Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.948 № 931, 2010, с.33–48

О спектральных функциях полиномиальных последовательностей

С.М. Загороднюк

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина,
пл. Свободы, 4, 61077, Харьков, Украина
Sergey.M.Zagorodnyuk@univer.kharkov.ua

В данной работе мы описываем множество всех спектральных функций векторной полиномиальной последовательности. Установлены необходимые и достаточные условия для того, чтобы заданная матрица-функция была спектральной функцией. Получены необходимые и достаточные условия на матрицу-функцию для того, чтобы эта функция была корреляционной функцией векторной полиномиальной последовательности. Также получен критерий в терминах корреляционной функции для произвольного набора элементов гильбертового пространства с тем, чтобы этот набор был векторной полиномиальной последовательностью.

Загороднюк С.М., **Про спектральні функції поліноміальних послідовностей.** В цій роботі ми описуємо множину всіх спектральних функцій векторної поліноміальної послідовності. Встановлені необхідні і достатні умови для того, щоб задана матриця-функція була спектральною функцією. Одержані необхідні і достатні умови на матрицю-функцію для того, щоб ця функція була кореляційною функцією векторної поліноміальної послідовності. Також одержано критерій в термінах кореляційної функції для довільного набору елементів гільбертового простору для того, щоб цей набір був векторною поліноміальною послідовністю.

S.M. Zagorodnyuk, **On spectral functions of polynomial sequences.** In this paper we describe a set of all spectral functions of a vector polynomial sequence. The necessary and sufficient conditions for a given matrix-valued function to be a spectral function are established. The necessary and sufficient conditions for a given matrix-valued function to be the correlation function of a vector polynomial sequence are obtained. A criteria in terms of the correlation function for an arbitrary set of elements of a Hilbert space to be a vector polynomial sequence is obtained, as well.

2000 Mathematics Subject Classification 42C05, 33C45, 60G12.

Введение

Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ в гильбертовом пространстве H. Эта последовательность называется полиномиальной, если найдется (хотя бы один) самосопряженный оператор A в H и набор ортогональных многочленов на вещественной оси $\{p_n(\lambda)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, такие, что последовательность допускает представление

$$x_n = p_n(A)x_0 = \int_{\mathbb{R}} p_n(\lambda)dE_\lambda x_0, \qquad n\in\mathbb{Z}_+, \tag{1}$$

где $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ является ортогональным разложением единицы оператора A. Напомним, что набор вещественных многочленов $\{p_n(\lambda)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, где $\deg p_n = n$ и p_n имеет положительный старший коэффициент, называется системой ортогональных многочленов на вещественной оси относительно $\sigma(x)$, если выполняются соотношения:

$$\int_{\mathbb{R}} p_n(\lambda)p_m(\lambda)d\sigma(\lambda) = 0, \qquad n,m\in\mathbb{Z}_+ :\ n\neq m, \tag{2}$$

где $\sigma(\lambda)$ - неубывающая функция ограниченной вариации на $\mathbb{R}$. Отметим, что ортогональные многочлены удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\frac{1}{a_n}\left(c_{n-1}p_{n-1}(\lambda) - b_np_n(\lambda) + c_np_{n+1}(\lambda)\right) = \lambda p_n(\lambda), \qquad n\in\mathbb{Z}_+, \tag{3}$$

где $a_n > 0,\ b_n\in\mathbb{R},\ c_n > 0\ (n\in\mathbb{Z}_+)$, являются некоторыми числовыми последовательностями, а $c_{-1} = 0,\ p_{-1} = 0$. В частности, для многочленов Чебышева 1-го рода $T_n(\lambda) = \cos(n\arccos\lambda)$, $n\in\mathbb{Z}_+$, $\lambda\in[-1,1]$, выполнено соотношение (3) с $a_n = 1$, $b_n = 0$, $c_n = \frac{1}{2}$ $(n\in\mathbb{Z}_+)$.

Примером полиномиальной последовательности является полубесконечная цепочка, описывающая полубесконечный одномерный гармонический кристалл (см. [1],[2] относительно этого и других примеров). Предистория возникновения последовательностей вида (1) описана в статье [2], см. также ссылки в ней. В работе [3] для полиномиальных последовательностей было получено разложение Вольда. В [1] мы рассмотрели многомерные (векторные) полиномиальные последовательности. Напомним основные определения.

Определение 1 *Две полиномиальные последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ и $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ в гильбертовом пространстве H, отвечающие одной и той же системе многочленов $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^\infty$ в представлении (1), называются* **полиномиально связанными**, *если их взаимная корреляционная функция $R_{n,m} := (x_n, u_m)_H$ удовлетворяет соотношению*

$$\frac{1}{a_n}\left(c_{n-1}R_{n-1,m} - b_nR_{n,m} + c_nR_{n+1,m}\right) =$$

$$= \frac{1}{a_m}\left(c_{m-1}R_{n,m-1} - b_m R_{n,m} + c_m R_{n,m+1}\right), \qquad n,m \in \mathbb{Z}_+, \tag{4}$$

где $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}, \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *из рекуррентного соотношения (3),* $c_{-1} = 0$, $R_{-1,m} = R_{n,-1} = 0$ $(n, m \in \mathbb{Z}_+)$.

Определение 2 *Набор из* N *полиномиальных последовательностей*

$$\{x_n^1\}_{n\in\mathbb{Z}_+}, \{x_n^2\}_{n\in\mathbb{Z}_+}, ..., \{x_n^N\}_{n\in\mathbb{Z}_+} \tag{5}$$

в гильбертовом пространстве H $(N \in \mathbb{N})$*, отвечающих одной и той же системе многочленов* $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ *в представлении (1), полиномиально связанных между собой, будем называть* N*-мерной (многомерной, векторной) полиномиальной последовательностью и изображать в виде вектор-столбца*

$$\vec{x}_n = (x_n^k)_{k=1}^N.$$

Примером N-мерной полиномиальной последовательности является полубесконечный гармонический кристалл, в котором соседние ряды атомов слабо взаимодействуют друг с другом (квазиодномерное вещество, см. [4]).

Пусть задана некоторая N-мерная полиномиальная последовательность $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ в гильбертовом пространстве H. Мы будем использовать следующие обозначения:

$$H_{\vec{x}} = \mathrm{span}\{x_n^r; n \in \mathbb{Z}_+, 1 \le r \le N\}, \quad L_{\vec{x}} = \mathrm{Lin}\{x_n^r; n \in \mathbb{Z}_+, 1 \le r \le N\}. \tag{6}$$

Подпространство $H_{\vec{x}}$ называем *пространством значений* N*-мерной полиномиальной последовательности* $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$. Определим оператор

$$A_{\vec{x}}x = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{j,k}\frac{1}{a_k}\left(c_{k-1}x_{k-1}^j - b_k x_k^j + c_k x_{k+1}^j\right),$$

$$x \in L_{\vec{x}}, \quad x = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{j,k}x_k^j, \ \alpha_{j,k} \in \mathbb{C}. \tag{7}$$

При выборе элементов из линейных оболочек здесь и далее суммы будут подразумеваться конечными. В [1] было показано, что это определение не зависит от выбора представления элемента x и является корректным. Оператор $A_{\vec{x}}$ является симметрическим оператором в пространстве значений последовательности $H_{\vec{x}}$ с плотной областью определения $L_{\vec{x}}$. Его дефектные числа не превосходят числа N. Оператор $A_{\vec{x}}$ мы называем оператором N-мерной полиномиальной последовательности $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$. Справедливо следующее представление:

$$x_n^r = p_n(A_{\vec{x}})x_0^r, \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \ 1 \le r \le N. \tag{8}$$

Если $\widetilde{A}$ есть некоторое самосопряженное расширение $A_{\vec{x}}$ в гильбертовом пространстве $\widetilde{H} \supseteq H_{\vec{x}}$, то

$$x_n^r = p_n(\widetilde{A}) x_0^r, \qquad n \in \mathbb{Z}_+,\ 1 \leq r \leq N. \tag{9}$$

Более того, всевозможные самосопряженные расширения оператора последовательности $A_{\vec{x}}$ дают все самосопряженные операторы $\widehat{A}$, для которых имеет место спектральное представление вида (9). Запишем соотношение (9) в векторном виде:

$$\vec{x}_n = p_n(\widetilde{A})\vec{x}_0 = \int_{\mathbb{R}} p_n(\lambda) d\widetilde{E}_\lambda \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \\ \vdots \\ x_0^r \end{pmatrix}, \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{10}$$

где $\{\widetilde{E}_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ является ортогональным разложением единицы оператора $\widetilde{A}$, и понимается, что операторы $p_n(\widetilde{A})$ и $\widetilde{E}_\lambda$ действуют на каждую компоненту вектора $\vec{x}_0$.

Определение 3 *Пусть $A_{\vec{x}}$ является оператором некоторой N-мерной полиномиальной последовательности $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ в гильбертовом пространстве H. Пусть $\widetilde{A}$ является самосопряженным расширением $A_{\vec{x}}$ в гильбертовом пространстве $\widetilde{H} \supseteq H_x$. Матрицу-функцию*

$$F(\lambda) = (F_{j,k}(\lambda))_{j,k=1}^N = \left((P_{H_{\vec{x}}}^{\widetilde{H}} \widetilde{E}_\lambda x_0^j, x_0^k)_H \right)_{j,k=1}^N, \tag{11}$$

где $\{\widetilde{E}_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ является непрерывным слева ортогональным разложением единицы оператора $\widetilde{A}$, будем называть **спектральной матрицей-функцией N-мерной полиномиальной последовательности** $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$.

Функцию

$$K_{n,m} = (K_{n,m}^{r,s})_{r,s=1}^N, \qquad n, m \in \mathbb{Z}_+,$$

где $K_{n,m}^{r,s} := (x_n^r, x_m^s)_H$, называем (матричной) корреляционной функцией N-мерной полиномиальной последовательности $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$. Для нее имеет место представление:

$$K_{n,m} = \int_{\mathbb{R}} p_n(\lambda) p_m(\lambda) dF(\lambda), \qquad n, m \in \mathbb{Z}_+, \tag{12}$$

где F - спектральная матрица-функция последовательности.

Для случая многомерной стационарной последовательности в абстрактном гильбертовом пространстве, хорошо известна теорема Х. Крамера о необходимых и достаточных условиях на матрицу-функцию для того, чтобы она была спектральной функцией последовательности (см. [5],[6]). Аналог этой теоремы будет получен для случая N-мерной полиномиальной последовательности. По аналогии со стационарным случаем приводятся условия на матрицу-функцию для того, чтобы она была корреляционной функцией векторной полиномиальной последовательности. Для векторной полиномиальной последовательности возникает задача, для которой нет аналога в теории стационарных последовательностей: описание всех спектральных функций заданной векторной полиномиальной последовательности. Используя результаты А.В. Штрауса об обобщенных резольвентах симметрических операторов, эта задача полностью решается. Также мы установим необходимые и достаточные условия на корреляционную функцию последовательности для того, чтобы она была векторной полиномиальной последовательностью.

Обозначения. Как обычно, мы обозначаем $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ множества комплексных, вещественных, целых и натуральных чисел, соответственно, а также $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$. Алгебру всех комплексных $n \times n$ матриц мы будем обозначать $\mathbb{C}_{n\times n}$, $n \in \mathbb{N}$. Пространство n-мерных комплексных векторов $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, будет обозначаться $\mathbb{C}_n$, $n \in \mathbb{N}$. Если $a \in \mathbb{C}_n$, то a^* обозначает комплексно сопряженный вектор. Множество комплексных многочленов будем обозначать $\mathbb{P}$.

Посредством $(\cdot,\cdot)_H$, $||\cdot||_H$ мы обозначаем скалярное произведение и норму в некотором гильбертовом пространстве H. Если это не приводит к недоразумению, индекс H мы не пишем. Посредством $\operatorname{Lin} M$ и $\operatorname{span} M$ обозначены линейная оболочка и замкнутая линейная оболочка элементов множества M в H, соответственно. $\overline{M}$ означает замыкание множества $M \subseteq H$ в метрике H. Если L - подпространство H, то P^H_L обозначает оператор ортогонального проектирования в H на подпространство L. Для линейного оператора A в H мы обозначаем $D(A)$ его область определения, и посредством A^* обозначается сопряженный оператор, если он существует. Посредством $\overline{A}$ обозначается замыкание оператора A, если оно существует. Если для A существует обратный оператор, то мы обозначаем его A^{-1}. Если A ограничен, то $\|A\|$ обозначает его норму. Посредством E_H обозначается единичный оператор в H, т.е. $E_H x = x$, $x \in H$. Встречающиеся в работе гильбертовы пространства предполагаются сепарабельными.

Аналог теоремы Х. Крамера. Свойства корреляционной функции векторной полиномиальной последовательности

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1 *Для того, чтобы $\mathbb{C}_{N\times N}$-значная функция $F(\lambda) = (F_{j,k}(\lambda))^N_{j,k=1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, была спектральной функцией некоторой N-мерной полиномиальной последовательности необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

A) *$F(\lambda)$ является неубывающей матрицей-функцией на $\mathbb{R}$;*

B) *$F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = K$, где K является неотрицательной конечной матрицей;*

C) $\int_{\mathbb{R}} \lambda^{2n} dF_{j,j}(\lambda) < \infty$, *для всех* $n \in \mathbb{Z}_+$, $j = 1, 2, ..., N$.

Если условия A), B) ,C) *выполнены, то требуемая* N*-мерная полиномиальная последовательность* $\vec{x}_n = p_n(A)\vec{x}_0$, $n \in \mathbb{Z}_+$, *найдется для любой заданной системы ортогональных многочленов* $\{p_n(\lambda)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $F(\lambda) = (F_{j,k}(\lambda))_{j,k=1}^N$ является спектральной функцией некоторой N-мерной полиномиальной последовательности $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ в гильбертовом пространстве H. По определению спектральной функции это значит, что выполнено (11), где $\{\widetilde{E}_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ является непрерывным слева ортогональным разложением единицы оператора $\widetilde{A}$. При этом оператор $\widetilde{A}$ является некоторым самосопряженным расширением в гильбертовом пространстве $\widetilde{H} \supseteq H$ оператора последовательности $A_{\vec{x}}$. Прежде всего заметим, что

$$\lim_{\lambda\to+\infty} F_{j,k}(\lambda) = \lim_{\lambda\to+\infty} (\widetilde{E}_\lambda x_0^j, x_0^k)_{\widetilde{H}} = (x_0^j, x_0^k)_H;$$

$$\lim_{\lambda\to-\infty} F_{j,k}(\lambda) = \lim_{\lambda\to-\infty} (\widetilde{E}_\lambda x_0^j, x_0^k)_{\widetilde{H}} = 0.$$

Полагая $K := ((x_0^j, x_0^k)_H)_{j,k=1}^N$, мы заключаем, что условие B) в формулировке теоремы выполнено. Для произвольного вектора $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N) \in \mathbb{C}_N$, и вещественных чисел $\alpha, \beta :\ \alpha \le \beta$, мы можем записать

$$\vec{\xi}(F(\beta) - F(\alpha))\vec{\xi}^* = \sum_{\mu,\nu=1}^N (F_{\mu,\nu}(\beta) - F_{\mu,\nu}(\alpha))\xi_\mu\overline{\xi_\nu}$$

$$= \sum_{\mu,\nu=1}^N \xi_\mu\overline{\xi_\nu}((\widetilde{E}_\beta - \widetilde{E}_\alpha)x_0^\mu, x_0^\nu)_{\widetilde{H}} = \left((\widetilde{E}_\beta - \widetilde{E}_\alpha)\sum_{\mu=1}^N \xi_\mu x_0^\mu, \sum_{\nu=1}^N \xi_\nu x_0^\nu\right)_{\widetilde{H}} \ge 0.$$

Значит, условие A) теоремы также выполнено. Из равенства (12) при $n = 0$ получаем, что

$$\int_{\mathbb{R}} p_m(\lambda) dF_{j,j}(\lambda) = \frac{1}{p_0} K_{0,m}^{j,j} < \infty, \qquad m \in \mathbb{Z}_+,\ j = 1, 2, ..., N. \tag{13}$$

Поскольку многочлен p_m имеет степень m, то многочлен λ^{2n} можно разложить в линейную комбинацию многочленов $p_0, p_1, ..., p_{2n}$:

$$\lambda^{2n} = \sum_{r=1}^{2n} \alpha_r p_r(\lambda), \qquad \alpha_r \in \mathbb{C}.$$

Следовательно, условие C) теоремы также является выполненным.

Достаточность. Пусть некоторая $\mathbb{C}_{N\times N}$-значная функция $F(\lambda) = (F_{j,k}(\lambda))_{j,k=1}^N$, $\lambda \in \mathbb{R}$, удовлетворяет условиям A),B) и C) из формулировки теоремы. Согласно хорошо известной теореме Наймарка (см. [7]), найдется ортогональное разложение единицы $\{\widehat{E}_\lambda\}$ в некотором гильбертовом пространстве $\widehat{H}$ и линейное ограниченное отображение R пространства $\mathbb{C}_N$ в $\widehat{H}$, такие, что

$$F(\lambda) = R^* \widehat{E}_\lambda R, \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

Здесь R^* обозначает сопряженный оператор.
Пусть $\{\vec{e}_j\}_{j=1}^N$, $\vec{e}_j = (\delta_{j,k})_{k=1}^N$, - стандартный базис в $\mathbb{C}_N$. Положим

$$x_0^j = R\vec{e}_j, \qquad j = 1, 2, ..., N. \tag{15}$$

Тогда

$$F_{j,k}(\lambda) = (\vec{e}_j F(\lambda), \vec{e}_k)_{\mathbb{C}_N} = (R^* \widehat{E}_\lambda R \vec{e}_j, \vec{e}_k)_{\mathbb{C}_N} =$$

$$= (\widehat{E}_\lambda R\vec{e}_j, R\vec{e}_k)_{\widehat{H}} = (\widehat{E}_\lambda x_0^j, x_0^k), \quad 1 \le j, k \le N. \tag{16}$$

Рассмотрим самосопряженный оператор

$$\widehat{A} = \int_{\mathbb{R}} \lambda d\widehat{E}_\lambda. \tag{17}$$

В силу соотношения (16) и условия C) теоремы, на векторах x_0^j, $j = 1, 2, ..., N$ определены все целые неотрицательные степени оператора $\widehat{A}$. Пусть $\{p_n(\lambda)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ - произвольная система ортогональных многочленов на вещественной оси. Положим

$$x_n^k = p_n(\widehat{A})x_0^k, \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \quad k = 1, 2, ..., N. \tag{18}$$

Для каждого фиксированного k, $1 \le k \le N$, последовательность $\{x_n^k\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ является полиномиальной, что следует прямо из определения полиномиальной последовательности. Проверим, что эти последовательности являются полиномиально связанными. Взаимная корреляционная функция имеет вид

$$R_{x^k,x^s}(n,m) = (x_n^k, x_m^s)_{\widehat{H}} = (p_n(\widehat{A})x_0^k, p_m(\widehat{A})x_0^s)_{\widehat{H}} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} p_n(\lambda)p_m(\lambda)d(\widehat{E}_\lambda x_0^k, x_0^s)_{\widehat{H}} = \int_{\mathbb{R}} p_n(\lambda)p_m(\lambda)dF_{k,s}(\lambda), \quad k = 1, 2, ..., N. \tag{19}$$

Воспользуемся теперь тем, что ортогональные многочлены удовлетворяют рекуррентному соотношению вида (3). Умножая обе части соотношения (3) на $p_m(\lambda)$ и интегрируя по $dF_{k,s}(\lambda)$, мы получим

$$\frac{1}{a_n}\left(c_{n-1}R_{x^k,x^s}(n-1,m) - b_n R_{x^k,x^s}(n,m) + c_n R_{x^k,x^s}(n+1,m)\right) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \lambda p_n(\lambda)p_m(\lambda)dF_{k,s}(\lambda). \tag{20}$$

Меняя в последнем соотношении местами n и m, и пользуясь тем, что $R_{x^k,x^s}(n,m) = R_{x^k,x^s}(m,n)$, мы получим соотношение

$$\frac{1}{a_m}\left(c_{m-1}R_{x^k,x^s}(n,m-1) - b_m R_{x^k,x^s}(n,m) + c_m R_{x^k,x^s}(n,m+1)\right) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \lambda p_n(\lambda) p_m(\lambda) dF_{k,s}(\lambda). \qquad (21)$$

Сравнивая последние два соотношения, приходим к выводу, что выполнено соотношение (4). Значит последовательности $\{x_n^k\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ и $\{x_m^s\}_{m\in\mathbb{Z}_+}$ являются полиномиально связанными. Следовательно, векторная последовательность $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, составленная из последовательностей $\{x_n^k\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, является полиномиальной. Из соотношения (16) следует, что $F(\lambda)$ является ее спектральной функцией. $\square$

Используя наши результаты о свойствах оператора полиномиальной последовательности в [1], нетрудно получить следующее усиление критерия полиномиальности последовательности из [2, Теорема 1, с. 9].

Теорема 2 *Пусть задана последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ элементов гильбертова пространства H. Эта последовательность является полиномиальной в H тогда и только тогда, когда корреляционная функция $K_{n,m}$ последовательности удовлетворяет следующим разностным соотношениям:*

$$\frac{1}{a_n}\left(c_{n-1}K_{n-1,m} - b_n K_{n,m} + c_n K_{n+1,m}\right) =$$

$$= \frac{1}{a_m}\left(c_{m-1}K_{n,m-1} - b_m K_{n,m} + c_m K_{n,m+1}\right), \qquad n,m \in \mathbb{Z}_+, \qquad (22)$$

где $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}, \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ – некоторые последовательности положительных чисел, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ – некоторая последовательность вещественных чисел, $c_{-1} = 0$ и $K_{-1,m} = K_{n,-1} = 0$ $(n,m \in \mathbb{Z}_+)$.

Доказательство. Необходимость следует из необходимости вышеупомянутой теоремы 1 из [2, с. 9]. Из достаточности той же теоремы следует, что последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ является полиномиальной в некотором гильбертовом пространстве $\widetilde{H} \supseteq H$. Пусть $H_x = \mathrm{span}\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ является пространством значений последовательности, а A_x - оператор последовательности. Как было показано в [1] и упомянуто выше во введении, всевозможные самосопряженные расширения $\widehat{A} \supseteq A_x$ во всевозможных гильбертовых пространствах $\widehat{H} \supseteq H$ удовлетворяют соотношению

$$x_n = p_n(\widehat{A})x_0, \qquad n,m \in \mathbb{Z}_+. \qquad (23)$$

Таким образом, последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ является полиномиальной в каждом таком пространстве $\widehat{H} \supseteq H$. С другой стороны, в [1] было показано, что оператор (одномерной) полиномиальной последовательности является симметрическим оператором с равными дефектными числами (нулевыми или равными единице). Значит, у оператора последовательности A_x найдется самосопряженное расширение $\widehat{A}$ в самом пространстве H. Значит, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ является полиномиальной последовательностью в H. $\square$

Последняя теорема допускает обобщение на случай векторных полиномиальных последовательностей. Именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 3 *Пусть задан набор последовательностей*

$$\{x_n^1\}_{n\in\mathbb{Z}_+}, \{x_n^2\}_{n\in\mathbb{Z}_+}, ..., \{x_n^N\}_{n\in\mathbb{Z}_+} \tag{24}$$

в гильбертовом пространстве H ($N \in \mathbb{N}$). Для того, чтобы эти последовательности образовывали N-мерную полиномиальную последовательность в гильбертовом пространстве H, необходимо и достаточно, чтобы взаимная корреляционная функция $R_{x^k,x^s}(n,m) := (x_n^k, x_m^s)_H$ удовлетворяла следующим разностным соотношениям:

$$\frac{1}{a_n}\left(c_{n-1}R_{x^k,x^s}(n-1,m) - b_n R_{x^k,x^s}(n,m) + c_n R_{x^k,x^s}(n+1,m)\right) =$$

$$= \frac{1}{a_m}\left(c_{m-1}R_{x^k,x^s}(n,m-1) - b_m R_{x^k,x^s}(n,m) + c_m R_{x^k,x^s}(n,m+1)\right),$$

$$n,m \in \mathbb{Z}_+,\ k,s = 1,2,...,N, \tag{25}$$

где $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}, \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ - некоторые последовательности положительных чисел, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ - некоторая последовательность вещественных чисел, $c_{-1} = 0$ и $R_{x^k,x^s}(-1,m) = R_{x^k,x^s}(n,-1) = 0$ ($n,m \in \mathbb{Z}_+$).

Доказательство. *Необходимость.* Пусть последовательности (24) образуют N-мерную полиномиальную последовательность в некотором гильбертовом пространстве H. В таком случае, последовательности $\{x_n^k\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, $1 \le k \le N$, будут одномерными полиномиальными последовательностями с одной и той же системой многочленов. Следовательно, соотношение (25) при $k = s$ будет следовать из предыдущей теоремы. При этом, коэффициенты a_n, b_n, c_n являются коэффициентами рекуррентного соотношения для многочленов (см. доказательство необходимости теоремы 1 в [2]). Справедливость соотношения (25) при $k \ne s$ непосредственно следует из определения полиномиально связанных последовательностей.
Достаточность. Пусть задан набор последовательностей (24) в некотором гильбертовом пространстве H, и взаимная корреляционная функция последовательностей удовлетворяет соотношению (25). В силу теоремы 2 мы заключаем, что последовательности (24) являются полиномиальными последовательностями в H. При этом система ортогональных многочленов для каждой из них может быть выбрана одной и той же, тем способом, как это было сделано в доказательстве достаточности теоремы 1 в [2]. (Заметим, что полиномиальная последовательность, вообще говоря, может допускать

представления с различными системами ортогональных многочленов. Очевидный пример - нулевая последовательность). Эти выбранные многочлены удовлетворяют соотношению (3). Соотношение (25) при $k \neq s$ означает, что последовательности $\{x_n^k\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ и $\{x_n^s\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ полиномиально связаны. Значит последовательности (24) образуют N-мерную полиномиальную последовательность в H. $\square$

Справедлива следующая теорема (см, например, [8, С.361-363]).

Теорема 4 *Пусть задана некоторая полубесконечная комплексная матрица* $\Gamma = (\gamma_{k,l})_{k,l=0}^{\infty}$, $\gamma_{k,l} \in \mathbb{C}$. *Если выполнено соотношение*

$$(\gamma_{k,l})_{k,l=0}^{r} \geq 0, \qquad r \in \mathbb{Z}_+, \tag{26}$$

то найдется гильбертово пространство H *и набор элементов* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *в* H *такие, что*

$$(x_n, x_m)_H = \gamma_{n,m}, \qquad n, m \in \mathbb{Z}_+. \tag{27}$$

При этом $\mathrm{span}\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+} = H$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное бесконечномерное линейное пространство V. Например, можно взять пространство полубесконечных комплексных последовательностей

$$(u_n)_{n\in\mathbb{Z}_+} = (u_0, u_1, u_2, \ldots), \qquad (u_n \in \mathbb{C}).$$

Рассмотрим произвольные линейно независимые элементы x_j, $j \in \mathbb{Z}_+$ этого пространства. В случае выбора пространства последовательностей, в качестве x_j можно взять последовательность, у которой j-я компонента равна единице, а остальные равны нулю ($j \in \mathbb{Z}_+$). Обозначим $V_0 = \mathrm{Lin}\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$. Определим следующий функционал:

$$[x, y] = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}_+} \gamma_{n,m} a_n \overline{b_m}, \tag{28}$$

для $x, y \in V_0$,

$$x = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} a_n x_n, \quad y = \sum_{m\in\mathbb{Z}_+} b_m x_m, \quad a_n, b_m \in \mathbb{C}.$$

Здесь все суммы подразумеваются конечными. Пространство V_0 с функционалом $[\cdot, \cdot]$ является квазигильбертовым. Проводя факторизацию и пополняя его ([9]) мы получим гильбертово пространство H и набор элементов $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ (мы сохранили для класса эквивалентности, порожденного элементом x_n, обозначение x_n) в H такие, что выполнено (27). Если $\mathrm{span}\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+} \neq H$, тогда требуемым пространством будет $\mathrm{span}\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$. $\square$

Хорошо известны условия на матрицу-функцию для того, чтобы она была корреляционной функцией многомерного стационарного процесса [6].

Следующая теорема дает условия на матрицу-функцию с тем, чтобы она была корреляционной функцией некоторой векторной полиномиальной последовательности.

Теорема 5 *Для того, чтобы $\mathbb{C}_{N\times N}$-значная функция $K_{n,m} = (K^{r,s}_{n,m})^N_{r,s=1}$, $n,m \in \mathbb{Z}_+$, была корреляционной функцией некоторой N-мерной полиномиальной последовательности необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*
A) *Полубесконечная блочная матрица $K = (K_{n,m})^\infty_{n,m=0} = (\gamma_{k,l})^\infty_{k,l=0}$, $\gamma_{k,l} \in \mathbb{C}$, имеет все неотрицательные главные угловые миноры, т.е. выполнено соотношение (26);*
B) *Выполнено соотношение*

$$\frac{1}{a_n}\left(c_{n-1}K^{r,s}_{n-1,m} - b_nK^{r,s}_{n,m} + c_nK^{r,s}_{n+1,m}\right) =$$
$$= \frac{1}{a_m}\left(c_{m-1}K^{r,s}_{n,m-1} - b_mK^{r,s}_{n,m} + c_mK^{r,s}_{n,m+1}\right),$$
$$n,m \in \mathbb{Z}_+,\ r,s = 1,2,...,N, \tag{29}$$

где $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ - некоторые последовательности положительных чисел, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ - некоторая последовательность вещественных чисел, $c_{-1} = 0$ и $K^{r,s}_{-1,m} = K^{r,s}_{n,-1} = 0$ $(n,m \in \mathbb{Z}_+)$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $K_{n,m} = (K^{r,s}_{n,m})^N_{r,s=1}$, $n,m \in \mathbb{Z}_+$, является корреляционной функцией некоторой N-мерной полиномиальной последовательности $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ в гильбертовом пространстве H. В этом случае, согласно определению корреляционной функции, записываем

$$K^{r,s}_{n,m} = (x^r_n, x^s_m)_H, \qquad r,s = 1,2,...,N;\ n,m \in \mathbb{Z}_+,$$

и для произвольного набора векторов $\vec{\xi}_n = (\xi_{n,1}, \xi_{n,2}, ..., \xi_{n,N}) \in \mathbb{C}_N$, $n = 0,1,...,l$, $l \in \mathbb{Z}_+$, справедливо

$$\sum_{n,m=0}^{l} \vec{\xi}_n K_{n,m} \vec{\xi}^*_m = \sum_{n,m=0}^{l}\sum_{r,s=1}^{N} \xi_{n,r}\overline{\xi_{m,s}}(x^r_n, x^s_m) =$$
$$= \left(\sum_{n=0}^{l}\sum_{r=1}^{N}\xi_{n,r}x^r_n, \sum_{m=0}^{l}\sum_{s=1}^{N}\xi_{m,s}x^s_m\right) = \left\|\sum_{n=0}^{l}\sum_{r=1}^{N}\xi_{n,r}x^r_n\right\|^2 \geq 0.$$

Это означает, что для произвольного $l \in \mathbb{Z}_+$ блочная матрица $(K_{n,m})^l_{n,m=0}$ является неотрицательной. Следовательно, условие A) из формулировки теоремы выполнено. Справедливость условия B) непосредственно следует из теоремы 3.
Достаточность. Пусть для некоторой $\mathbb{C}_{N\times N}$-значной функции $K_{n,m} = (K^{r,s}_{n,m})^N_{r,s=1}$, $n,m \in \mathbb{Z}_+$, выполнены условия A) и B) из формулировки

теоремы и $K = (K_{n,m})_{n,m=0}^{\infty} = (\gamma_{k,l})_{k,l=0}^{\infty}$, $\gamma_{k,l} \in \mathbb{C}$. Согласно теореме 4 найдутся гильбертово пространство H и набор элементов $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ в этом пространстве такие, что

$$\gamma_{k,l} = (y_k, y_l)_H \qquad k, l \in \mathbb{Z}_+. \tag{30}$$

Из структуры блочной матрицы K видно, что

$$K_{n,m}^{r,s} = \gamma_{nN+r-1,mN+s-1} \qquad n, m \in \mathbb{Z}_+,\ 1 \le r, s \le N. \tag{31}$$

Определим следующие элементы:

$$x_n^r = y_{nN+r-1} \qquad n \in \mathbb{Z}_+,\ 1 \le r \le N. \tag{32}$$

Тогда

$$K_{n,m}^{r,s} = (x_n^r, x_m^s)_H \qquad n, m \in \mathbb{Z}_+,\ 1 \le r, s \le N. \tag{33}$$

Таким образом, функция $K_{n,m}^{r,s}$, $n, m \in \mathbb{Z}_+$, является взаимной корреляционной функцией последовательностей $\{y_n^r\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ и $\{y_n^s\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ $(1 \le \le r, s \le N)$. Поскольку выполнено условие B) теоремы, то, применяя теорему 3, мы заключаем, что последовательности $\{y_n^r\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, $r = 1, 2, ..., N$, образуют N-мерную полиномиальную последовательность в H. При этом, согласно (33) функция $K_{n,m}$ является матричной корреляционной функцией этой последовательности. $\Box$

Спектральные функции

Из определения спектральной матрицы-функции векторной полиномиальной последовательности видно, что они порождаются спектральными функциями оператора последовательности. Используя результаты о спектральных функциях симметрического оператора, можно явно описать все спектральные функции векторной полиномиальной последовательности.

Пусть задана N-мерная полиномиальная последовательность $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, представляющая собой набор последовательностей

$$\{x_n^1\}_{n\in\mathbb{Z}_+}, \{x_n^2\}_{n\in\mathbb{Z}_+}, ..., \{x_n^N\}_{n\in\mathbb{Z}_+} \tag{34}$$

в некотором гильбертовом пространстве H $(N \in \mathbb{N})$. Пусть $A_{\vec{x}}$ является оператором последовательности в пространстве последовательности $H_{\vec{x}}$.
Пусть $\widehat{A}$ является произвольным самосопряженным расширением оператора последовательности $A_{\vec{x}}$ в некотором гильбертовом пространстве $\widehat{H} \supseteq \supseteq H_{\vec{x}}$. Обозначим $R_z(\widehat{A})$ резольвенту $\widehat{A}$ и $\{\widehat{E}_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ его непрерывное слева ортогональное разложение единицы. Напомним, что операторнозначная функция $\mathbf{R}_z = P_H^{\widehat{H}} R_z(\widehat{A})$ называется обобщенной резольвентой $A_{\vec{x}}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Функция $\mathbf{E}_\lambda = P_H^{\widehat{H}} \widehat{E}_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, является непрерывной слева спектральной

функцией симметрического оператора $A_{\vec{x}}$. Между обобщенными резольвентами и спектральными функциями (непрерывными слева или нормированными некоторым другим образом) существует взаимно однозначное соответствие согласно следующему соотношению ([8]):

$$(\mathbf{R}_z f, g)_{H_{\vec{x}}} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - z} d(\mathbf{E}_\lambda f, g)_{H_{\vec{x}}}, \qquad f, g \in H_{\vec{x}},\ z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}. \tag{35}$$

Напомним некоторые определения из [10], которые нам понадобятся в дальнейшем. Пусть B – замкнутый симметрический оператор в гильбертовом пространстве H с областью определения $D(B)$, $\overline{D(B)} = H$. Обозначим $\Delta_B(\lambda) = (B - \lambda E_H)D(B)$ и $N_\lambda = N_\lambda(B) = H \ominus \Delta_B(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Рассмотрим произвольный ограниченный линейный оператор C, отображающий N_i в N_{-i}. Для

$$g = f + C\psi - \psi, \qquad f \in D(B),\ \psi \in N_i, \tag{36}$$

мы полагаем

$$B_C g = Bf + iC\psi + i\psi. \tag{37}$$

Поскольку пересечение $D(A)$, N_i и N_{-i} состоит лишь из нулевого элемента, это определение корректно. Оператор B_C называют *квазисамосопряженным расширением оператора B, определяемым оператором C.* Имеет место следующая теорема [10, Теорема 7]:

Теорема 6 *Пусть B является замкнутым симметрическим оператором в гильбертовом пространстве H с областью определения $D(B)$, $\overline{D(B)} = H$. Все обобщенные резольвенты оператора B имеют следующий вид:*

$$\mathbf{R}_\lambda = \begin{cases} (B_{F(\lambda)} - \lambda E_H)^{-1}, & \operatorname{Im}\lambda > 0 \\ (B_{F^*(\overline{\lambda})} - \lambda E_H)^{-1}, & \operatorname{Im}\lambda < 0 \end{cases}, \tag{38}$$

где $F(\lambda)$ является аналитической в $\mathbb{C}_+$ операторнозначной функцией, значениями которой являются сжатия, отображающие $N_i(B)$ в $N_{-i}(B)$ ($\|F(\lambda)\| \le 1$), и $B_{F(\lambda)}$ является квазисамосопряженным расширением B, определяемым $F(\lambda)$.

С другой стороны, любой операторнозначной функции $F(\lambda)$ с указанными свойствами отвечает, согласно соотношению (38), некоторая обобщенная резольвента оператора B.

Отметим, что соотношение (38) является взаимно однозначным [10]. Используя этот фундаментальный результат, мы приходим к следующему описанию спектральных функций векторной полиномиальной последовательности.

Теорема 7 *Пусть задана N-мерная полиномиальная последовательность $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ в некотором гильбертовом пространстве H ($N \in \mathbb{N}$). Пусть*

$A_{\vec{x}}$ является оператором последовательности в пространстве последовательности $H_{\vec{x}}$. Все матричные спектральные функции последовательности $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ имеют следующий вид

$$F(\lambda) = (F_{j,k}(\lambda))_{j,k=1}^N, \tag{39}$$

где $F_{j,k}(\lambda)$ удовлетворяют соотношению

$$\int_R \frac{1}{\lambda - z} dF_{j,k}(\lambda) = \left(\left((A_{\vec{x}})_{G(z)} - zE_{H_{\vec{x}}} \right)^{-1} x_0^j, x_0^k \right)_H, \qquad z \in \mathbb{C}_+, \tag{40}$$

где $G(z)$ является аналитической в $\mathbb{C}_+$ операторнозначной функцией, значениями которой являются сжатия, отображающие $N_i(\overline{A_{\vec{x}}})$ в $N_{-i}(\overline{A_{\vec{x}}})$ ($\|G(z)\| \leq 1$), и $A_{G(z)}$ является квазисамосопряженным расширением $\overline{A_{\vec{x}}}$, определяемым $G(z)$.

С другой стороны, произвольной операторнозначной функции $G(z)$ с упомянутыми свойствами соответствует, согласно (40), некоторая матричная спектральная функция N-мерной полиномиальной последовательности $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$.

При этом, соответствие между всеми такими операторнозначными функциями и спектральными функциями последовательности, устанавливаемое соотношением (40), взаимно однозначно.

Доказательство. Все утверждения теоремы, за исключением последнего, непосредственно следуют из определения матричной спектральной функции N-мерной полиномиальной последовательности и предыдущей теоремы.

Пусть задана N-мерная полиномиальная последовательность $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ в некотором гильбертовом пространстве H ($N \in \mathbb{N}$), и $A_{\vec{x}}$ является оператором последовательности в пространстве последовательности $H_{\vec{x}}$. Предположим, что двум различным аналитическим в $\mathbb{C}_+$ операторнозначным функциям $G_1(z)$ и $G_2(z)$, значениями которых являются сжатия, отображающие $N_i(\overline{A_{\vec{x}}})$ в $N_{-i}(\overline{A_{\vec{x}}})$, отвечает одна и та же матричная спектральная функция $F(\lambda) = (F_{j,k}(\lambda))_{j,k=1}^N$ последовательности $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$. Поскольку $G_1(z)$ и $G_2(z)$ различны, то им отвечают различные обобщенные резольвенты $\mathbf{R}_{1,z}$ и $\mathbf{R}_{2,z}$ оператора $\overline{A_{\vec{x}}}$, в соответствии с теоремой 6. Из соотношения (40) мы получаем, что

$$\left(\mathbf{R}_{1,z} x_0^j, x_0^k \right)_H = \left(\mathbf{R}_{2,z} x_0^j, x_0^k \right)_H, \qquad z \in \mathbb{C}_+,\ 1 \leq j,k \leq N. \tag{41}$$

Пусть обобщенная резольвента $\mathbf{R}_{m,z}$ порождается резольвентой $R_{m,z}$ самосопряженного оператора $\widehat{A}_m \supseteq A_{\vec{x}}$ в некотором гильбертовом пространстве $\widehat{H}_m \supseteq H_{\vec{x}}$:

$$\mathbf{R}_{m,z} = P_{H_{\vec{x}}}^{\widehat{H}_m} R_{m,z}, \qquad m = 1, 2.$$

Обозначим $L_N := \mathrm{Lin}\{x_0^j\}_{1\leq j\leq N}$. Пользуясь линейностью и соотношением $R_{m,z}^* = R_{m,\bar{z}}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, $m = 1, 2$, мы получаем равенство

$$(\mathbf{R}_{1,z} x, y)_H = (\mathbf{R}_{2,z} x, y)_H, \qquad x, y \in L_N, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}. \tag{42}$$

Выберем произвольное число $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Пусть

$$H_z := \overline{(A_{\vec{x}} - zE_{H_{\vec{x}}})L_{\vec{x}}} = (\overline{A_{\vec{x}}} - zE_{H_{\vec{x}}})D(\overline{A_{\vec{x}}}).$$

Положим

$$y_0^r := x_0^r - P_{H_z}^{H_{\vec{x}}} x_0^r, \qquad 1 \leq r \leq N. \tag{43}$$

Обозначим $H_0 := \mathrm{span}\{y_0^r\}_{r=1}^N$. В работе [1] (см. доказательство теоремы 2) было показано, что

$$H_{\vec{x}} = H_z \oplus H_0. \tag{44}$$

Таким образом, H_0 является дефектным подпространством оператора $\overline{A_{\vec{x}}}$, отвечающим невещественному z. Поскольку

$$R_{j,z}(A_{\vec{x}} - zE_{H_{\vec{x}}})x = (A_j - zE_{H_j})^{-1}(A_j - zE_{H_j})x = x, \qquad x \in L_{\vec{x}} = D(A_{\vec{x}}),$$

то

$$R_{1,z}u = R_{2,z}u \in H, \qquad u \in H_z; \tag{45}$$

$$\mathbf{R}_{1,z}u = \mathbf{R}_{2,z}u, \qquad u \in H_z,\ z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}. \tag{46}$$

Мы можем записать

$$(\mathbf{R}_{n,z}x, u)_H = (R_{n,z}x, u)_{H_n} = (x, R_{n,\overline{z}}u)_{H_n} = (x, \mathbf{R}_{n,\overline{z}}u)_H, \tag{47}$$

где $x \in L_N,\ u \in H_{\overline{z}},\ n = 1, 2$, и значит,

$$(\mathbf{R}_{1,z}x, u)_H = (\mathbf{R}_{2,z}x, u)_H, \qquad x \in L_N,\ u \in H_{\overline{z}}. \tag{48}$$

В работе [1] было показано, что произвольный элемент $y \in L_{\vec{x}}$ можно представить в виде $y = y_{\overline{z}} + y'$, $y_{\overline{z}} \in H_{\overline{z}}$, $y' \in L_N$. Используя (42) и (48), мы получаем

$$(\mathbf{R}_{1,z}x, y)_H = (\mathbf{R}_{1,z}x, y_{\overline{z}} + y')_H = (\mathbf{R}_{2,z}x, y_{\overline{z}} + y')_H = (\mathbf{R}_{2,z}x, y)_H,$$

где $x \in L_N,\ y \in L_{\vec{x}}$. Поскольку $\overline{L_{\vec{x}}} = H_{\vec{x}}$, мы получаем

$$\mathbf{R}_{1,z}x = \mathbf{R}_{2,z}x, \qquad x \in L_N,\ z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}. \tag{49}$$

Для произвольного $x \in L_{\vec{x}}$, $x = x_z + x'$, $x_z \in H_z$, $x' \in L_N$, используя соотношения (46), (49), мы получим

$$\mathbf{R}_{1,z}x = \mathbf{R}_{1,z}(x_z + x') = \mathbf{R}_{2,z}(x_z + x') = \mathbf{R}_{2,z}x, \qquad x \in L_{\vec{x}},\ z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}, \tag{50}$$

и

$$\mathbf{R}_{1,z}x = \mathbf{R}_{2,z}x, \qquad x \in H_{\vec{x}},\ z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}. \tag{51}$$

Полученное противоречие заканчивает доказательство теоремы. $\Box$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Загороднюк С. М. О векторных полиномиальных последовательностях. // Вiсник Харкiвського нацiонального унiверситету iменi В.Н.Каразiна. Серiя "Математика, прикладна математика i механiка". – 2009. – **875.** – С. 25-47.

2. Загороднюк С. М., Клёц Л. Применение подхода А.Н. Колмогорова при изучении случайных последовательностей, связанных с ортогональными многочленами. // Вiсник Харкiвського нацiонального унiверситету iменi В.Н.Каразiна. Серiя "Математика, прикладна математика i механiка". – 2008. – **826**. – С. 3-37.

3. Загороднюк С. М. Разложение Вольда для полиномиальных последовательностей. // Вiсник Харкiвського нацiонального унiверситету iменi В.Н.Каразiна. Серiя "Математика, прикладна математика i механiка". – 2009. – **850.** – С. 57-70.

4. Тода М. Теория нелинейных решеток.– М.: Мир, 1984. – 264 с.

5. Колмогоров А. Н. Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве. // Бюлл. МГУ, – 1941. – **6**. – С. 1–40.

6. Розанов Ю. А. Стационарные случайные процессы.– М.: Наука, 1990. – 272 с.

7. Бродский М. С. Треугольные и жордановы представления линейных операторов.– М.: Наука, 1969. – 287 с.

8. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – Москва Ленинград: гос. издат-во тех.-теор. литер., 1950. – 484 с.

9. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наукова думка, 1965. – 800 с.

10. Штраус А. В. Обобщенные резольвенты симметрических операторов. // Известия АН СССР, – 1954. – **18**. – С. 51–86.

Статья получена: 17.02.2010; окончательный вариант: 17.11.2010; принята: 19.11.2010.