в принятых обозначениях Γ_{12} означает поверхность раздела жидкостей. Верхнюю грань анода и нижнюю грань катода обозначим Γ_{03}, Γ_{04} , соответственно. Боковую поверхность цилиндрической области Ω_k , $k = \overline{1, 4}$ будем обозначать через S_k .

Введем прямоугольную систему координат $Ox_1x_2x_3$, связанную с сосудом. Ось Ox_3 этой системы направим вертикально вверх; направления осей Ox_1, Ox_2 и выбор начала системы координат будут уточнены ниже. Базисные орты осей Ox_k обозначим через \vec{e}_k , $k = \overline{1, 3}$.

Прохождение тока по рассматриваемой электрической цепи приводит к появлению электромагнитных сил с объемной плотностью $\vec{F} = \vec{j} \times \vec{B}$, где

\vec{j} – объемная плотность тока, \vec{B} – индукция магнитного поля. Необходимые условия равновесия жидкостей имеют вид:

$$-\nabla p_0^{(k)} + \rho_k \vec{g} + \vec{j}^{(k)} \times \vec{B}^{(k)} = 0 \text{ в } \Omega_k, k = 1, 2, \quad (1)$$

$$p_0^{(1)} = p_0^{(2)} \text{ на } \Gamma_{12}, \quad (2)$$

где $p_0^{(k)}$ – гидростатическое давление, ρ_k – плотность k -й жидкости, \vec{g} – ускорение силы тяжести. Верхний индекс в круглых скобках в (1)–(2) и далее означает номер области, в которой определена та или иная функция.

Рассмотрим равновесное состояние, отвечающее горизонтальной поверхности раздела жидкостей $x_3 \equiv 0$ и однородному распределению электрического тока

$$\vec{j} = -j_0 \vec{e}_3 \quad (j_0 = \text{const} > 0) \text{ в } \Omega_k, k = \overline{1, 4}. \quad (3)$$

Нетрудно убедиться в том, что условия равновесия (1)–(2) будут выполнены, если магнитное поле в областях, занятых жидкостями, представимо в виде:

$$\vec{B}^{(k)} = \frac{\mu_0 j_0}{2} \vec{x} \times \vec{e}_3 + \nabla \Phi(x_1, x_2) \times \vec{e}_3 + \vec{B}^0 \text{ в } \Omega_k, k = 1, 2, \quad (4)$$

где μ_0 – магнитная проницаемость вакуума (магнитная постоянная), $\Phi(x_1, x_2)$ – произвольная гармоническая функция, \vec{B}^0 – постоянная составляющая индукции магнитного поля. Гидростатическое давление в жидкостях определяется при этом следующим равенством:

$$p_0^{(k)} = -\rho_k g x_3 - \frac{\mu_0 j_0^2}{4} (x_1^2 + x_2^2) - j_0 \Phi(x_1, x_2) + (\vec{j}_0 \times \vec{B}^0) \cdot \vec{x} + \text{const}, k = 1, 2. \quad (5)$$

Отметим, что вектор-функция $\vec{B}(\vec{x})$ удовлетворяет уравнениям Максвелла для магнитного поля:

$$\text{rot } \vec{B}^{(k)} = \mu_0 \vec{j}_0, \text{ div } \vec{B}^{(k)} = 0 \text{ в } \Omega_k, k = \overline{1, 4};$$

При соответствующем выборе функции $\Phi(x_1, x_2)$ и векторной константы \vec{B}^0 представление (4) позволяет с той или иной степенью точности аппроксимировать магнитные поля промышленных алюминиевых электролизеров.

2. Математическая формулировка эволюционной задачи

Пусть J – суммарный ток, протекающий по рассматриваемой МГД-системе. Как показывают эксперименты, существует критическое значение силы тока $J_{\text{кр}}$ такое, что при $J > J_{\text{кр}}$ равновесное состояние жидкостей теряет устойчивость, сменяясь волновым режимом движения. В этом режиме на поверхности раздела жидкостей генерируются крупномасштабные волны. Опираясь на экспериментальные данные, можно утверждать также, что при малых значениях $\Delta J := J - J_{\text{кр}} > 0$ возникающие колебания жидкостей носят линейный

характер. Для описания этих колебаний воспользуемся линеаризованными уравнениями магнитной гидродинамики.

Обозначим через $\zeta(t, x_1, x_2)$ отклонение поверхности раздела от равновесного положения, через $\vec{v}(t, \vec{x})$ - поле скоростей жидкостей. Функции $\zeta(t, x_1, x_2)$, $\vec{v}(t, \vec{x})$ будем считать малыми величинами первого порядка малости. Гидродинамическое давление \tilde{p} , плотность электрического тока \tilde{j} и потенциал электрического поля $\tilde{\psi}$, отвечающие волновому режиму движения жидкостей, представим в виде суммы равновесных значений этих величин и их малых возмущений:

$$\tilde{p}(t, \vec{x}) = p_0(\vec{x}) + p(t, \vec{x}), \quad \tilde{j}(t, \vec{x}) = \vec{j}_0(\vec{x}) + \vec{j}(t, \vec{x}), \quad \tilde{\psi}(t, \vec{x}) = \psi_0(\vec{x}) + \psi(t, \vec{x}).$$

В линейном приближении малые движения жидкостей вблизи равновесного состояния описываются следующей системой уравнений, граничных и начальных условий:

$$\rho_k \frac{\partial \vec{v}^{(k)}}{\partial t} = -\nabla p^{(k)} + \eta_k \Delta \vec{v}^{(k)} + \vec{j}^{(k)} \times \vec{B}^{(k)} \quad \text{в } \Omega_k, \quad k = 1, 2; \quad (6)$$

$$\operatorname{div} \vec{v}^{(k)} = 0 \quad \text{в } \Omega_k, \quad k = 1, 2; \quad (7)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = v_3^{(1)} = v_3^{(2)}, \quad v_\alpha^{(1)} = v_\alpha^{(2)}, \quad \alpha = 1, 2 \quad \text{на } \Gamma_{12}; \quad (8)$$

$$\left\{ \eta \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_\alpha} \right) \right\}_{\Gamma_{12}} = 0, \quad \alpha = 1, 2 \quad \text{на } \Gamma_{12}; \quad (9)$$

$$\left\{ -p + \eta \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right\}_{\Gamma_{12}} = g(\rho_1 - \rho_2) \zeta \quad \text{на } \Gamma_{12}; \quad (10)$$

$$\vec{v}^{(k)} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega_k \setminus \Gamma_{12}, \quad k = 1, 2; \quad (11)$$

$$\vec{j}^{(k)} = \begin{cases} \sigma_k \left(-\nabla \psi^{(k)} + \vec{v}^{(k)} \times \vec{B} \right), & k = 1, 2; \\ -\sigma_k \nabla \psi^{(k)}, & k = 3, 4; \end{cases} \quad (12)$$

$$\Delta \psi^{(k)} = \begin{cases} \operatorname{div} \left(\vec{v}^{(k)} \times \vec{B} \right) \quad \text{в } \Omega_k, & k = 1, 2; \\ 0 \quad \text{в } \Omega_k, & k = 3, 4; \end{cases} \quad (13)$$

$$\{\psi\}_{\Gamma_{12}} = -\alpha_{12}(\vec{n} \cdot \vec{j}) - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 \sigma_2} j_0 \zeta, \quad \{\vec{n} \cdot \vec{j}\}_{\Gamma_{12}} = 0 \quad \text{на } \Gamma_{12}; \quad (14)$$

$$\{\psi\}_{\Gamma_{ik}} = \alpha_{ik} \sigma_k \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial n}, \quad \left\{ \sigma \frac{\partial \psi}{\partial n} \right\}_{\Gamma_{ik}} = 0 \quad \text{на } \Gamma_{ik}, \quad ik = 14, 23; \quad (15)$$

$$\frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial n} = 0 \quad \text{на } S_k, \quad k = \overline{1, 4}; \quad (16)$$

$$\psi^{(3)} = 0 \quad \text{на } \Gamma_{03}; \quad \psi^{(4)} = 0 \quad \text{на } \Gamma_{04}; \quad (17)$$

$$\zeta \Big|_{t=0} = \zeta_0(x_1, x_2) \text{ на } \Gamma_{12}; \vec{v}^{(k)} \Big|_{t=0} = \vec{v}_0^{(k)}(\vec{x}) \text{ в } \Omega_k, k = 1, 2. \quad (18)$$

Здесь η_k - динамическая вязкость k -й жидкости; $\sigma_k (= const)$ - удельная электропроводность среды в области Ω_k ; $\alpha_{ik} (= const)$ - удельное контактное сопротивление на поверхности Γ_{ik} . Вектор единичной нормали \vec{n} к поверхности Γ_{ik} предполагается направленным в сторону области с большим индексом. Фигурные скобки означают скачок заключенной в них величины на поверхности раздела сред: $\{A\}_{\Gamma_{ik}} := (A^{(k)} - A^{(i)})|_{\Gamma_{ik}}$.

Уравнения движения жидкостей (6) записаны в безындукционном приближении. Равенства (8)–(10) - представляют собой, соответственно, линеаризованные кинематические и динамические условия на поверхности раздела жидкостей. На твердой стенке, как обычно, приняты условия прилипания частиц жидкости (11). Для возмущений тока и потенциала электрического поля принят закон Ома (12). Соотношения (14)–(15) представляют собой линеаризованные условие сопряжения для потенциала электрического поля с учетом контактного сопротивления и условие непрерывности нормальной компоненты электрического тока на поверхностях раздела сред.

Предполагается, что верхняя грань анода Γ_{03} и нижняя грань катода Γ_{04} представляют собой проводящие пластины, удельная электропроводность которых значительно превышает удельную электропроводность электродов. В этом случае потенциал электрического поля на каждой из поверхностей Γ_{03} , Γ_{04} можно считать постоянным, а для возмущений потенциала принять однородные условия (17). При этом дополнительно предполагается, что суммарный ток, протекающий по рассматриваемой электрической цепи, в процессе движения жидкостей остается неизменным, $J = const$.

В начальных условиях (18) вектор-функции $\vec{v}_0^{(k)}(\vec{x})$, $k = 1, 2$ должны удовлетворять уравнениям (7) и условиям (8), (9), (11), а функция $\zeta_0(x_1, x_2)$ - условию

$$\int_{\Gamma_{12}} \zeta_0(x_1, x_2) d\Gamma = 0. \quad (19)$$

Вопрос об устойчивости равновесного состояния жидкостей сводится к исследованию устойчивости тривиального решения эволюционной задачи (6)–(18) относительно начальных возмущений $\zeta_0(x, y)$, $\vec{v}_0(\vec{x})$.

3. Галеркинская аппроксимация эволюционной задачи

Приближенное решение задачи (6)–(18) будем отыскивать, применяя метод Галеркина. Предварительно введем поле малых смещений частиц жидкостей $\vec{u}(t, \vec{x})$, связанное с полем скоростей $\vec{v}(t, \vec{x})$ следующим соотношением:

$$\vec{v}^{(k)}(t, \vec{x}) = \frac{\partial \vec{u}^{(k)}(t, \vec{x})}{\partial t} \text{ в } \Omega_k, k = 1, 2. \quad (20)$$

Введем систему базисных функций $\{\zeta_m(x_1, x_2)\}_{m=1}^{\infty}$, определенных на поверхности Γ_{12} и удовлетворяющих условию (19), а также систему соленоидальных вектор-функций $\{\vec{u}_m(\vec{x})\}_{m=1}^{\infty}$, определенных в области $\Omega_1 \cup \Omega_2$ и удовлетворяющих условиям:

$$\{\vec{u}_m\}_{\Gamma_{12}} = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{u}_m|_{\Gamma_{12}} = \zeta_m, \quad \left\{ \eta \left(\frac{\partial u_{\alpha m}}{\partial x_3} + \frac{\partial u_{3m}}{\partial x_\alpha} \right) \right\}_{\Gamma_{12}} = 0, \quad \alpha = 1, 2.$$

Поле смещений частиц жидкостей и отклонение поверхности Γ_{12} от равновесного положения приближенно представим в виде:

$$\vec{u}^{(k)}(t, \vec{x}) \simeq \sum_{m=1}^N q_m(t) \vec{u}_m^{(k)}(\vec{x}), \quad k = 1, 2; \quad \zeta \simeq \sum_{m=1}^N q_m(t) \zeta_m(x_1, x_2), \quad (21)$$

где $q_m(t)$ – функции времени t , подлежащие определению. Согласно (20) для поля скоростей $\vec{v}^{(k)}(t, \vec{x})$ имеет место представление вида:

$$\vec{v}^{(k)}(t, \vec{x}) \simeq \sum_{m=1}^N \dot{q}_m(t) \vec{u}_m^{(k)}(\vec{x}), \quad k = 1, 2 \quad \left(\dot{q}_m(t) := \frac{dq_m(t)}{dt} \right). \quad (22)$$

Сразу же отметим, что число базисных функций N в (21), (22) будет определяться из условий практической сходимости вычислительного процесса, описанного ниже.

Обозначим через $\psi'_m(\vec{x})$, $\vec{j}'_m(\vec{x})$ возмущения потенциала электрического поля и токов, отвечающие отклонениям поверхности раздела жидкостей $\zeta = \zeta_m$ при $\vec{v} = 0$. Согласно (12)–(17) функции $\vec{j}'_m(\vec{x})$, $\psi'_m(\vec{x})$ являются решением следующей краевой задачи:

$$\vec{j}'_m^{(k)} = -\sigma_k \nabla \psi'_m^{(k)} \quad \text{в } \Omega_k, \quad k = \overline{1, 4}; \quad (23)$$

$$\Delta \psi'_m^{(k)} = 0 \quad \text{в } \Omega_k, \quad k = \overline{1, 4}; \quad (24)$$

$$\{\psi'_m\}_{\Gamma_{12}} = \varkappa_{12} \sigma_1 \frac{\partial \psi'_m^{(1)}}{\partial n} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 \sigma_2} j_0 \zeta_m, \quad \left\{ \sigma \frac{\partial \psi'_m}{\partial n} \right\}_{\Gamma_{12}} = 0 \quad \text{на } \Gamma_{12}; \quad (25)$$

$$\{\psi'_m\}_{\Gamma_{ik}} = \varkappa_{ik} \sigma_k \frac{\partial \psi'_m^{(k)}}{\partial n}, \quad \left\{ \sigma \frac{\partial \psi'_m}{\partial n} \right\}_{\Gamma_{ik}} = 0 \quad \text{на } \Gamma_{ik}, \quad ik = 14, 23; \quad (26)$$

$$\frac{\partial \psi'_m^{(k)}}{\partial n} = 0 \quad \text{на } S_k, \quad k = \overline{1, 4}; \quad (27)$$

$$\psi'_m^{(3)} = 0 \quad \text{на } \Gamma_{03}; \quad \psi'_m^{(4)} = 0 \quad \text{на } \Gamma_{04}; \quad (28)$$

Введем функции $\psi''_m(\vec{x})$, $\vec{j}''_m(\vec{x})$, определяемые по функциям $\vec{u}_m(\vec{x})$ как решение краевой задачи:

$$\vec{j}''_m^{(k)} = \begin{cases} \sigma_k \left(-\nabla \psi''_m^{(k)} + \vec{u}_m^{(k)} \times \vec{B} \right), & k = 1, 2; \\ -\sigma_k \nabla \psi''_m^{(k)}, & k = 3, 4; \end{cases} \quad (29)$$

$$\Delta\psi_m''^{(k)} = \begin{cases} \operatorname{div}(\vec{u}_m^{(k)} \times \vec{B}), & k = 1, 2; \\ 0, & k = 3, 4; \end{cases} \quad (30)$$

$$\{\psi_m''\}_{\Gamma_{12}} = -\varkappa_{12}(\vec{n} \cdot \vec{J}_m''^{(1)}), \left\{ \sigma \frac{\partial \psi_m''}{\partial n} \right\}_{\Gamma_{12}} = \left\{ \sigma \vec{n} \cdot (\vec{u}_m \times \vec{B}) \right\}_{\Gamma_{12}} \quad \text{на } \Gamma_{12}; \quad (31)$$

$$\{\psi_m''\}_{\Gamma_{ik}} = \varkappa_{ik} \sigma_k \frac{\partial \psi_m''^{(k)}}{\partial n}, \left\{ \sigma \frac{\partial \psi_m''}{\partial n} \right\}_{\Gamma_{ik}} = 0 \quad \text{на } \Gamma_{ik}, \quad ik = 14, 23; \quad (32)$$

$$\frac{\partial \psi_m''^{(k)}}{\partial n} = 0 \quad \text{на } S_k, \quad k = \overline{1, 4}; \quad (33)$$

$$\psi_m''^{(3)} = 0 \quad \text{на } \Gamma_{03}; \quad \psi_m''^{(4)} = 0 \quad \text{на } \Gamma_{04}; \quad (34)$$

Используя введенные функции, возмущения потенциала электрического поля, отвечающие полю скоростей (22) и возмущениям поверхности раздела жидкостей (21), представим в виде:

$$\psi^{(k)} = \sum_{m=1}^N \left(q_m(t) \psi_m'^{(k)}(\vec{x}) + \dot{q}_m(t) \psi_2''^{(k)}(\vec{x}) \right), \quad k = \overline{1, 4}. \quad (35)$$

Подставляя (22), (35) в уравнение (6) и умножая скалярно обе части полученного равенства на \vec{u}_i^* (звездочка означает комплексно сопряженную величину), после интегрирования по области $\Omega_1 \cup \Omega_2$ с использованием формулы Грина для оператора Стокса [10] и условий (9), (10) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $q_m(t)$:

$$\mathcal{A} \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + (\mathcal{D} + \mathcal{Q}) \frac{dq(t)}{dt} + (\mathcal{B} + \mathcal{M}) q(t) = 0. \quad (36)$$

$$q(t) := (q_1(t), q_2(t), \dots, q_N(t))^T$$

Здесь \mathcal{A} , \mathcal{B} – матрицы кинетической и потенциальной энергий, \mathcal{M} – матрица МГД – взаимодействия, \mathcal{D} – матрица вязкой диссипации, \mathcal{Q} – матрица джоулевой диссипации энергии, $q(t)$ – вектор-столбец с компонентами $q_m(t)$. Все матрицы, входящие в (36), определены ниже.

Представим правые части в начальных условиях (18) в виде разложений в ряды по базисным функциям:

$$\zeta_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \zeta_m(x_1, x_2), \quad \vec{v}_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \vec{u}_m(\vec{x}).$$

Коэффициенты α_m , β_m выберем в качестве начальных значений для искомым функций $q_m(t)$, $\dot{q}_m(t)$, соответственно:

$$q(0) = \alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)^T, \quad \frac{dq(0)}{dt} = \beta := (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N)^T. \quad (37)$$

Матрицы \mathcal{A} и \mathcal{B} в уравнении (36) имеют вид:

$$\mathcal{A} := [a_{ik}]_{i,j=1}^N, \quad a_{ik} = \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \rho \vec{u}_i^* \vec{u}_k d\Omega, \quad i, k = \overline{1, N}; \quad (38)$$

$$\mathcal{B} := [b_{ik}]_{i,j=1}^N, \quad b_{ik} = \int_{\Gamma_{12}} g (\rho_1 - \rho_2) \zeta_i^* \zeta_k d\Gamma, \quad i, k = \overline{1, N}; \quad (39)$$

Отметим, что данное выше название матриц \mathcal{A} и \mathcal{B} объясняется тем, что квадратичные формы $\dot{q}^* \mathcal{A} \dot{q}$ и $q^* \mathcal{B} q$ представляют собой, соответственно, кинетическую и потенциальную энергию жидкостей.

Матрица \mathcal{D} определяет диссипацию энергии, обусловленную вязкостью жидкостей,

$$\mathcal{D} := [d_{ik}]_{i,k=1}^N, \quad d_{ik} = D(\vec{u}_i^*, \vec{u}_k), \quad i, k = \overline{1, N}, \quad (40)$$

$$D(\vec{\xi}, \vec{\chi}) := \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \sum_{m,n=1}^3 \frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial \xi_m}{\partial x_n} + \frac{\partial \xi_n}{\partial x_m} \right) \left(\frac{\partial \chi_m}{\partial x_n} + \frac{\partial \chi_n}{\partial x_m} \right) d\Omega;$$

Матрица МГД-взаимодействия \mathcal{M} связана с работой электромагнитных сил на перемещениях частиц жидкостей,

$$\mathcal{M} := [m_{ik}]_{i,k=1}^N, \quad m_{ik} = \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \sigma \vec{u}_i^* \cdot (\nabla \psi'_k \times \vec{B}) d\Omega, \quad i, k = \overline{1, N}. \quad (41)$$

Для матрицы \mathcal{Q} имеет место следующее представление:

$$\mathcal{Q} := [q_{ik}]_{i,k=1}^N, \quad q_{ik} = - \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \sigma \vec{u}_i^* \cdot \left((-\nabla \psi''_k + \vec{u}_k \times \vec{B}) \times \vec{B} \right) d\Omega, \quad i, k = \overline{1, N}. \quad (42)$$

Воспользовавшись формулой Грина (для оператора Лапласа) и учитывая уравнения и граничные условия краевой задачи (29)–(34), преобразуем (42) к виду:

$$q_{ik} = \int_{\Omega} \frac{1}{\sigma} \vec{j}_i^{''*} \cdot \vec{j}_k^{''} d\Omega + \left(\varkappa_{12} \int_{\Gamma_{12}} + \varkappa_{14} \int_{\Gamma_{14}} + \varkappa_{23} \int_{\Gamma_{23}} \right) (\vec{n} \cdot \vec{j}_i^{''*}) (\vec{n} \cdot \vec{j}_k^{''}) d\Gamma, \quad (43)$$

$$i, k = \overline{1, N}.$$

Здесь $\Omega := \bigcup_{m=1}^4 \Omega_m$, σ – кусочно-постоянная функция, определенная в Ω и совпадающая с σ_m в каждой из областей Ω_m , $m = \overline{1, 4}$. Из (43) легко следует положительная определенность матрицы \mathcal{Q} . Квадратичная форма $\dot{q}^* \mathcal{Q} \dot{q}$ представляет собой энергию, выделяемую (в единицу времени) в виде джоулева тепла в областях Ω_m , $m = \overline{1, 4}$ и на контактных сопротивлениях разделяющих их поверхностей. По этой причине \mathcal{Q} названа выше матрицей джоулевой диссипации энергии.

Метод Галеркина позволил редуцировать исходную начально–краевую задачу (6)–(18) к задаче Коши (36),(37) для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Можно показать, что при $N \rightarrow \infty$ приближенное решение, определяемое согласно (21), (36),(37), сходится к (обобщенному) решению задачи (6)–(18).

Отыскивая решения уравнения (36) вида $q(t) = \exp(\lambda t) c$, приходим, как обычно, к алгебраической спектральной задаче:

$$(\lambda^2 \mathcal{A} + \lambda(\mathcal{D} + \mathcal{Q}) + (\mathcal{B} + \mathcal{M})) c = 0, \tag{44}$$

$$c := (c_1, c_2, \dots, c_N)^T.$$

Пусть $\lambda_k^N := \gamma_k^N + i\omega_k^N$ ($i := \sqrt{-1}$), $k = \overline{1, 2N}$ – собственные значения квадратичного пучка матриц (44). Условие устойчивости (неустойчивости) решений уравнения (36), как известно, имеет вид:

$$\max_{k=\overline{1, 2N}} \gamma_k^N < 0 (> 0) \text{ – условие устойчивости (неустойчивости)}. \tag{45}$$

В дальнейшем (45) принимается в качестве условия устойчивости (неустойчивости) равновесия рассматриваемой МГД–системы.

Пусть $c_k^N := (c_{1k}^N, c_{2k}^N, \dots, c_{Nk}^N)^T$, $k = \overline{1, 2N}$ – собственный вектор спектральной задачи (44), отвечающий собственному значению λ_k^N . В общем случае компоненты собственных векторов c_{lk}^N принимают комплексные значения, $c_{lk}^N := c'_{lk}{}^N + ic''_{lk}{}^N$, $k = \overline{1, 2N}$, $l = \overline{1, N}$. Зная λ_k^N, c_k^N , нетрудно выписать общее решение уравнения (36) и, тем самым, приближенное решение начально–краевой задачи (6)–(18). Для функций $\zeta(t, \vec{x})$, описывающих колебания поверхности раздела жидкостей, будем иметь, в частности,

$$\zeta \simeq \zeta^N(t, x_1, x_2) := \sum_{k=1}^{2N} \sum_{l=1}^N a_k \exp(\gamma_k^N t) (c'_{lk}{}^N \cos \omega_k^N t - c''_{lk}{}^N \sin \omega_k^N t) \zeta_l(x_1, x_2) \tag{46}$$

где a_k – постоянные, определяемые из начальных условий (37).

Отметим, что выражение (46) имеет место в предположении о том, что все собственные числа λ_k^N – простые.

Введем N –мерный вектор–столбец $d := \lambda c$. Заметим также, что \mathcal{A} – положительно определенная матрица, так что существует обратная матрица \mathcal{A}^{-1} . Преобразуем (44) к эквивалентной спектральной задаче:

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline -\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{B} + \mathcal{M}) & -\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{D} + \mathcal{Q}) \end{array} \right) \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \tag{47}$$

где I – единичная $N \times N$ – матрица. Спектральная задача (47) более удобна для проведения численных расчетов.

4. Реализация метода Галеркина

Практическая реализация метода Галеркина сводится к построению систем базисных функций $\{\zeta_i(x_1, x_2)\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\vec{u}_i(\vec{x})\}_{i=1}^{\infty}$, отысканию решений краевых задач (23)–(28), (29)–(34), определению матричных коэффициентов уравнения (36) с последующим решением спектральной задачи (47).

Ограничимся рассмотрением сосуда с прямоугольным поперечным сечением. Вязкость обеих жидкостей будем считать малой. В качестве базисных функций $\{\zeta_i(x_1, x_2)\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\vec{u}_i(\vec{x})\}_{i=1}^{\infty}$ выберем собственные функции задачи о свободных нормальных колебаниях жидкостей в отсутствие токов и магнитного поля.

Эффективным методом решения задач гидродинамики в случае маловязких жидкостей является, как известно, метод пограничного слоя [12]. В соответствии с общей процедурой этого метода представим функции $\vec{u}_i(\vec{x})$ в виде:

$$\vec{u}_i = \nabla \chi_i(\vec{x}) + \vec{w}_i(\vec{x}), \quad i = 1, \dots, N, \quad (48)$$

где $\chi_i(\vec{x})$ – потенциал поля смещений частиц идеальной жидкости, отвечающий i -й моде собственных колебаний, $\vec{w}_i(\vec{x})$ – погранслойные функции, учитывающие влияние вязкости в тонких слоях, примыкающих к твердым стенкам и к поверхности раздела жидкостей.

В рассматриваемом случае функции $\chi_i(\vec{x})$, $\vec{w}_i(\vec{x})$ легко выписываются в явном виде (соответствующие выражения приведены в [10]). Это позволяет получить в явном виде выражения для элементов всех матриц в (36).

Матрицы кинетической и потенциальной энергий. Матрицы \mathcal{A} , \mathcal{B} определяются, в основном, потенциальными составляющими поля смещений частиц жидкостей. Пренебрегая погранслойными функциями, для мод колебаний поверхности раздела жидкостей ζ_i примем следующие выражения:

$$\zeta_i = a \cos(\kappa_{1i}x_1) \cos(\kappa_{2i}x_2) \quad (0 < x_1 < l_1, 0 < x_2 < l_2), \quad (49)$$

$$\kappa_{1i} := \frac{\pi p_{1i}}{l_1}, \quad \kappa_{2i} := \frac{\pi p_{2i}}{l_2}, \quad p_{1i}, p_{2i} = 0, 1, 2, \dots, \quad p_{1i} + p_{2i} \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

где a – произвольный амплитудный множитель, l_1, l_2 – горизонтальные размеры сосуда вдоль осей Ox_1, Ox_2 , соответственно. Произвол в выборе a используется в дальнейшем для нормировки элементов матриц при проведении вычислений.

Будем считать для определенности, что целочисленные параметры p_{1i}, p_{2i} в (49) выбраны так, чтобы волновые числа κ_i образовывали неубывающую последовательность,

$$0 < \kappa_1 \leq \kappa_2 \leq \kappa_3 \leq \dots, \quad \kappa_i := (\kappa_{1i}^2 + \kappa_{2i}^2)^{1/2}, \quad i = 1, 2, \dots$$

При таком упорядочивании элементы матриц кинетической и потенциальной энергий имеют вид [10]:

$$a_{ij} = a^2 \frac{(\rho_1 \operatorname{cth} \kappa_i h_1 + \rho_2 \operatorname{cth} \kappa_i h_2) S \varepsilon_i}{\kappa_i} \delta_{ij}, \quad b_{ij} = a^2 (\rho_1 - \rho_2) g S \varepsilon_i \delta_{ij}. \quad (50)$$

$$S := l_1 l_2, \quad \varepsilon_i := \begin{cases} 1/2, & (\kappa_{1i} \kappa_{2i} = 0) \\ 1/4, & (\kappa_{1i} \kappa_{2i} \neq 0) \end{cases}.$$

Здесь h_1, h_2 – толщины слоев нижней и верхней жидкостей, S – площадь поперечного сечения сосуда, δ_{ij} – символ Кронекера.

Матрица вязкой диссипации энергии. В отличие от матриц кинетической и потенциальной энергий матрица вязкой диссипации \mathcal{D} определяется, в основном, пограничными функциями $w_i(\vec{x})$ в представлении (48) поля смещений частиц жидкостей. В [10] при определении элементов матрицы \mathcal{D} предполагается, что толщина слоя каждой жидкости значительно меньше горизонтальных размеров сосуда, $h_k/l_k \ll 1, k = 1, 2$. Сохраняя это предположение, воспользуемся выражениями, полученными в [10]:

$$d_{ij} = a^2 \sqrt{\frac{\omega_i^0}{2}} \left(\frac{\rho_1 \sqrt{\nu_1}}{\text{sh}^2(\kappa_i h_1)} + \frac{\rho_2 \sqrt{\nu_2}}{\text{sh}^2(\kappa_i h_2)} + \frac{(\text{cth}(\kappa_i h_1) + \text{cth}(\kappa_i h_2))^2 \rho_1 \rho_2 \sqrt{\nu_1 \nu_2}}{\rho_1 \sqrt{\nu_1} + \rho_2 \sqrt{\nu_2}} \right) S \varepsilon_i \delta_{ij}; \quad (51)$$

$$\omega_i^0 := \left(\frac{g(\rho_1 - \rho_2) \kappa_i}{\rho_1 \text{cth}(\kappa_i h_1) + \rho_2 \text{cth}(\kappa_i h_2)} \right)^{1/2}.$$

Здесь ω_i^0 – собственные частоты колебаний рассматриваемой двухслойной системы жидкостей в отсутствие вязкости, магнитного поля и токов, $\nu_k := \eta_k/\rho_k$ – кинематическая вязкость k -й жидкости.

Матрица МГД - взаимодействия. Выпишем элементы матрицы МГД - взаимодействия, считая горизонтальные составляющие B_1, B_2 индукции магнитного поля линейными функциями координат x_1, x_2 , а вертикальную составляющую B_3 константой,

$$B_i = B^0 (\xi_{i0} + \xi_{i1} x_1 / l_1 + \xi_{i2} x_2 / l_2), \quad i = 1, 2; \quad B_3 = B^0 (= \text{const}) \quad (52)$$

Это соответствует случаю, когда в качестве гармонической функции в выражении (4) выбирается функция

$$\Phi = \mu_0 j_0 \left[k_1 \left((x_1 - l_1/2)^2 - (x_2 - l_2/2)^2 \right) / 2 + k_2 (x_1 - l_1/2)(x_2 - l_2/2) \right], \quad (53)$$

где k_1, k_2 – заданные безразмерные параметры, а коэффициенты ξ_{ij} имеют вид

$$\begin{aligned} \xi_{10} &= f_1 + k_B \left[\left(k_1 - \frac{1}{2} \right) k_L^{1/2} - k_2 k_L^{-1/2} \right], \quad \xi_{11} = k_B k_2 k_L^{-1/2}, \\ \xi_{20} &= f_2 + k_B \left[\left(k_1 + \frac{1}{2} \right) k_L^{-1/2} + k_2 k_L^{1/2} \right], \quad \xi_{22} = -k_B k_2 k_L^{1/2}, \\ \xi_{12} &= -k_B \left(k_1 - \frac{1}{2} \right) k_L^{1/2}, \quad \xi_{21} = -k_B \left(k_1 + \frac{1}{2} \right) k_L^{-1/2} \end{aligned} \quad (54)$$

$$f_1 := \frac{B_1^0}{B^0}, \quad f_2 := \frac{B_2^0}{B^0}, \quad k_L := \frac{l_2}{l_1}, \quad k_B := \frac{\mu_0 J}{B^0 S^{1/2}}.$$

Функции $\psi_i^{(k)}$, $i = \overline{1, N}$, $k = \overline{1, 4}$ в выражениях (41) для элементов матрицы МГД-взаимодействия определяются по функциям ζ_i как решения краевой задачи (23)–(28). Для цилиндрического сосуда прямоугольного сечения эти решения легко выписываются в явном виде:

$$\begin{aligned}\psi_i^{(1)} &= \frac{j_0}{\sigma_1} \left[\alpha_i^{(1)} \operatorname{ch}(\kappa_i(h_1 + x_3)) + \beta_i^{(1)} \operatorname{sh}(\kappa_i(h_1 + x_3)) \right] \zeta_i(x_1, x_2), \\ \psi_i^{(2)} &= \frac{j_0}{\sigma_2} \left[\alpha_i^{(2)} \operatorname{ch}(\kappa_i(h_2 - x_3)) + \beta_i^{(2)} \operatorname{sh}(\kappa_i(h_2 - x_3)) \right] \zeta_i(x_1, x_2), \\ \psi_i^{(3)} &= \frac{j_0}{\sigma_2} \beta_i^{(3)} \operatorname{sh}(\kappa_i(h_2 + h_3 - x_3)) \zeta_i(x_1, x_2), \\ \psi_i^{(4)} &= \frac{j_0}{\sigma_1} \beta_i^{(4)} \operatorname{sh}(\kappa_i(h_1 + h_4 + x_3)) \zeta_i(x_1, x_2),\end{aligned}\tag{55}$$

Коэффициенты $\alpha_i^{(k)}$, $\beta_i^{(k)}$ в (55) определены выражениями:

$$\begin{aligned}\alpha_i^{(1)} &= \beta_i^{(4)} (\operatorname{sh}(\kappa_i h_4) + \varkappa_{14} \sigma_4 \kappa_i \operatorname{ch}(\kappa_i h_4)), & \beta_i^{(1)} &= \beta_i^{(4)} (\sigma_4 / \sigma_1) \operatorname{ch}(\kappa_i h_4), \\ \alpha_i^{(2)} &= \beta_i^{(3)} (\operatorname{sh}(\kappa_i h_3) + \varkappa_{23} \sigma_3 \kappa_i \operatorname{ch}(\kappa_i h_3)), & \beta_i^{(2)} &= \beta_i^{(3)} (\sigma_3 / \sigma_2) \operatorname{ch}(\kappa_i h_3), \\ \beta_i^{(3)} &= -(1 - \sigma_2 / \sigma_1) s_{1i} / d_i, & \beta_i^{(4)} &= (1 - \sigma_2 / \sigma_1) s_{2i} / d_i, \\ d_i &:= r_{2i} s_{1i} + (\sigma_2 / \sigma_1) r_{1i} s_{2i} + \varkappa_{12} \sigma_2 \kappa_i s_{1i} s_{2i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r_{1i} &= \operatorname{ch}(\kappa_i h_1) \operatorname{sh}(\kappa_i h_4) + [\sigma_4 / \sigma_1 \operatorname{sh}(\kappa_i h_1) + \varkappa_{14} \sigma_4 \kappa_i \operatorname{ch}(\kappa_i h_1)] \operatorname{ch}(\kappa_i h_4), \\ r_{2i} &= \operatorname{ch}(\kappa_i h_2) \operatorname{sh}(\kappa_i h_3) + [\sigma_3 / \sigma_2 \operatorname{sh}(\kappa_i h_2) + \varkappa_{23} \sigma_3 \kappa_i \operatorname{ch}(\kappa_i h_2)] \operatorname{ch}(\kappa_i h_3), \\ s_{1i} &= \operatorname{sh}(\kappa_i h_1) \operatorname{sh}(\kappa_i h_4) + [\sigma_4 / \sigma_1 \operatorname{ch}(\kappa_i h_1) + \varkappa_{14} \sigma_4 \kappa_i \operatorname{sh}(\kappa_i h_1)] \operatorname{ch}(\kappa_i h_4), \\ s_{2i} &= \operatorname{sh}(\kappa_i h_2) \operatorname{sh}(\kappa_i h_3) + [\sigma_3 / \sigma_2 \operatorname{ch}(\kappa_i h_2) + \varkappa_{23} \sigma_3 \kappa_i \operatorname{sh}(\kappa_i h_2)] \operatorname{ch}(\kappa_i h_3).\end{aligned}$$

Подставляя (55) в (41) и учитывая при этом (48), получим явные выражения для элементов матрицы МГД-взаимодействия:

$$\begin{aligned}m_{ij} &= a^2 J_0 B_0 \left\{ \left(\frac{\kappa_{1i} \kappa_{2j}}{\kappa_i} K_{1ij} K_{2ji} - \frac{\kappa_{2i} \kappa_{1j}}{\kappa_i} K_{1ji} K_{2ij} \right) \times \right. \\ &\quad \times \left[h_1 \frac{\alpha_j^{(1)} I_{1ji}^{(1)} + \beta_j^{(1)} I_{2ji}^{(1)}}{\operatorname{sh}(\kappa_i h_1)} + h_2 \frac{\alpha_j^{(2)} I_{1ji}^{(2)} + \beta_j^{(2)} I_{2ji}^{(2)}}{\operatorname{sh}(\kappa_i h_2)} \right] + \\ &\quad + \frac{\kappa_j}{\kappa_i} (\kappa_{2i} b_{1ij} - \kappa_{1i} b_{2ij}) \left[h_1 \frac{\alpha_j^{(1)} I_{2ji}^{(1)} + \beta_j^{(1)} I_{1ij}^{(1)}}{\operatorname{sh}(\kappa_i h_1)} + h_2 \frac{\alpha_j^{(2)} I_{2ji}^{(2)} + \beta_j^{(2)} I_{1ij}^{(2)}}{\operatorname{sh}(\kappa_i h_2)} \right] + \\ &\quad \left. + (\kappa_{1j} b_{2ji} - \kappa_{2j} b_{1ji}) \left[h_1 \frac{\alpha_j^{(1)} I_{2ij}^{(1)} + \beta_j^{(1)} I_{3ij}^{(1)}}{\operatorname{sh}(\kappa_i h_1)} + h_2 \frac{\alpha_j^{(2)} I_{2ij}^{(2)} + \beta_j^{(2)} I_{3ij}^{(2)}}{\operatorname{sh}(\kappa_i h_2)} \right] \right\}\end{aligned}\tag{56}$$

$$b_{1ij} := \xi_{10} K_{2ij} \delta_{1ij} + \xi_{11} K_{2ij} K_{1ij}^0 + \xi_{12} K_{2ij}^1 \delta_{1ij}$$

$$b_{2ij} := \xi_{20} K_{1ij} \delta_{2ij} + \xi_{22} K_{1ij} K_{2ij}^0 + \xi_{22} K_{1ij}^1 \delta_{2ij}$$

$$\delta_{sij} := \begin{cases} 0, & \kappa_{si} \neq \kappa_{sj} \\ 1, & \kappa_{si} = \kappa_{sj} = 0 \\ 1/2, & \kappa_{si} = \kappa_{sj} \neq 0 \end{cases},$$

$$I_{1ij}^{(m)} := \begin{cases} \frac{\text{sh}(2\kappa_i h_m)}{4\kappa_i h_m} + \frac{1}{2}, & \kappa_i = \kappa_j \\ \frac{\text{sh}((\kappa_i + \kappa_j)h_m)}{2(\kappa_i + \kappa_j)h_m} + \frac{\text{sh}((\kappa_i - \kappa_j)h_m)}{2(\kappa_i - \kappa_j)h_m}, & \kappa_i \neq \kappa_j \end{cases}$$

$$I_{2ij}^{(m)} := \begin{cases} \frac{1}{4\kappa_i h_m} (\text{ch}(2\kappa_i h_m) - 1), & \kappa_i = \kappa_j \\ \frac{\text{ch}((\kappa_i + \kappa_j)h_m) - 1}{2(\kappa_i + \kappa_j)h_m} + \frac{\text{ch}((\kappa_i - \kappa_j)h_m) - 1}{2(\kappa_i - \kappa_j)h_m}, & \kappa_i \neq \kappa_j \end{cases}$$

$$I_{3ij}^{(m)} := \begin{cases} \frac{\text{sh}(2\kappa_i h_m)}{4\kappa_i h_m} - \frac{1}{2}, & \kappa_i = \kappa_j \\ \frac{\text{sh}((\kappa_i + \kappa_j)h_m)}{2(\kappa_i + \kappa_j)h_m} - \frac{\text{sh}((\kappa_i - \kappa_j)h_m)}{2(\kappa_i - \kappa_j)h_m}, & \kappa_i \neq \kappa_j \end{cases}$$

$$K_{sij} := (1 - (-1)^{p_{si}+p_{sj}}) \frac{p_{si}}{\pi(p_{si}^2 - p_{sj}^2)}$$

$$K_{sij}^0 := \begin{cases} \frac{1}{2}, & \kappa_{si} = \kappa_{sj} = 0, \\ \frac{1}{4}, & (\kappa_{si} \neq 0) \wedge (\kappa_{si} = \kappa_{sj}), \\ -(1 - (-1)^{p_{si}+p_{sj}}) \frac{p_{si}^2 + p_{sj}^2}{\pi^2(p_{si}^2 - p_{sj}^2)^2}, & (\kappa_{si} \neq \kappa_{sj}) \end{cases}$$

$$K_{sij}^1 := \begin{cases} 0, & \kappa_{si} = 0, \\ -\frac{1}{4\pi p_{si}}, & (\kappa_{si} \neq 0) \wedge (\kappa_{si} = \kappa_{sj}) \\ -\frac{(-1)^{p_{si}+p_{sj}} p_{si}}{\pi(p_{si}^2 - p_{sj}^2)}, & (\kappa_{si} \neq 0) \wedge (\kappa_{si} \neq \kappa_{sj}) \end{cases}$$

Матрица джоулевой диссипации энергии. Возмущения потенциала электрического поля $\psi_i^{(k)}$, определяющие элементы матрицы джоулевой диссипации энергии, являются решениями краевой задачи (29)–(34). Отыскивая

$\psi_i^{(k)}$ в погранслоном приближении, получим

$$\begin{aligned}
\psi_m^{(1)} &= \frac{\mu_0 j_0 (\kappa_m x_3 \operatorname{ch}(\kappa_m(x_3 + h_1)) - \operatorname{sh}(\kappa_m(x_3 + h_1)))}{2\kappa_m^2 \operatorname{sh}(\kappa_m h_1)} \zeta_m(x_1, x_2) + \\
&+ \sum_{i=0}^{\infty} \left[\hat{\alpha}_{mi}^{(1)} \operatorname{ch}(\kappa_i(h_1 + x_3)) + \hat{\beta}_{mi}^{(1)} \operatorname{sh}(\kappa_i(h_1 + x_3)) \right] \zeta_i(x_1, x_2) + \\
&+ \left(\frac{\exp(-\theta_{1m}(h_1 + x_3))}{\kappa_m \operatorname{sh} \kappa_m h_1} - \frac{\rho_2 \sqrt{\nu_2} (\operatorname{cth} \kappa_m h_1 + \operatorname{cth} \kappa_m h_2)}{\kappa_m (\rho_1 \sqrt{\nu_1} + \rho_2 \sqrt{\nu_2})} \exp(\theta_{1m} x_3) \right) \times \\
&\times \frac{1}{\theta_{1m}} \left(B_2 \frac{\partial \zeta_m(x_1, x_2)}{\partial x_1} - B_1 \frac{\partial \zeta_m(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right), \quad \theta_{1m} := \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega_m^0}{\nu_1}}, \\
\psi_m^{(2)} &= \frac{-\mu_0 j_0 (\kappa_m x_3 \operatorname{ch}(\kappa_m(x_3 - h_2)) + \operatorname{sh}(\kappa_m(x_3 - h_2)))}{2\kappa_m^2 \operatorname{sh}(\kappa_m h_1)} \zeta_m(x_1, x_2) + \\
&+ \sum_{i=0}^{\infty} \left[\hat{\alpha}_{mi}^{(2)} \operatorname{ch}(\kappa_i(h_2 - x_3)) + \hat{\beta}_{mi}^{(2)} \operatorname{sh}(\kappa_i(h_2 - x_3)) \right] \zeta_i(x_1, x_2) + \\
&+ \left(\frac{-\exp(-\theta_{2m}(h_1 - x_3))}{\kappa_m \operatorname{sh} \kappa_m h_2} + \frac{\rho_1 \sqrt{\nu_1} (\operatorname{cth} \kappa_m h_1 + \operatorname{cth} \kappa_m h_2)}{\kappa_m (\rho_1 \sqrt{\nu_1} + \rho_2 \sqrt{\nu_2})} \exp(-\theta_{2m} x_3) \right) \times \\
&\times \frac{1}{\theta_{2m}} \left(B_2 \frac{\partial \zeta_m(x_1, x_2)}{\partial x_1} - B_1 \frac{\partial \zeta_m(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right), \quad \theta_{2m} := \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega_m^0}{\nu_2}}, \\
\psi_m^{(3)} &= \sum_{i=0}^{\infty} \hat{\beta}_{mi}^{(3)} \operatorname{sh}(\kappa_i(h_2 + h_3 - x_3)) \zeta_i(x_1, x_2), \\
\psi_m^{(4)} &= \sum_{i=0}^{\infty} \hat{\beta}_{mi}^{(4)} \operatorname{sh}(\kappa_i(h_1 + h_4 + x_3)) \zeta_i(x_1, x_2).
\end{aligned} \tag{57}$$

Коэффициенты $\hat{\alpha}_{mi}^{(k)}$, $\hat{\beta}_{mi}^{(k)}$ в (57) определены выражениями:

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}_{mi}^{(1)} &= \hat{\beta}_{mi}^{(4)} (\operatorname{sh}(\kappa_i h_4) + \varkappa_{14} \sigma_4 \kappa_i \operatorname{ch}(\kappa_i h_4)), \\
\hat{\alpha}_{mi}^{(2)} &= \hat{\beta}_{mi}^{(3)} (\operatorname{sh}(\kappa_i h_3) + \varkappa_{23} \sigma_3 \kappa_i \operatorname{ch}(\kappa_i h_3)), \\
\hat{\beta}_{mi}^{(1)} &= \hat{\beta}_{mi}^{(4)} (\sigma_4 / \sigma_1) \operatorname{ch}(\kappa_i h_4) + (\kappa_i \kappa_m \operatorname{sh}(\kappa_m h_1))^{-1}, \\
\hat{\beta}_{mi}^{(2)} &= \hat{\beta}_{mi}^{(3)} (\sigma_3 / \sigma_2) \operatorname{ch}(\kappa_i h_3) + (\kappa_i \kappa_m \operatorname{sh}(\kappa_m h_2))^{-1}, \\
\hat{\beta}_{mi}^{(3)} &= \hat{\gamma}_{mi} (s_{1i} T_{mi} + r_{1i} R_{mi}) / d_i, \\
\hat{\beta}_{mi}^{(4)} &= \hat{\gamma}_{mi} (-(\sigma_2 / \sigma_1) s_{2i} T_{mi} + (r_{2i} + \varkappa_{12} \sigma_2 \kappa_i s_{2i}) R_{mi}) / d_i,
\end{aligned}$$

где

$$\hat{\gamma}_{mi} := k_{2m} b_{1mi} - k_{1m} b_{2mi},$$

$$T_{mi} := \frac{1}{\kappa_i \kappa_m} \left(\frac{\text{sh}(\kappa_i h_1)}{\text{sh}(\kappa_m h_1)} - \frac{\text{sh}(\kappa_i h_2)}{\text{sh}(\kappa_m h_2)} \right) + \bar{\alpha}_{12} \sigma_2 \frac{\text{ch}(\kappa_m h_2) - \text{ch}(\kappa_i h_2)}{\kappa_m \text{sh}(\kappa_m h_1)},$$

$$R_{mi} := \frac{1}{\kappa_i \kappa_m} \left(\frac{\text{ch}(\kappa_m h_1) - \text{ch}(\kappa_i h_1)}{\text{sh}(\kappa_m h_1)} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \cdot \frac{\text{ch}(\kappa_m h_2) - \text{ch}(\kappa_i h_2)}{\text{sh}(\kappa_m h_2)} \right).$$

Подставляя (57) в (42), получим представления элементов матрицы джоулевой диссипации q_{ij} в виде интегралов по области $\Omega_1 \cup \Omega_2$. Эти интегралы можно выписать в явном виде, однако, соответствующие формулы весьма громоздки и здесь не приводятся. Следует отметить также, что для практических расчетов более удобно (и эффективнее) использовать численное интегрирование.

5. Результаты вычислений

Безразмерные параметры задачи. С точки зрения приложений наибольший интерес в данной задаче представляют критические значения геометрических и физических параметров рассматриваемой МГД-системы, соответствующие режиму возбуждения волн.

Введем безразмерный параметр МГД-взаимодействия

$$W = \frac{JB^0}{g(\rho_1 - \rho_2)S},$$

характеризующий соотношением электромагнитных и гравитационных сил. Сразу же отметим, что W является основным параметром, определяющим поведение рассматриваемой системы.

Обозначим через p совокупность всех остальных безразмерных параметров системы. В число этих параметров входят, в частности, геометрические параметры: $k_L := l_2/l_1$, $\bar{h}_k := h_k/L$, $k = \overline{1,4}$, где L —характерный линейный размер сосуда. В качестве характерного линейного размера во всех представленных далее расчетах принималась величина $L := S^{1/2}$.

В число безразмерных физических параметров входят отношение плотностей жидкостей $\bar{\rho} := \rho_2/\rho_1$, числа Рейнольдса $Re_k := g^{1/2}L^{3/2}/\nu_k$, $k = \overline{1,2}$, электрофизические параметры $\bar{\sigma}_k := \sigma_k/\sigma_1$, $k = \overline{2,4}$, $\bar{\alpha}_{14} := \alpha_{14}\sigma_4/L$, $\bar{\alpha}_{23} := \alpha_{23}\sigma_3/L$, $\bar{\alpha}_{12} := \alpha_{12}\sigma_2/L$. Указанные безразмерные параметры необходимо дополнить коэффициентами f_1, f_2, k_1, k_2 , определяющими конфигурацию магнитного поля, а также параметром k_B , характеризующим отношение индукций "собственного" и внешнего магнитных полей.

Таким образом, поведение рассматриваемой системы помимо W определяется следующей совокупностью параметров:

$$p := (k_L, \bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3, \bar{h}_4, \bar{\rho}, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3, \bar{\sigma}_4, \bar{\alpha}_{12}, \bar{\alpha}_{14}, \bar{\alpha}_{23}, Re_1, Re_2, f_1, f_2, k_1, k_2, k_B).$$

Собственные числа спектральной задачи (44) зависят, очевидно, от W, p , так что

$$\lambda_k = \gamma_k(W, p) + i \omega_k(W, p), \quad k = 1, 2, \dots$$

В силу этих зависимостей условие (45) определяет области устойчивости (и неустойчивости) равновесных состояний системы в пространстве параметров (W, p) . Граница области устойчивости в этом пространстве определяется уравнением:

$$\max_k \operatorname{Re}(\lambda_k(W, p)) := \max_k \gamma_k(W, p) = 0.$$

Разрешая это уравнение, найдем, очевидно, критические значения параметра W в зависимости от p : $W_{\text{кр}} = W_{\text{кр}}(p)$. Зная $W_{\text{кр}}(p)$, уравнение границы области устойчивости представим в виде:

$$W = W_{\text{кр}}(p). \quad (58)$$

При $W < W_{\text{кр}}$ равновесное состояние жидкостей устойчиво, тогда как при $W > W_{\text{кр}}$ — неустойчиво. Значениям $W = W_{\text{кр}}$ отвечают периодические (по t) колебания жидкостей.

Обозначим через $\lambda_{\text{кр}} := i\omega_{\text{кр}}$, $c_{\text{кр}} := (c'_1 + ic''_1, \dots, c'_N + ic''_N)$ — собственное значение и собственный вектор квадратичного пучка матриц (44), определяющие критическое значение параметра W . Периодические колебания поверхности раздела жидкостей описываются уравнением:

$$x_3 = \sum_{k=1}^N (c'_k \cos(\omega_{\text{кр}} t) - c''_k \sin(\omega_{\text{кр}} t)) \zeta_k(x_1, x_2). \quad (59)$$

Согласно (58) построение границы области устойчивости равновесных состояний сводится к вычислению собственных чисел спектральной задачи (47) с последующим уточнением значений параметров W, p , при которых максимальная вещественная часть собственных чисел обращается в нуль. Решение спектральной задачи осуществлялось численно с использованием QR — алгоритма. Для уточнения параметров W, p , отвечающих нулевому значению максимальной вещественной части собственных чисел использовалась стандартная процедура метода дихотомии. Для реализации описанного процесса вычислений разработана программа расчета критических значений $W_{\text{кр}}$ при произвольных значениях остальных безразмерных параметров p .

На рис.2 приведены графики зависимости $W_{\text{кр}}$ от соотношения горизонтальных размеров сосуда $k_L = l_2/l_1$. Для остальных параметров, если они не указаны на рис. 2, выбирались следующие значения (приблизительно соответствующие промышленным алюминиевым электролизерам): $\bar{h}_1 = 0.035$, $\bar{h}_2 = 0.07$, $\bar{h}_3 = 0.05$, $\bar{h}_4 = 0.05$, $\bar{\rho} = 0.913$, $\bar{\sigma}_2 = 0.6 \cdot 10^{-4}$, $\bar{\sigma}_3 = 0.82 \cdot 10^{-2}$, $\bar{\sigma}_3 = 0.82 \cdot 10^{-2}$, $\bar{\alpha}_{14} = 0.2$, $\bar{\alpha}_{23} = 0.2$, $\bar{\alpha}_{12} = 0$, $Re_1 = 0.8 \cdot 10^8$, $Re_2 = 0.4 \cdot 10^8$, $k_1 = 0.37$, $k_2 = 0.03$, $f_1 = f_2 = 0$.

Область устойчивости равновесных состояний на рис.2 расположена ниже соответствующей кривой. Изломы критических кривых объясняются сменой форм колебаний жидкостей при изменении k_L .

Как показали расчеты, обычно две пары коэффициентов (c'_{k_1}, c''_{k_1}) , (c'_{k_2}, c''_{k_2}) в правой части уравнения (59) значительно превосходят по величине все остальные коэффициенты. Функции $\zeta_{k_1}(x_1, x_2)$, $\zeta_{k_2}(x_1, x_2)$ будем

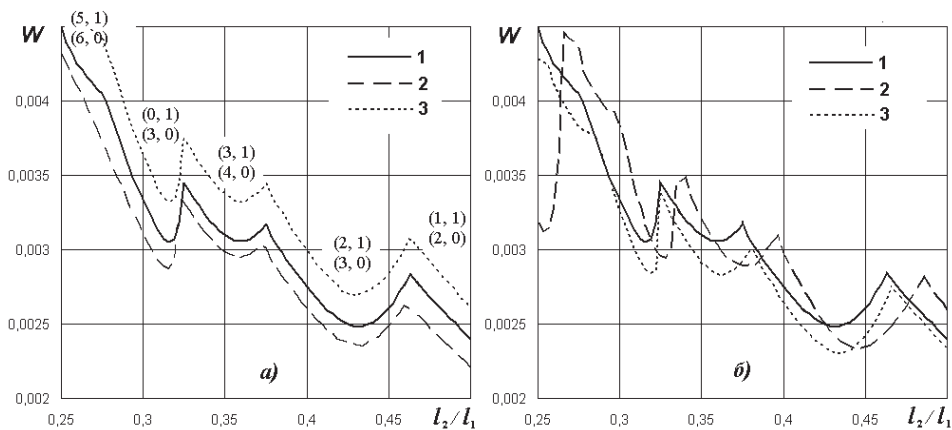


Рис. 2: Зависимость $W_{кр}$ от соотношения горизонтальных размеров:
 а) 1 - $\bar{\alpha}_{14} = \bar{\alpha}_{23} = 0$; 2 - $\bar{\alpha}_{14} = 0.25, \bar{\alpha}_{23} = 0$; 3 - $\bar{\alpha}_{14} = 0, \bar{\alpha}_{23} = 0.213$;
 б) 1 - $k_1 = 0.37, k_2 = 0.03$; 2 - $k_1 = k_2 = 0$; 3 - $k_1 = 0.37, k_2 = 0.03$ ($\mathcal{Q} = 0$).

называть главными взаимодействующими модами колебаний. Номера главных взаимодействующих мод (p_{1k_i}, p_{2k_i}) указаны на рис.2а над гладкими участками критических кривых.

Смена форм колебаний сопровождается скачкообразными изменениями собственной частоты $\omega_{кр}$. Вычисления показали, что собственная частота $\omega_{кр}$ близка к собственным частотам гидродинамических колебаний системы, отвечающих главным взаимодействующим модам в отсутствие магнитного поля и токов. При совпадении этих частот параметр $W_{кр}$ принимает локально минимальные значения. Таким образом, генерируемые на поверхности раздела жидкостей волны носят характер своеобразного резонансного взаимодействия собственных мод колебаний с совпадающими или близкими частотами.

Важным фактором, влияние которого на устойчивость МГД-системы практически не исследовалась ранее, являются контактные сопротивления на поверхностях раздела электропроводных сред. Проведенные вычисления показали, в частности, что учет контактного сопротивления α_{14} на поверхности Γ_{14} приводит к понижению критических значений параметра W ; о количественном влиянии α_{14} можно судить, сравнивая кривые 1 и 2 на рис. 2а. Контактное сопротивление α_{23} на поверхности Γ_{23} , напротив, расширяет область устойчивости, причем, как видно из сравнения кривых 1 и 3 на рис. 2а, повышение порогов волнообразования может быть весьма значительным.

Как известно [2], [10], пороги возбуждения волновых движений жидкостей определяются, в основном, вертикальной составляющей индукции магнитного поля $B_3 = B^0$. Проведенные расчеты показали, что влияние горизонтальных компонент индукции B_1, B_2 начинает сказываться, если их значения на порядок превосходят B^0 . Кривые 1, 2 на рис. 2б показывают, что горизонталь-

ные компоненты магнитного поля могут оказывать как стабилизирующее, так и дестабилизирующее влияние.

Представленные на рис. 2 результаты получены с учетом джоулевой диссипации энергии, т.е. при $Q \neq 0$. Исключение составляет кривая 3 на рис.2б, для которой $Q = 0$. Сопоставление кривых 1, 3, построенных при одинаковых значениях определяющих параметров p , показывает, что критические значения параметра МГД-взаимодействия $W_{кр}$ при $Q \neq 0$ всегда выше, чем при $Q = 0$.

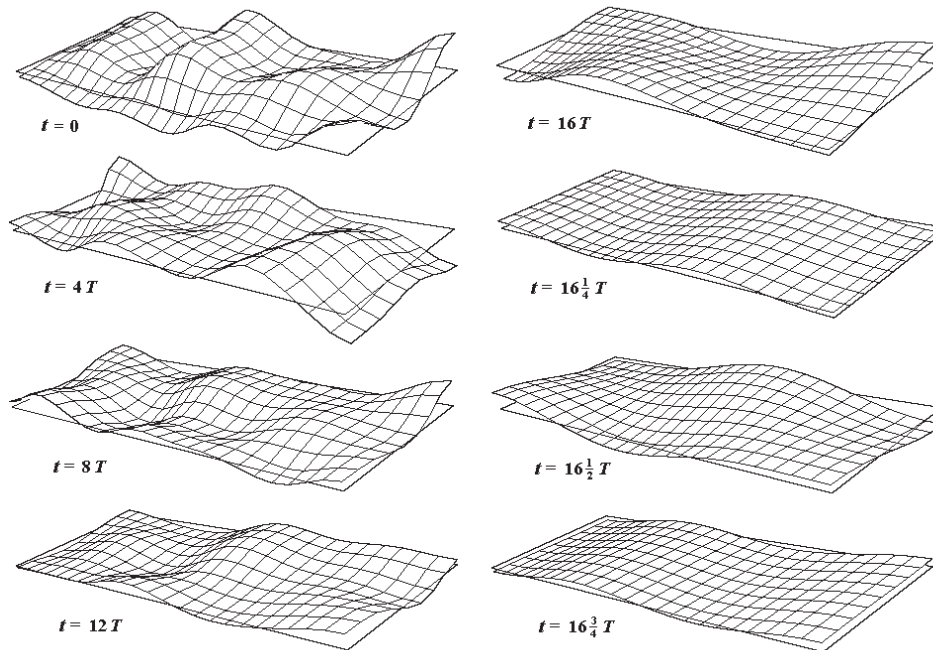


Рис. 3: Формы волн на поверхности раздела жидкостей

На рис.3 показаны формы поверхности раздела жидкостей в различные моменты времени, отвечающие критическим значениям определяющих параметров. При $t = 0$ значения коэффициентов c_i задавались случайным образом. Вычисления показали, что с течением времени колебания поверхности достаточно быстро принимают периодический характер, определяемый, в основном, главными модами. Период и круговая частота колебаний связаны соотношением $T = 2\pi/\omega_{кр}$.

Заключение

В рамках линейной теории проведено исследование устойчивости равновесных состояний ограниченной системы несмешивающихся токнесущих

жидкостей, взаимодействующих с постоянным магнитным полем. Показано, что увеличение параметра МГД – взаимодействия (пропорционального силе тока и индукции магнитного поля) неизбежно приводит к потере устойчивости равновесия и появлению волн на поверхности раздела жидкостей.

Пороги генерации волн определяются, в основном, вязкостью жидкостей. Важными факторами, оказывающими существенное влияние на пороги волнообразования, являются также джоулева диссипация энергии, контактные сопротивления на поверхностях раздела электропроводных сред. Учет этих факторов необходим для получения количественно достоверных результатов при моделировании МГД – процессов в промышленных электролизерах.

Для прямоугольного сосуда основным параметром, определяющим собственные частоты колебаний рассматриваемой системы, является отношение горизонтальных размеров. Рациональный выбор этого отношения (при сохранении площади поперечного сечения и других геометрических и физических параметров) позволяет существенно повысить пороги волнообразования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Urata N., Mori S., Ikeuchi H. Instabilities of the metal surface in electrolytic alumina reduction cells // *Keikin-zoku*. – 1976. – N 1. – P. 573–600.
2. Sele T. Instabilities of the metal surface in electrolytic alumina reduction cells // *Metallurgical Transactions B*. – 1977. – Vol. **8B**. – P. 613–618.
3. Sneyd A. D., Wang A. Interfacial instability due to MHD mode coupling in aluminium reduction cells // *J. Fluid Mech.* – 1994. – Vol. **263**. – P. 243–259.
4. Bojarevich V., Romerio M. V. Long waves instability of liquid metal – electrolyte interface in aluminium electrolysis cells: a generation of Sele's criterion // *Euro. J. Mech. B/Fluids*. – 1994. – Vol. **13**, N 1. – P. 33–56.
5. Davidson P. A., Lindsay J. R. Stability of interfacial waves in aluminium reduction cells // *J. Fluid Mech.* – 1998. – Vol. **362**. – P. 273–295.
6. Morris S. J. S., Davidson P. A. Hydromagnetic edge waves and instability in reduction cells // *J. Fluid Mech.* – 2003. – Vol. **493**. – P. 121–130.
7. Деркач А. С., Скворцов А. П., Цибуков И. К., Шрамко В. А., Калимов А. Г., Сведенцов М. Л. Трехмерная модель расчета МГД – параметров алюминиевого электролизера // *Цветные металлы*. – 2000. – № 1. – С. 30–34.
8. Lukyanov A., El G., Molokov S. Instability of MHD-modified interfacial gravity waves revisited // *Phys. Lett. A*. – 2001. – Vol. **290**. – P. 165–172.

9. Алаторцев А. В., Кузьмин Р. Н., Савенкова Н. П., Проворова О. Г. Динамическая модель магнитно-гидродинамических процессов в алюминиевом электролизере // Прикладная физика. – 2004. – N 5. – P. 33–41.
10. Борисов И. Д., Пославский С. А., Руднев Ю. И. Устойчивость равновесия системы несмешивающихся токнесущих жидкостей в магнитном поле // Прикладна гідромеханіка. – 2006. – Т. 8, N 4. – P. 3–14.
11. Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике. – М.: Наука, 1989. – 416 с.
12. Черноусько Ф. Л. Динамика твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. – М.: ВЦ АН СССР, 1968. – 342 с.