

Метод итерации касательных для некоторого семейства диофантовых уравнений

В.С. Рыжий, И.Г. Николенко

*Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина,
п.л. Свободы, 4, 61022, Харьков, Украина
E-mail: nig@ukr.net*

Метод касательных и его итерация для плоских алгебраических кривых 3-го порядка без особых точек применены к семейству диофантовых уравнений, которое зависит от параметра и является обобщением известного примера Ферма итерации касательных. Исследовано это семейство. Получены формулы для решений на первых двух шагах итерации касательных, проведен анализ условий выполнимости итерации в зависимости от параметра семейства. Приведены примеры, где указана и графическая иллюстрация.

Рижий В.С., Николенко І.Г., **Метод ітерації дотичних для деякої сім'ї діофантових рівнянь.** Метод дотичних і його ітерація для плоских алгебраїчних кривих 3-го порядку без особливих точок застосовані до сім'ї діофантових рівнянь, яка залежить від параметра і є узагальненням відомого прикладу Ферма ітерації дотичних. Досліджено цю сім'ю. Одержано формули для розв'язків на перших двох кроках ітерації дотичних, проаналізовано умови здійсненності ітерації в залежності від параметра сім'ї. Наведено приклади, де показано і графічну ілюстрацію.

V.S. Ryzhiy, I.G. Nikolenko, **Method of tangents iteration for some family of Diophantine equations.** Method of tangents and its iteration for the plane algebraic 3rd-order curves has been applied to the Diophantine equations family which depends on the parameter. The family is a generalization of well-known Fermat's example of tangents iteration. This family has been investigated. Formulas for the solutions for the first two steps of tangents iteration have been obtained. Analysis of iterations admissibility conditions depending on family parameter has been done. Examples and its graphic illustrations have been given also.

2000 Mathematics Subject Classification 26A18.

1. Введение

Диофантовыми называются алгебраические уравнения и системы с рациональными (в частности, целыми) коэффициентами, у которых неизвестных больше, чем уравнений. Ищутся рациональные решения таких уравнений и систем, т. е. точки с рациональными координатами. Согласно методу касательных, зная рациональное решение (x_0, y_0) диофантова уравнения 3-го порядка, нужно провести касательную в точке (x_0, y_0) к кривой, заданной этим уравнением, и если она пересечет кривую в точке (x_1, y_1) , то эта точка также является рациональным решением этого уравнения [3, с. 82–83].

Выдающийся французский математик П. Ферма (1601–1665) в кратком замечании предложил пример итерации (повторного применения) касательных в диофантовом уравнении

$$4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 - y^3 = 0. \quad (1)$$

Этот пример обобщает одну из задач, содержащихся в знаменитой книге "Арифметика" выдающегося древнегреческого математика Диофанта, жившего во II–III веках н. э. Диофант и Ферма при решении диофантовых уравнений искусно подбирают соответствующие алгебраические подстановки, не связывая их с проведением касательных или секущих. Геометрическая интерпретация их методов появилась позже.

Текст замечания Ферма о задаче, сводящейся к уравнению (1), приведен в [1, с. 227]. В [2, с. 220–221], [3, с. 218–219] это замечание комментируется, но рассуждения там не могли быть доведены до конца из-за ошибочного утверждения в [2, с. 220] о том, что многочлен $4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$, входящий в уравнение (1), неприводим в поле \mathbb{Q} рациональных чисел. На самом же деле он имеет корень $x = -\frac{1}{2}$.

Для диофантовых уравнений Ферма, как и Диофант, ищет решения с положительными рациональными координатами, поскольку в то время отрицательные числа считались еще не вполне настоящими числами. Поэтому Ферма, исходя из очевидного решения $(0, 1)$ уравнения (1) и получив на первом шаге решение (x_1, y_1) с отрицательной абсциссой, предлагает повторить "операцию" (т. е. провести касательную), исходя из точки (x_1, y_1) , и утверждает, что таким образом получится решение с положительными координатами. Вычислений он не приводит.

В.С. Рыжий в работе [1] детально исследовал предложенный Ферма пример итерации касательных в диофантовом уравнении (1) с начальной точкой $(0, 1)$. Вопреки ожиданию оказалось, что на втором шаге в пересечении касательной с кривой получается решение (x_2, y_2) , обе координаты которого отрицательны, оно не удовлетворяет утверждению Ферма. Но, как показано в [1], кривая (1) симметрична относительно точки $(-\frac{1}{2}, 0)$, поэтому на втором шаге итерации касательных получаются два решения: точка (x_2, y_2) с отрицательными координатами и точка $(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2)$ с положительными (см. ниже рис.1). Точка $(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2)$ удовлетворяет утверждению Ферма. В настоящее время здесь нас устраивают рациональные решения

с координатами любого знака. Метод Ферма итерации касательных для нас важен возможностью получать новые решения диофантовых уравнений по уже известным. Представляется естественным рассмотреть метод итерации касательных, выбрав для его применения достаточно широкое семейство диофантовых уравнений 3-го порядка и описываемых ими кривых.

2. Исследование семейства кривых

Рассмотрим семейство кривых

$$F(x, y, a) \equiv a^2x^3 + 3ax^2 + (a+2)x + 1 - y^3 = 0, \quad a \in \mathbb{Q}, \quad (2)$$

зависящее от параметра a и содержащее кривую (1) при $a = 2$.

Множество решений уравнения (2) совпадает с графиком функции

$$\begin{aligned} y &= \sqrt[3]{a^2x^3 + 3ax^2 + (a+2)x + 1} \\ &= \sqrt[3]{(ax+1)(ax^2 + 2x + 1)} \equiv f(x, a), \quad a \in \mathbb{Q}. \end{aligned} \quad (3)$$

При исследовании этой функции рассматриваем ее как функцию от x при фиксированных $a \in \mathbb{R}$, не ограничиваясь значениями $a \in \mathbb{Q}$.

Для любого $a \in \mathbb{R}$ функция $f(x, a)$ определена для любого $x \in \mathbb{R}$, непрерывна на \mathbb{R} , $f(-\infty, a) = -\infty$, $f(+\infty, a) = +\infty$.

Легко показать, что рассматриваемое семейство кривых при $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ состоит из всех кривых вида

$$y = \sqrt{a^2x^3 + bx^2 + cx + d}, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (4)$$

удовлетворяющих двум условиям: они проходят через точку $(0, 1)$ и симметричны относительно точки $(-\frac{1}{a}, 0)$.

При $a = 0$ в (3) имеем функцию $y = \sqrt[3]{2x+1}$ с центром симметрии $(-\frac{1}{2}, 0)$. При $a = 1$ кривая в (3) вырождается в прямую $y = x + 1$, этот случай мы исключаем из рассмотрения.

Если $a > 1$, то кривая (2) пересекает ось Ox только в точке $(-\frac{1}{a}, 0)$, а если $a < 1$, причем $a \neq 0$, то в трех точках: $-\frac{1}{a}$, $-\frac{1}{a} \pm \frac{\sqrt{1-a}}{a}$.

Кривая (2) пересекает ось Oy только в точке $(0, 1)$ при любом a .

При $a \neq 0$ и $a \neq 1$ кривая (2) имеет асимптоту

$$y = a^{\frac{2}{3}} \left(x + \frac{1}{a} \right). \quad (5)$$

Кривая $y = \sqrt[3]{2x+1}$ (см. (2) при $a = 0$) не имеет асимптоты.

Исследуем функцию (3) с помощью первых двух производных по x при фиксированных $a \in \mathbb{R}$. Находим

$$y' = \frac{(ax+1)^2 + \frac{a-1}{3}}{(ax+1)^{\frac{2}{3}}(ax^2 + 2x + 1)^{\frac{2}{3}}}. \quad (6)$$

При $a = 1$ получается $y' = 1$, случай $a = 1$ исключаем.

При $a > 1$ здесь $y' > 0$ и знаменатель в (6) обращается в нуль только при $x = -\frac{1}{a}$. Следовательно, при $a > 1$ функция $f(x, a)$ возрастает по x , а кривая имеет вертикальную касательную в точке $(-\frac{1}{a}, 0)$ симметрии.

При $a < 1$ таких, что $a \neq 0$, производная y' обращается в нуль в точках $-\frac{1}{a} \pm \frac{1}{a}\sqrt{\frac{1-a}{3}}$ и меняет знак при переходе через эти точки, поэтому функция (3) в этих точках имеет экстремум. Если $a < 1$, причем $a \neq 0$, то значение функции $f(x, a)$ в точке $x = -\frac{1}{a} + \frac{1}{a}\sqrt{\frac{1-a}{3}}$ экстремума равно: $-\sqrt{\frac{1-a}{3}}\sqrt[3]{\frac{2}{a}}$. Значение функции (3) во второй точке $x = -\frac{1}{a} - \frac{1}{a}\sqrt{\frac{1-a}{3}}$ экстремума отличается знаком.

Вторая производная функции (3) имеет вид

$$y'' = \frac{2}{3}(a-1) \cdot \frac{(ax+1)^2 + \frac{1-a}{3}}{(ax+1)^{\frac{5}{3}}(ax^2+2x+1)^{\frac{5}{3}}}. \quad (7)$$

Отсюда видно, что при $a > 1$ функция $f(x, a)$ имеет точки перегиба с абсциссами $-\frac{1}{a}, -\frac{1}{a} \pm \frac{1}{a}\sqrt{\frac{a-1}{3}}$. Очевидно, что $y(-\frac{1}{a}) = 0$. При $a > 1$ значение функции $f(x, a)$ в точке $x = -\frac{1}{a} + \frac{1}{a}\sqrt{\frac{a-1}{3}}$ перегиба равно $\sqrt{\frac{a-1}{3}}\sqrt[3]{\frac{4}{a}}$. Значение функции в иной точке $x = -\frac{1}{a} - \frac{1}{a}\sqrt{\frac{a-1}{3}}$ перегиба отличается знаком. При $a = 2$ здесь получаются те же результаты, что и в примере Ферма в работе [1].

Если $a < 1$, то $(ax+1)^2 + (1-a)/3 > 0$. Из (7) видно, что если $a < 1$, причем $a \neq 0$, то точками перегиба функции $f(x, a)$ являются точки $-\frac{1}{a}, -\frac{1}{a} \pm \frac{1}{a}\sqrt{\frac{1-a}{3}}$ оси Ox (т. е. нули знаменателя в (7), они же — нули функции $f(x, a)$). В этих точках, как видно из (6), касательная к кривой вертикальна.

Функция $y = \sqrt[3]{2x+1}$, которая получается при $a = 0$, имеет одну точку перегиба $(-\frac{1}{2}, 0)$, в ней касательная вертикальна.

Род плоской алгебраической кривой, не имеющей особых точек, вычисляется по формуле $g = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, где n — порядок кривой. Кривые рода 1 называются *эллиптическими* [3, с. 16–18]. Кривые семейства (2) не имеют особых точек, их род равен 1, если $a \neq 1$.

3. Изложение метода касательных в применении к кривым семейства

Пусть (x_0, y_0) — рациональное решение уравнения (2), т. е. точка с рациональными координатами. Проведем касательную к кривой (2) в этой точке, записав уравнение касательной в параметрическом виде

$$x = t + x_0, \quad y = kt + y_0. \quad (8)$$

Угловым коэффициентом касательной в точке (x_0, y_0) находится по формуле

$$k = \frac{1}{3y_0^2}(3a^2x_0^2 + 6ax_0 + a + 2). \quad (9)$$

Подставив x и y из (8) в уравнение (2) кривой, получим

$$a^2(t + x_0)^3 + 3a(t + x_0)^2 + (a + 2)(t + x_0) + 1 = (kt + y_0)^3. \quad (10)$$

Легко видеть, что левая часть этого уравнения равна $At^3 + Bt^2 + Ct + D$, где

$$A = a^2, \quad B = 3a^2x_0 + 3a, \quad C = 3a^2x_0^2 + 6ax_0 + a + 2, \quad D = y_0^3,$$

поэтому уравнение (10) принимает вид

$$At^3 + Bt^2 + Ct + D = k^3t^3 + 3k^2t^2y_0 + 3kty_0^2 + y_0^3.$$

Здесь уничтожаются свободные члены, а поскольку в силу (9) $C = 3ky_0^2$, то и члены первой степени t .

Остается уравнение $t^2(At + B - k^3t - 3k^2y_0) = 0$. Корень $t_0 = 0$ в силу (8) дает точку (x_0, y_0) , через которую проводили касательную. Второй корень имеет вид

$$t_1 = \frac{3(k^2y_0 - a^2x_0 - a)}{a^2 - k^3} \quad \text{при} \quad k^3 \neq a^2. \quad (11)$$

Здесь необходимо $t_1 \neq 0$, в противном случае в силу (8) получаем только точку (x_0, y_0) . При $t_1 \neq 0$ в (8) получается новое рациональное решение (x_1, y_1) с координатами

$$x_1 = t_1 + x_0, \quad y_1 = kt_1 + y_0, \quad (12)$$

которое представляет собой точку (x_1, y_1) пересечения касательной, проведенной в точке (x_0, y_0) кривой (2), с этой кривой.

Если применять итерацию касательной, то первым шагом итерации является отыскание точки (x_1, y_1) по формулам (9), (11), (12), а на втором шаге нужно найти угловой коэффициент касательной в точке (x_1, y_1) кривой (2) по формуле

$$k_1 = \frac{1}{3y_1^2}(3a^2x_1^2 + 6ax_1 + a + 2), \quad (13)$$

вычислить

$$t_2 = \frac{3(k_1^2y_1 - a^2x_1 - a)}{a^2 - k_1^3} \quad \text{при} \quad k_1^3 \neq a^2, \quad (14)$$

найти новое решение (x_2, y_2) по формулам

$$x_2 = t_2 + x_1, \quad y_2 = k_1t_2 + y_1. \quad (15)$$

Далее можно продолжать аналогично. Однако на практике уже на втором шаге итерации касательных точные вычисления бывают трудными, так как в записях величин k_1, t_2, x_2, y_2 в виде несократимых дробей $\frac{m}{n}$ ($m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$) числа $|m|$ и n часто являются большими. Поэтому, вообще говоря, метод касательных мало эффективен для получения решений после второго шага

итерации. Но иногда легко выполняется и третий шаг итерации касательных (см. ниже пример 5 для случая $a = 0$).

Кривые семейства (2) имеют центр симметрии $(-\frac{1}{a}, 0)$ при $a \neq 0$ и $(-\frac{1}{2}, 0)$ при $a = 0$. Поэтому вместе с каждым из решений (x_i, y_i) , отличных от центра симметрии кривой, решением является и точка $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$, симметричная точке (x_i, y_i) относительно центра симметрии кривой.

4. Выражение x_1, y_1, k_1 и t_2 через параметр a семейства кривых

Пусть $(x_0, y_0) = (0, 1)$. Тогда из (9) получаем, что на первом шаге угловой коэффициент касательной к кривой (2) имеет вид

$$k = \frac{a + 2}{3}. \quad (16)$$

Из (12) и (11) при $x_0 = 0, y_0 = 1$ получаем

$$x_1 = t_1 = \frac{3(k^2 - a)}{a^2 - k^3} = \frac{9((a + 2)^2 - 9a)}{27a^2 - (a + 2)^3} = \frac{9(a - 1)(a - 4)}{27a^2 - (a + 2)^3}. \quad (17)$$

Случай $a = 1$ (прямая $y = x + 1$) исключается из рассмотрения. Сократив дробь в (17) на $a - 1$, получим

$$x_1 = -\frac{9(a - 4)}{a^2 - 20a - 8}. \quad (18)$$

При $x_0 = 0, y_0 = 1$ из (12) получаем $y_1 = kx_1 + 1$, а с учетом (16) и (18) после преобразований находим

$$y_1 = -\frac{2(a - 1)(a + 8)}{a^2 - 20a - 8}. \quad (19)$$

Подстановка в (13) выражений x_1 и y_1 из (18) и (19) и приведение к общему знаменателю выражения в скобках в (13) дает

$$k_1 = \frac{a^5 + 151a^4 - 344a^3 + 1088a^2 - 1024a + 128}{12(a - 1)^2(a + 8)^2}.$$

После сокращения этой дроби на $a - 1$ получаем угловой коэффициент касательной к кривой (2) в точке (x_1, y_1) на втором шаге в виде

$$k_1 = \frac{a^4 + 152a^3 - 192a^2 + 896a - 128}{12(a - 1)(a + 8)^2}. \quad (20)$$

При $a = 2$ в (16), (18)–(20) получаем, соответственно, значения k, x_1, y_1, k_1 , известные ранее для уравнения (1), т. е. в примере Ферма.

Из (20) следует, что

$$k_1(0) = \frac{1}{6}; \quad k_1(a) = 0 \quad \text{при} \quad a \approx \frac{1}{7} \quad \text{и при} \quad a \approx -153;$$

$$k_1(\pm\infty) = \pm\infty; \quad k_1(1 \pm 0) = \pm\infty; \quad k_1(-8 \pm 0) = +\infty.$$

Функция $k_1(a)$ имеет наклонную асимптоту $y = \frac{1}{12}(a + 137)$ при $a \rightarrow \infty$ и две вертикальные: $a = 1$ и $a = -8$.

При $a \approx 2,502$ функция $k_1(a)$ имеет локальный минимум, близкий к 1,676. Подставив x_1 и y_1 из (18) и (19) в (14), получим

$$t_2 = \frac{6(a-1)(k_1^2(a)(a+8) - 4a(a-1))}{(k_1^3(a) - a^2)(a^2 - 20a - 8)}, \quad (21)$$

где $k_1(a)$ выражается по формуле (20).

5. Анализ условий выполнимости первых двух шагов итерации касательных в зависимости от параметра a семейства

Нас интересуют рациональные значения параметра a , при которых выполняются первые два шага итерации касательных с начальной точкой $(x_0, y_0) = (0, 1)$. Случай $a = 1$, когда в (2) имеем прямую $y = x + 1$, исключаем из рассмотрения.

1) Как видно из п.3, при выборе начальной точки $(x_0, y_0) = (0, 1)$ первый шаг итерации касательных выполняется, если $x_1 \neq 0$ и $k^3 \neq a^2$.

Из (18) видно, что $x_1 = 0$ при $a = 4$. В этом случае касательная к кривой в точке $(0, 1)$ имеет с кривой только одну общую точку $(0, 1)$ и итерация невозможна.

Условие $k^3 \neq a^2$, где k выражается по формуле (16), при $a \neq 1$ равносильно условию $a^2 - 20a - 8 \neq 0$ (см. вывод формулы (18) для x_1). Трехчлен $a^2 - 20a - 8$ в \mathbb{R} имеет иррациональные корни $a_1 = 10 + 6\sqrt{3} \approx 20,3923$ и $a_2 = 10 - 6\sqrt{3} \approx -0,3923$. Поэтому условие $k^3 \neq a^2$ выполняется для всех кривых (2) при $a \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$.

Условие $k^3 \neq a^2$ равносильно условию $k \neq a^{\frac{2}{3}}$. Здесь в правой части $k_{ac} = a^{\frac{2}{3}}$ — угловой коэффициент асимптоты (5) кривой (2). Геометрический смысл условия $k^3 \neq a^2$: касательная на первом шаге не должна быть параллельна асимптоте кривой семейства (2).

2) На втором шаге итерации касательных добавляются условия: $y_1 \neq 0$, $k_1^3 \neq a^2$ и $t_2 \neq 0$ (см. (13) и (14)) при рациональных значениях параметра a . Из (19) получаем, что $y_1 = 0$, если $a = 1$ или $a = -8$. Случай $a = 1$ отбрасываем, а при $a = -8$ из (20) получаем, что $k_1(-8) = +\infty$,

т. е. касательная на втором шаге к кривой при $a = -8$ вертикальна. Следовательно, при $a = -8$ второй шаг итерации касательных невыполним.

Условие $k_1^3 \neq a^2$ равносильно условию $k_1 \neq a^{\frac{2}{3}}$ и геометрически означает, что на втором шаге касательная к кривой не должна быть параллельна асимптоте кривой. Уравнение $k_1^3(a) = a^2$, где $k_1(a)$ выражается по формуле (20), является алгебраическим уравнением 12-й степени. Точно найти все его корни нет возможности. Из пересечения графиков функций $k_1(a)$ и $a^{\frac{2}{3}}$, построенных для большого набора точек, видно расположение шести корней a_i уравнения $k_1(a) = a^{\frac{2}{3}}$ при $a \in \mathbb{R}$. Два из них — это те же корни $a_1 = 10 + 6\sqrt{3}$ и $a_2 = 10 - 6\sqrt{3}$, что и для уравнения $k(a) = a^{\frac{2}{3}}$, где $k(a) = \frac{a+2}{3}$ (см. формулу (16)). Это следует из равенства $k_1(a_i) = k(a_i)$, $i = 1, 2$, которое получается путем длинных, хотя и элементарных вычислений.

Еще четыре корня уравнения $k_1(a) = a^{\frac{2}{3}}$ ($a \in \mathbb{R}$) можно указать приближенно:

$$a_3 \approx 2,21997; \quad a_4 \approx 0,04239; \quad a_5 \approx 1277,89; \quad a_6 \approx -46,89.$$

Второй шаг итерации касательных невыполним также, когда $t_2(a)$ (см. формулу (21)) не определено, а также, когда $t_2(a) = 0$. Видно, что $t_2(a)$ не определено при указанных выше значениях a_i параметра, а также при $a = 1$ и $a = -8$, где не определено $k_1(a)$. Уравнение $k_1^2(a)(a+8) - 4a(a-1) = 0$ является алгебраическим уравнением 9-й степени относительно a . Одним из его корней является $a = 4$. Это видно, если учесть, что $k_1(4) = 2$. При $a \in \mathbb{R}$ корни $a_1 = 10 + 6\sqrt{3}$ и $a_2 = 10 - 6\sqrt{3}$ знаменателя для t_2 являются также и корнями числителя в t_2 , в этом легко убедиться с помощью равенства $k_1(10 \pm 6\sqrt{3}) = 2(2 \pm \sqrt{3})$.

3) В итоге приходим к следующим выводам о выполнимости первых двух шагов итерации касательных для семейства (2) при $a \in \mathbb{Q}$. На первом шаге метод применим, кроме случаев $a = 1$ и $a = 4$. На втором шаге еще исключается $a = -8$, а также рациональные корни уравнений $k_1(a) = a^{\frac{2}{3}}$ и $t_2(a) = 0$, если они есть. При всех остальных значениях параметра $a \in \mathbb{Q}$ первые два шага итерации касательных для семейства (2) кривых выполнимы.

6. Примеры итерации касательных для кривых семейства

Всюду ниже в качестве начальной точки берем точку $(x_0, y_0) = (0, 1)$. Приведенные далее в результатах обыкновенные дроби несократимы. (Сокращались, в частности, с учетом таблицы простых чисел.)

Пример 1. $a = 2$ (пример Ферма, см. выше п.1). Тогда

$$k = \frac{4}{3}; \quad x_1 = -\frac{9}{22} \approx -0,4091; \quad y_1 = \frac{5}{11} \approx 0,4545;$$

$$k_1 = \frac{133}{75} \approx 1,7733; \quad k_{ac} = 2^{\frac{2}{3}} \approx 1,59; \quad k < k_{ac} < k_1;$$

$$t_2 = -\frac{122625}{60467} \approx -2,0280; \quad x_2 \approx -2,4371; \quad y_2 \approx -3,1417.$$

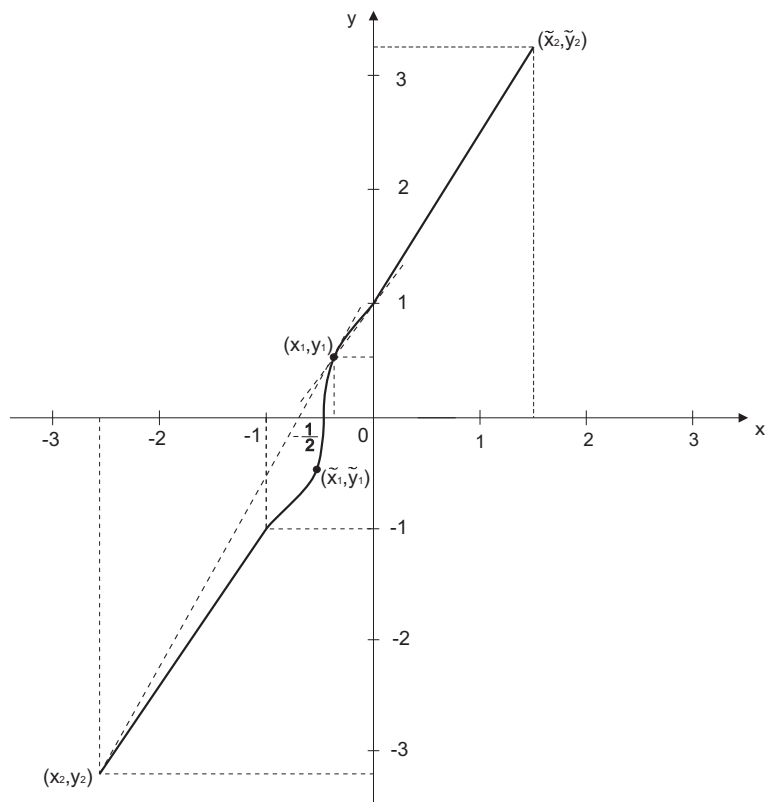


Рис.1. Итерация касательной при $a = 2$.

В дальнейших примерах мы не будем изображать на рисунках решения $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$, $i = 1, 2$, симметричные решениям (x_i, y_i) относительно точки $(-\frac{1}{a}, 0)$.

Пример 2. $a = 2,5$.

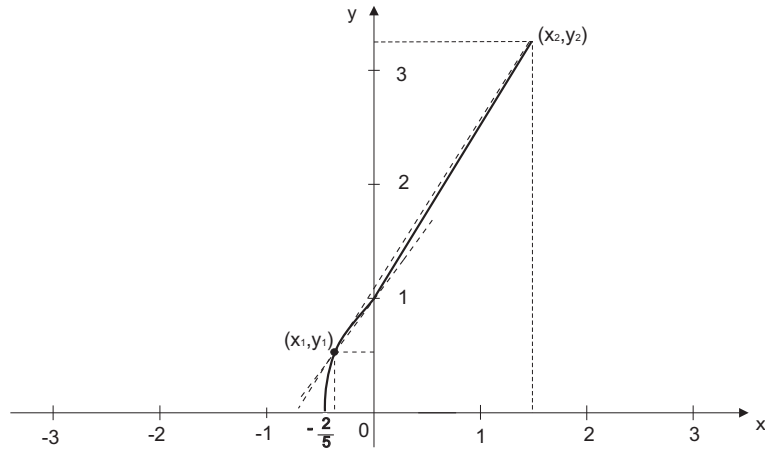
Тогда

$$k = \frac{3}{2}; \quad x_1 = -\frac{6}{23} \approx -0,2609; \quad y_1 = \frac{14}{23} \approx 0,6087;$$

$$k_1 = \frac{657}{392} \approx 1,6760; \quad k_{ac} = (2,5)^{\frac{2}{3}} \approx 1,84; \quad k < k_1 < k_{ac};$$

$$t_2 = \frac{6602064}{4038409} \approx 1,6348; \quad x_2 \approx 1,3739; \quad y_2 \approx 3,3487.$$

На рис.2 приведена кривая при $a = 2,5$ без нижней ее части, которая симметрична верхней относительно точки $(-\frac{2}{5}, 0)$.

Рис.2. Итерация касательной при $a = 2, 5$.

Пример 3. $a = 7$.

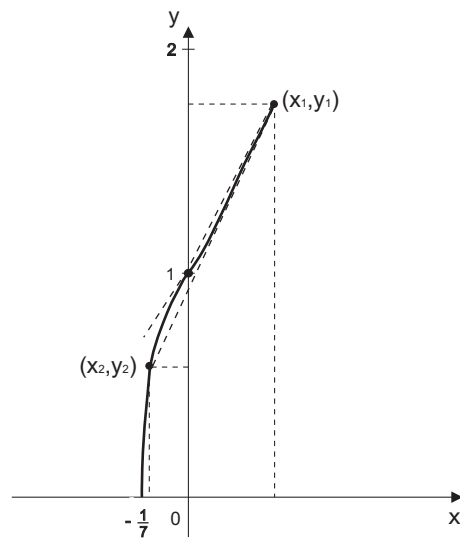
Тогда

$$k = 3; \quad x_1 = \frac{3}{11} \approx 0,2727; \quad y_1 = \frac{20}{11} \approx 1,8182;$$

$$k_1 = \frac{633}{200} = 3,165; \quad k_{ac} = 7^{\frac{2}{3}} \approx 3,659; \quad k < k_1 < k_{ac};$$

$$t_2 = -\frac{4692000}{12578533} \approx -0,3730; \quad x_2 \approx -0,1003; \quad y_2 \approx 0,6376.$$

На рис.3 приведена кривая (2) при $a = 7$ без нижней ее части, которая симметрична верхней относительно точки $(-\frac{1}{7}, 0)$.

Рис.3. Итерация касательной при $a = 7$.

Пример 4. $a = -\frac{4}{5} = -0,8$.

Тогда

$$k = \frac{2}{5}; \quad x_1 = 5; \quad y_1 = 3; \quad k_1 = \frac{14}{15} \approx 0,9333; \quad k_{ac} = \sqrt[3]{\frac{16}{25}} \approx 0,86;$$

$$t_2 = -\frac{270}{73}; \quad x_2 = \frac{95}{73} \approx 1,3014; \quad y_2 = -\frac{33}{73} \approx -0,4521.$$

Записав левую часть уравнения (2) в виде $F(x, y, a) \equiv (ax+1)(ax^2+2x+1)-y^3$, легко проверить, что $F\left(\frac{95}{73}, -\frac{33}{73}, -\frac{4}{5}\right) = 0$.

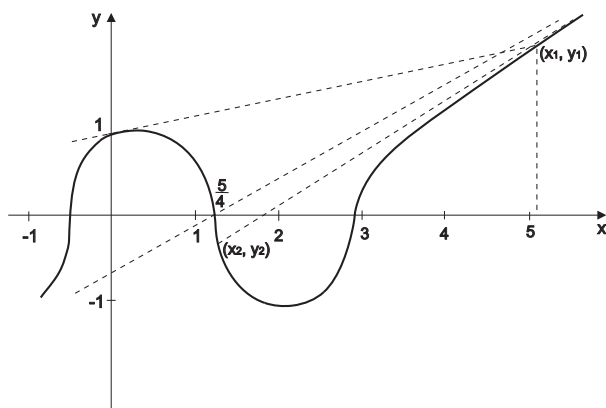


Рис.4. Итерация касательной при $a = -\frac{4}{5}$.

Пример 5. $a = 0$.

Кривая здесь имеет вид $2x + 1 - y^3 = 0$, т. е. $y = \sqrt[3]{2x+1}$. Она существенно отличается от кривых семейства (2), см. п.2. Тем не менее, к ней применим метод итерации касательных, причем вычисления на первых трех шагах итерации, которые мы здесь приводим, особенно легкие. Вычислять k_1 в этом примере удобно по формуле (13), а k_2 — по аналогичной ей. Получим:

$$k = \frac{a+2}{3} = \frac{2}{3}; \quad x_1 = -\frac{9}{2}; \quad y_1 = -2;$$

$$k_1 = \frac{2}{3y_1^2} = \frac{1}{6}; \quad t_2 = -\frac{3y_1}{k_1} = 36;$$

$$x_2 = t_2 + x_1 = \frac{63}{2}; \quad y_2 = k_1 t_2 + y_1 = 4;$$

$$k_2 = \frac{2}{3y_2^2} = \frac{1}{24}; \quad t_3 = -\frac{3y_2}{k_2} = -288;$$

$$x_3 = t_3 + x_2 = -\frac{513}{2}; \quad y_3 = k_2 t_3 + y_2 = -8;$$

Проверка: $2x_3 + 1 = -512 = y_3^3$.

На рис.5 изображена кривая при $a = 0$, т. е. график функции $y = \sqrt[3]{2x+1}$, а также касательная на первом шаге. Касательные на втором и третьем шагах не изображены на этом рисунке из-за больших x_2 и $|x_3|$.

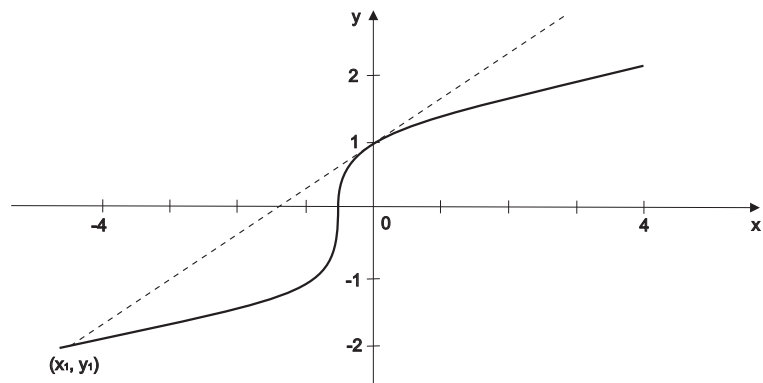


Рис.5. Итерация касательной при $a = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рыжий В.С. О примере Ферма итерации касательных в диофантовом уравнении. // Universitates: Наука и просвещение. – Харьков, – 2008. – **2**. – С. 54–58.
2. Диофант. Арифметика. / Под ред. и с коммент. И.Г. Башмаковой. – М.: Наука, 1974. – 328 с.
3. Башмакова И.Г., Славутин Е.И. История диофантова анализа от Диофанта до Ферма. – М.: Наука, 1984. – 266 с.
4. Ферма П. Исследования по теории чисел и диофантову анализу/ Под ред. И.Г. Башмаковой. – М.: Наука, 1992. – 320 с.
5. Башмакова И.Г. Диофант и диофантовы уравнения. – М.: Наука, 1972. – 68 с.

Статья получена: 5.09.2011; окончательный вариант: 3.10.2011;
принята: 12.10.2011.