Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.576 № 931, 2010, с.73–92

$H(p,q)$-розвинення плюрісубгармонійних в $\mathbb{C}^n$ функцій

О.Я. Бродяк[a], Я.В. Васильків[b], С.І. Тарасюк[b]

[a]*Національний університет "Львівська політехніка",*
e-mail:brodyakoksana@mail.ru
[b]*Львівський національний університет імені Івана Франка,*
e-mail:YaVVasylkiv@gmail.com, e-mail:tidisi.dt@gmail.com

На основі методу гармонійного аналізу, розробленого А. Нейджелом та У. Рудіним для теорії унітарно інваріантних просторів функцій, знайдено розвинення плюрісубгармонійних в $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ функцій в ряд по однорідних голоморфних та антиголоморфних поліномах. Запропонований нами підхід природно об'єднує добре відомі методи гармонійного аналізу, розроблені Л. Рубелом і Б. Тейлором для функцій однієї комплексної змінної та А. Кнезером, В. Штоллем, Р. Куюлом і П. Новеразом для функцій багатьох комплексних змінних.

Бродяк О. Я., Василькив Я. В., Тарасюк С. И., $H(p,q)$**-разложения плюрисубгармонических в $\mathbb{C}^n$ функций.** На основании метода гармонического анализа, разработанного А. Нэйджелом и У. Рудиным для теории унитарно инвариантных пространств функций, найдено разложение плюрисубгармонических в $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ функций в ряд по однородным голоморфным и антиголоморфным полиномам. Предложенный нами подход естественно объединяет хорошо известные методы гармонического анализа, разработанные Л. Рубелом и Б. Тейлором для функций одной комплексной переменной и А. Кнезером, В. Штоллем, Р. Куюлом и П. Новеразом для функций многих комплексных переменных.

O. Ya. Brodyak, Ya. V. Vasyl'kiv, S. I. Tarasyuk, $H(p,q)$**-expansion of plurisubharmonic on $\mathbb{C}^n$ functions.** Based on the method of harmonic analysis, developed by A. Nagel and W. Rudin for the theory of unitarily invariant function spaces, the expansion of plurisubharmonic functions on $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ into series of homogeneous holomorphic and anti-holomorphic polynomials is finded. Proposed approach naturally combines well known methods of harmonic analysis, developed by L. A. Rubel and B. A. Taylor for functions of one complex variable and by A. Nagel, W. Rudin, W. Stoll, R. Kujala and P. Noverraz for functions of several complex variables.

2000 Mathematics Subject Classification 32U05, 42B05.

1. Вступ. У 1899 р. Ієнсен [1] отримав точне співвідношення між середнім значенням на колі $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ логарифма модуля голоморфної в крузі $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ функції $f\,(f(0) = 1)$ і усередненою лічильною функцією $N(r, 0, f)$ послідовності її нулів $\{a_j\}$ у замиканні круга $\{z \in \mathbb{C} : |z| \le r\}$:

$$N(r,0,f) = \sum_{|a_j|\le r} \log \frac{r}{|a_j|} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\,d\,\theta, \qquad 0 < r < R.$$

Очевидно, що формула Ієнсена – це формула для нульового коефіцієнта Фур'є функції $\log|f(re^{i\theta})|$. Формули для усіх інших коефіцієнтів

$$c_k(r, \log|f|) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta}\log|f(re^{i\theta})|\,d\,\theta, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

природно розглядати, як узагальнення цієї формули. Такі узагальнення, насправді, встановив ще сам Ієнсен [1].

В 1923 – 1925 р.р. Фріттьоф і Рольф Неванлінни [2], [3] (див. також [4, с. 15-16]) встановили низку інтегральних зображень логарифма мероморфної функції (зокрема, і відому формулу Пуассона-Ієнсена), які стали підвалинами створеної ними теорії розподілу значень аналітичних та мероморфних функцій. З цих зображень можна отримати співвідношення для коефіцієнтів $c_k(r, \log|f|)\,(k \in \mathbb{Z})$ мероморфної функції f, що зображають їх через послідовності нулів, полюсів та коефіцієнтів тейлорового розвинення $\log f$ в деякому околі нуля. У 1927 р. це зробив Н. І. Ахієзер [5] (див. також [4, с. 85–88]) і дав їх перше принципове застосування до нового доведення теореми Ліндельофа про тип цілої функції цілого порядку. Принагідно зауважимо, що як співвідношення для $c_k(r, \log|f|)$, так і формулу Пуассона-Ієнсена, неоднаразово перевідкривали багато математиків, зокрема, М. Картрайт [6], Г. Кнезер [7], А. Пфлюгер [8], А. Едрей і В. Фукс [9]. Проте, ці роботи носили розрізнений характер і не призвели до широких застосувань методу рядів Фур'є. Свого ж систематичного розвитку та широких застосувань (див. огляди [10] – [12] та монографії [13], [14]) метод рядів Фур'є для логарифма модуля цілих та мероморфних функцій набув лише після досліджень Л. Рубела і Б. Тейлора, анонсованих в 1963–66 р.р. [15] – [18] і викладених в роботі [19]. Метод рядів Фур'є Рубела-Тейлора істотно доповнили Д. Майлз та Д. Шей (див. огляди [10] – [12] та монографії [13], [14]).

В роботах П. Новераза [20], [21] вихідні положення методу рядів Фур'є Рубела-Тейлора поширено на субгармонійні та δ-субгармонійні в $\mathbb{C}$, а також плюрісубгармонійні в $\mathbb{C}^n$ $(n \ge 2)$ функції. Для субгармонійних в $\mathbb{R}^m$ $(m \ge 3)$ функцій, близький до методу Рубела-Тейлора, метод сферичних гармонік (метод рядів Фур'є-Лапласа) вперше розробив А. Кондратюк [22] – [24]. Питання можливості розробки такого методу для субгармонійних в просторі функцій було поставлене Л. Рубелом в огляді [10]. Подальшого свого розвитку метод рядів Фур'є для субгармонійних і δ-субгармонійних в $\mathbb{C}$ функцій набув в кандидатській дисертації Я. Васильківа [25].

Теорему Ліндельофа на випадок цілих та мероморфних в $\mathbb{C}^n$ функцій експоненційного типу узагальнено в роботі В. Штолля [26]. В основу цієї роботи покладено один варіант формули Пуассона-Ієнсена [27] для мероморфних функцій багатьох комплексних змінних і її еквівалент – розвинення логарифма цієї мероморфної функції в ряд по однорідних поліномах певного вигляду (деталі див. в [26]). Р. Куюла [28] розробив аналог теорії Рубела-Тейлора для цілих і мероморфних в $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ функцій, узагальнивши при цьому на більш загальний випадок основні результати з [26].

Зазначимо, як і в роботі П. Новераза [21], так і в роботі Р. Куюли [28], для відповідних об'єктів в $\mathbb{C}^n$ (плюрісубгармонійних функцій та логарифмів модулів мероморфних функцій) використовується техніка зріз-функцій, яка дозволяє зводити багатовимірні задачі до одновимірного випадку. Основна мета цієї роботи, на основі методів гармонійного аналізу, розробленого А. Нейджелом та У. Рудіним для теорії унітарно інваріантних просторів функцій [29] (див. також [30], [31]), об'єднати підходи, запропоновані в роботах Л. Рубела та Б. Тейлора [19], А. Кнезера [7], В. Штолля [26], Р. Куюли [28] і П. Новераза [21]. А саме, для плюрісубгармонійних в $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ функцій встановити аналог формули Пуассона-Ієнсена-Штолля (див. теорему 1 та зауваження 1) і, на цій основі, здійснити розвинення таких функцій в ряд по однорідних голоморфних та антиголоморфних поліномах (див. теорему 2 та зауваження 3). Крім того, у якості застосування, дати для плюрісубгармонійних в $\mathbb{C}^n$ функцій аналоги та уточнення деяких результатів Д. Майлза і Д. Шея з роботи [32] (див. теорему 3 та наслідок 4).

2. Означення та формулювання результатів. Нагадаємо (див., наприклад, [30, с. 134]), що дійснозначна напівнеперервна зверху функція $u(\zeta)$, $u(\zeta) \not\equiv -\infty$, $\zeta \in \mathbb{C}^n$, називається плюрісубгармонійною в $\mathbb{C}^n$, якщо для довільної комплексної прямої $\zeta := a + b\,z$, $a \in \mathbb{C}^n$, $b \in \mathbb{C}^n$, $z \in \mathbb{C}$, зріз-функція $u_{a,b}(z) := u(a + b\,z)$ є субгармонійною функцією однієї комплексної змінної z.

Оператори зовнішнього диференціювання ∂ і $\overline{\partial}$ в $\mathbb{C}^n$ визначаються співвідношеннями (див., наприклад, [33, Глава 1])

$$\partial = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_k}\, d\,z_k, \qquad \overline{\partial} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}\, d\,\overline{z}_k,$$

де $z_k = x_k + i\,y_k$, $\overline{z}_k = x_k - i\,y_k$, $\{x_k, y_k\} \subset \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, а

$$\frac{\partial}{\partial z_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i\,\frac{\partial}{\partial y_k}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i\,\frac{\partial}{\partial y_k}\right)$$

– оператори формальних похідних. Покладемо

$$d := \partial + \overline{\partial} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\, d\,x_k + \frac{\partial}{\partial y_k}\, d\,y_k\right),$$

$$d^{\perp} := i(\partial - \overline{\partial}) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial\, y_k}\, d\, x_k - \frac{\partial}{\partial\, x_k}\, d\, y_k \right).$$

Нехай

$$\omega^{n-1}(\eta) = \left(\frac{1}{4} d^{\perp} d\, \log |\eta|^2 \right)^{n-1}, \qquad \eta \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\},$$

– однорідна метрична форма Фубіні-Штуді,

$$\sigma(\eta) = -\,\frac{1}{2\pi^n}\, d^{\perp} \log |\eta| \wedge \omega^{n-1}(\eta)$$

– метрична форма Пуанкаре (тобто нормована форма об'єму на сферах $\mathbf{S}(r) = \{\eta \in \mathbb{C}^n : |\eta| = r\},\ 0 < r < +\infty)$.

Довільній плюрісубгармонійній в $\mathbb{C}^n$ функції u взаємно-однозначно відповідає додатний замкнений потік (див., наприклад, [34])

$$t_u(\eta) := \frac{1}{4}\, d^{\perp} d\, u(\eta) = \frac{i}{2}\, \partial\, \overline{\partial}\, u(\eta) = \frac{i}{2} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u(\eta)}{\partial \eta_j\, \partial \overline{\eta}_k}\, d\, \eta_j \wedge\, d\, \overline{\eta}_k,$$

де похідні $\frac{\partial^2 u(\eta)}{\partial \eta_j\, \partial \overline{\eta}_k}$ визначені як розподіли (функція $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{C}^n)$).
Зазначимо, що звуження потоку $t_u(\zeta)$ на комплексну пряму $\eta = a\,z$, $a \in \mathbf{S} := \mathbf{S}(1) \subset \mathbb{C}^n,\ z \in \mathbb{C}$, дорівнює

$$t_u(\eta)\Big|_{\eta = a\,z} = \frac{i}{2} \left[\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2\, u(\eta)}{\partial \eta_j \partial \overline{\eta}_k}\, a_j \overline{a}_k \right] d\, z \wedge d\, \overline{z} =$$

$$= \left[\frac{\partial^2\, u_a(z)}{\partial\, z\, \partial\, \overline{z}} \right] \frac{i}{2}\, d\, z \wedge\, d\, \overline{z} = \Delta\, u_a(z)\, \frac{i}{2}\, d\, z \wedge\, d\, \overline{z} = 2\,\pi\, d\, \mu_{u_a}(z),$$

де Δ – оператор Лапласа в $\mathbb{C}$, а $d\,\mu_{u_a}$ – міра, асоційована за Рісом з субгармонійною функцією $u_a(z) := u(az)$.

Говорять (див. [29], або [30, Глава 12], [31, Глава 1, §3]), що поліном M в $\mathbb{C}^n$ називається *однорідним степеня* k, якщо $M(z\,\zeta) = z^k\, M(\zeta),\ z \in \mathbb{C},\ \zeta \in \mathbb{C}^n$. Нехай $\mathcal{P}_k$ $(k \in \mathbb{Z}_+)$ – простір всіх однорідних комплекснозначних поліномів в $\mathbb{R}^N$ степеня k, а $\mathcal{H}_k$ – підпростір всіх $h \in \mathcal{P}_k$ для яких $\Delta h = 0$, де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + {} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_N^2}$ – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^N$. Через $\mathfrak{R}[w_1, \ldots, w_m]$ позначимо кільце всіх комплексних поліномів від змінних $w_1, \ldots, w_m \in \mathbb{C}$. Нагадаємо, що простір $H(p,q)$ $(p, q \in \mathbb{Z}_+)$ – це векторний підпростір *однорідних гармонійних поліномів* $h_{pq}(\zeta) \in \mathfrak{R}[\zeta_1, \ldots, \zeta_n; \overline{\zeta}_1, \ldots, \overline{\zeta}_n]$ *бістепеня* (p, q), тобто:

а) $\forall\, z\, \in\, \mathbb{C}: \quad h_{pq}(z\,\zeta) = z^p\, \overline{z}^q\, h_{pq}(\zeta)$, де $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n$;

б) $\forall\, \zeta\, \in\, \mathbb{C}^n: \quad \Delta\, h_{pq}(\zeta) = 4 \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial^2\, h_{pq}(\zeta)}{\partial\, \zeta_k\, \partial\, \overline{\zeta}_k} = 0.$

При цьому, простір $H(p,0)$ складається із *голоморфних*, а простір $H(0,p)$ – із *антиголоморфних* однорідних поліномів степеня p. Зауважимо, що

$\mathcal{H}_k = \bigoplus\limits_{j=0}^{k} H(j, k-j)$. Також маємо $L^2(\mathbf{S}) = \bigoplus\limits_{p,q\geq 0} H(p,q)$, точніше кожна функція $h \in L^2(\mathbf{S})$ єдиним чином розвивається в ряд $h = \sum\limits_{p,q\geq 0} h_{pq}$, де $h_{pq} \in H(p,q)$, який збігається до h в топології L^2-норм. Крім того, для довільних (p,q) і всіх $\zeta \in \mathbf{S}$ існує єдине твірне ядро $K_{pq}(\zeta, \bullet)$ із $H(p,q)$ таке, що

$$\forall\, h \in L^2(\mathbf{S}):\ \pi_{pq}\, h(\zeta) = \int_{\mathbf{S}} h(\eta)\, K_{pq}(\zeta,\eta)\, \sigma(\eta),$$

де π_{pq} – ортопроектори з $L^2(\mathbf{S})$ на $H(p,q)$. При цьому, оскільки $K_{pq}(\zeta,\bullet) \in C(\mathbf{S})$, то це дозволяє розширити область визначення π_{pq} до $L^1(\mathbf{S})$.

Нехай $u(z)$ – плюрісубгармонійна в $\mathbb{C}^n$ і плюрігармонійна в деякому околі точки $z = 0$ функція, $u(0) = 0$, і

$$h_{pq}(r;\zeta) = \frac{1}{\mathcal{D}(p,q,n)} \int_{\mathbf{S}} u_r(\eta) K_{pq}(\zeta,\eta)\sigma(\eta), \qquad r > 0, \qquad \zeta \in \mathbf{S},$$

– ортопроекції функцій $u_r(\eta) = u(r\eta)$ на $H(p,q)$-простори, де

$$\mathcal{D}(p,q,n) := \dim H(p,q) = C^p_{p+n-2}\, C^q_{q+n-2}\, \frac{p+q+n-1}{n-1}, \qquad n \geq 2,$$

$$K_{pq}(\zeta,\eta) = \mathcal{D}(p,q,n)\, \langle \zeta,\eta\rangle^p \langle \eta,\zeta\rangle^q\, F\left(-p,-q,n-1; 1 - \frac{|\zeta|^2|\eta|^2}{|\langle\zeta,\eta\rangle|^2}\right)$$

– твірні ядра в просторах $H(p,q)$, $\langle\zeta,\eta\rangle = \zeta_1\overline{\eta}_1 + \ldots + \zeta_n\overline{\eta}_n$ і

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\prod_{j=0}^{k-1} \frac{(\alpha+j)(\beta+j)}{\gamma+j}\right) \frac{x^k}{k!}$$

– гіпергеометрична функція. Відмітимо, що $K_{p0}(\zeta,\eta) = C^p_{n+p-1}\langle\zeta,\eta\rangle^p$.

Нехай також $\mathbf{B}(t) = \{\eta \in \mathbb{C}^n : |\eta| < t\}$ і $\overline{\mathbf{B}}(t) = \{\eta \in \mathbb{C}^n : |\eta| \leq t\}$, $p,\ q \in \mathbb{Z}_+,\ 0 < t < +\infty,\ \zeta \in \mathbf{S}$. Покладемо

$$n_{pq}(t;\zeta) = \frac{1}{\pi^{n-1}\,\mathcal{D}(p,q,n)} \int_{\overline{\mathbf{B}}(t)} K_{pq}\left(\zeta, \frac{\eta}{|\eta|}\right) d\,\mu_u(\eta), \tag{1}$$

де $d\,\mu_u(\eta) = \dfrac{1}{2\,\pi}\, t_u(\eta) \wedge \omega^{n-1}(\eta)$ і $t_u(\eta)$ – замкнений додатний потік, асоційований з u. Зауважимо, що $n(t) := n_{00}(t;\zeta) = \pi^{1-n}\mu_u(\overline{\mathbf{B}}(t))$. Через $\operatorname{supp}\mu_u$ скрізь надалі будемо позначати носій міри Ріса μ_u плюрісубгармонійної функції u.

Теорема 1 *Нехай $u(\zeta)$ – плюрісубгармонійна функція у відкритій зв'язній множині $G \subset \mathbb{C}^n$, $\overline{\mathbf{B}}(r) \subseteq G$, плюрігармонійна в $\overline{\mathbf{B}}(s)$, де $0 < s < r$*

і $u(0) = 0$. *Нехай також,* $F(\zeta)$ *– голоморфна в* $\mathbf{B}(s)$ *функція така, що* $u(\zeta) = \operatorname{Re} F(\zeta)$, $\zeta \in \mathbf{B}(s)$. *Якщо* $\zeta \in \mathbf{B}(s)$, *то*

$$F(\zeta) = 2\int_{\mathbf{S}} u(r\eta)\left[\left(\frac{r}{r-\langle\zeta,\eta\rangle}\right)^n - 1\right]\sigma(\eta)+$$

$$+\int_s^r \left[\frac{1}{\pi^{n-1}}\int_{s\le|\eta|\le t}\left(1-\left(\frac{t|\eta|}{t|\eta|-\langle\zeta,\eta\rangle}\right)^n\right)d\,\mu_u(\eta)\right]\frac{d\,t}{t}+$$

$$+\int_s^r \left[\frac{1}{\pi^{n-1}}\int_{s\le|\eta|\le t}\left(1-\left(\frac{r^2|\eta|}{r^2|\eta|-t\langle\zeta,\eta\rangle}\right)^n\right)d\,\mu_u(\eta)\right]\frac{d\,t}{t}, \tag{2}$$

де перший і третій інтеграли є голоморфними в $\mathbf{B}(r)$ *функціями, а другий – голоморфною в* $\mathbf{B}(s)$ *функцією.*

Зазначимо, що для функції $F(\zeta)$ також правильне наступне зображення (див. [30, с. 48])

$$F(\zeta) = \int_{\mathbf{S}} u(s\eta)\left[2\left(\frac{s}{s-\langle\zeta,\eta\rangle}\right)^n - 1\right]\sigma(\eta), \qquad \zeta \in \mathbf{B}(s).$$

Для $w \in \mathbb{C}$, $|w| < 1$ і $n \in \mathbb{N}$ позначимо (див. [26, с. 403], або [27, с. 165])

$$L(w) := L_n(w) := \frac{1}{(n-1)!}\,\frac{d^{n-1}}{d\,w^{n-1}}\left[w^{n-1}\operatorname{Log}(1-w)\right],$$

де символ Log означає головне значення логарифма.

Зауваження 1. *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді для всіх* $\zeta \in \mathbf{B}(s)$

$$F(\zeta) = 2\int_{\mathbf{S}} u(r\eta)\left[\left(\frac{r}{r-\langle\zeta,\eta\rangle}\right)^n - 1\right]\sigma(\eta)+$$

$$+\frac{1}{\pi^{n-1}}\int_{\overline{\mathbf{B}}(r)}\left[L\left(\frac{\langle\zeta,\eta\rangle}{|\eta|^2}\right) - L\left(\frac{\langle\zeta,\eta\rangle}{r^2}\right)\right]d\,\mu_u(\eta). \tag{3}$$

Покажемо, що зображення (3), після відповідних перетворень, набуде вигляду (2). Справді, спочатку подамо співвідношення (3) у наступному вигляді

$$F(\zeta) = 2\int_{\mathbf{S}} u(r\eta)\left[\left(\frac{r}{r-\langle\zeta,\eta\rangle}\right)^n - 1\right]\sigma(\eta)+$$

$$+\frac{1}{\pi^{n-1}}\int_{\overline{\mathbf{B}}(r)}\left[L\left(\frac{\langle\zeta,\eta\rangle}{|\eta|^2}\right) - L\left(\frac{\langle\zeta,\eta\rangle}{r\,|\eta|}\right)\right)d\,\mu_u(\eta)+$$

$$+\frac{1}{\pi^{n-1}}\int_{\overline{\mathbf{B}}(r)}\left[L\left(\frac{\langle\zeta,\eta\rangle}{r\,|\eta|}\right) - L\left(\frac{\langle\zeta,\eta\rangle}{r^2}\right)\right]d\,\mu_u(\eta).$$

Тоді (див. [26, с. 405]), враховуючи, що для $w \in \mathbb{C}$, $|w| < 1$:

$$L(w) = -\sum_{p=1}^{+\infty} C_{p+n-1}^{p} \frac{w^p}{p} \qquad \text{та} \qquad \frac{1}{(1-w)^n} = \sum_{p=0}^{+\infty} C_{p+n-1}^{p} w^p,$$

і той факт, що $\mu_u(\eta) = 0$ для $\eta \in \mathbf{B}(s)$, маємо

$$\frac{1}{\pi^{n-1}} \int_{\overline{\mathbf{B}}(r)} \left(L\left(\frac{\langle \zeta, \eta \rangle}{|\eta|^2} \right) - L\left(\frac{\langle \zeta, \eta \rangle}{r\,|\eta|} \right) \right) d\,\mu_u(\eta) =$$

$$= -\frac{1}{\pi^{n-1}} \int_{\overline{\mathbf{B}}(r)} \left(\sum_{p=1}^{+\infty} C_{p+n-1}^{p} \frac{\langle \zeta, \eta \rangle^p}{|\eta|^p} \right) d\,\mu_u(\eta) \int_{|\eta|}^{r} \frac{d\,t}{t^{p+1}} =$$

$$= -\int_0^r \left[\frac{1}{\pi^{n-1}} \int_{|\eta| \le t} \left(\sum_{p=1}^{+\infty} C_{p+n-1}^{p} \frac{\langle \zeta, \eta \rangle^p}{|\eta|^p} \right) d\,\mu_u(\eta) \right] \frac{d\,t}{t^{p+1}} =$$

$$= \int_s^r \left[\frac{1}{\pi^{n-1}} \int_{s \le |\eta| \le t} \left(1 - \left(\frac{t|\eta|}{t|\eta| - \langle \zeta, \eta \rangle} \right)^n \right) d\,\mu_u(\eta) \right] \frac{d\,t}{t},$$

і, відповідно,

$$\frac{1}{\pi^{n-1}} \int_{\overline{\mathbf{B}}(r)} \left(L\left(\frac{\langle \zeta, \eta \rangle}{r\,|\eta|} \right) - L\left(\frac{\langle \zeta, \eta \rangle}{r^2} \right) \right) d\,\mu_u(\eta) =$$

$$= -\frac{1}{\pi^{n-1}} \int_{\overline{\mathbf{B}}(r)} \left(\sum_{p=1}^{+\infty} C_{p+n-1}^{p} \frac{\langle \zeta, \eta \rangle^p}{r^2\,|\eta|^p} \right) d\,\mu_u(\eta) \int_{|\eta|}^{r} t^{p-1}\,d\,t =$$

$$= -\int_0^r \left[\frac{1}{\pi^{n-1}} \int_{|\eta| \le t} \left(\sum_{p=1}^{+\infty} C_{p+n-1}^{p} \frac{\langle \zeta, \eta \rangle^p}{r^2\,|\eta|^p} \right) d\,\mu_u(\eta) \right] t^{p-1}\,d\,t =$$

$$= \int_s^r \left[\frac{1}{\pi^{n-1}} \int_{s \le |\eta| \le t} \left(1 - \left(\frac{r^2|\eta|}{r^2|\eta| - t\langle \zeta, \eta \rangle} \right)^n \right) d\,\mu_u(\eta) \right] \frac{d\,t}{t}.$$

Враховуючи сказане вище, одержуємо (2).

Подібне до (3) зображення у випадку $u = \log|f|$ ($F = \log f$), де f – мероморфна в $\mathbb{C}^n$ функція, вперше встановив В. Штолль в 1949 році (див., наприклад, теорему 1.7 з [27]). Наведемо її формулювання лише для випадку голоморфної в області $G \subset \mathbb{C}^n$ функції.

Нехай f – голоморфна в області $G \subset \mathbb{C}^n$ функція, $\mathcal{Z}_f = f^{-1}(\{0\}) = \{\zeta \in G:\ f(\zeta) = 0\}$ – її нульова поверхня, а ν_f – функція кратності нульової поверхні $\mathcal{Z}_f$, тобто пара $(\mathcal{Z}_f, \nu_f) := D_f$ – дивізор функції f (див., наприклад, [33, Глава 1], [35, Глава 1]).

Теорема A (Формула Пуассона-Ієнсена-Штолля, [27]). *Нехай $f \not\equiv 0$ – голоморфна у відкритій зв'язній множині $G \subset \mathbb{C}^n$. Припустимо, що $\overline{\mathbf{B}}(r) \subseteq G$ і $\mathcal{Z}_f \cap \mathbf{B}(s) = \emptyset$ при деякому $0 < s < r < +\infty$. Припустимо також, що $f(0) = 1$. В кулі $\mathbf{B}(s)$ визначимо функцію $\log f(\zeta)$ умовою $\log f(0) = 0$. Якщо $\zeta \in \mathbf{B}(s)$, то*

$$\log f(\zeta) = 2 \int_{\mathbf{S}(r)} \log |f(\eta)| \left[\frac{r^{2\,n}}{(r^2 - \langle \zeta, \eta \rangle)^n} - 1 \right] \sigma(\eta) +$$

$$+ \frac{1}{\pi^{n-1}} \int_{\mathcal{Z}_f \cap \overline{\mathbf{B}}(r)} \nu_f(\eta) \left(L\left(\frac{\langle \zeta, \eta \rangle}{|\eta|^2} \right) - L\left(\frac{\langle \zeta, \eta \rangle}{r^2} \right) \right) \omega^{n-1}(\eta).$$

З огляду на добре відому формулу Пуанкаре-Лелона (див., наприклад, [33, с. 71], [35, с. 161]), маємо: $[D_f] = \dfrac{i}{4\,\pi} \partial\,\overline{\partial} \log |f|$, де $[D_f]$ – потік, породжений дивізором D_f. Але, функція $u = \log |f|$, де f – голоморфна в $G \subset \mathbb{C}^n$, є плюрісубгармонійною в G. Отож, $[D_f] = t_u/(2\,\pi)$ і співвідношення (3) (або (2)) є узагальненням наведеної в теоремі A формули Пуассона-Ієнсена-Штолля.

Теорема 2 *Нехай $u(z)$ – плюрісубгармонійна в $\mathbb{C}^n$ функція, плюрігармонійна в $\mathbf{B}(r_0)$, $u(0) = 0$ і $u(z) = \operatorname{Re} \sum\limits_{p=1}^{+\infty} \alpha_p(z)$ в $\mathbf{B}(r_0)$, де $\alpha_p(z)$ – однорідні голоморфні поліноми степеня p, $\alpha_{p0}(\zeta) = \alpha_p(\zeta)/C^p_{p+n-1}$, $r_0 = \inf\{r > 0 : \operatorname{supp} \mu_u \cap \overline{\mathbf{B}}(r) \neq \emptyset\}$. Тоді*

$$u(r\zeta) = \sum_{p,q \geq 0} h_{pq}(r; \zeta), \qquad r > 0, \qquad \zeta \in \mathbf{S},$$

де

$$h_{00}(r; \zeta) = \int_0^r \frac{n(t)}{t} d\,t;$$

$$h_{p0}(r; \zeta) = \frac{r^p}{2} \alpha_{p0}(\zeta) + \frac{1}{2} \int_0^r \left[\left(\frac{r}{t} \right)^p + \left(\frac{t}{r} \right)^p \right] \frac{n_{p0}(t; \zeta)}{t} d\,t;$$

$$h_{0p}(r; \zeta) = \overline{h_{p0}(r; \zeta)}; \qquad h_{pq}(r; \zeta) \equiv 0 \quad \textit{при} \;\; pq \neq 0.$$

При $0 < r < +\infty$ покладемо (див., наприклад, [21])

$$N(r; u) = \int_{\mathbf{S}} u(r\eta)\, \sigma(\eta) = \int_0^r \frac{n(t)}{t}\, d\,t,$$

$$T(r; u) = \int_{\mathbf{S}} u^+(r\eta)\, \sigma(\eta), \qquad m_2(r; u) = \left(\int_{\mathbf{S}} u^2(r\eta)\, \sigma(\eta) \right)^{1/2},$$

де $u^+ = \max\{u; 0\}$. Зауважимо, що при $0 < r < +\infty$ правильні наступні співвідношення

$$T(r;u) \leq 2\,T(r;u) - N(r;u) = \int_{\mathbf{S}} |u(r\eta)|\,\sigma(\eta) \leq m_2(r;u),$$

а також (див. [30, Твердження 1.4.7])

$$m_2(r;u) = \left(\int_{\mathbf{S}} \frac{\sigma(\eta)}{2\pi} \int_0^{2\pi} u^2(re^{i\theta}\eta)\,d\,\theta\right)^{1/2}.$$

Теорема 3 *Нехай $u(z)$ – плюрісубгармонійна в $\mathbb{C}^n$ і плюрігармонійна в деякому околі точки $z = 0$ функція, $u(0) = 0$. Тоді для довільної неперервної функції $\gamma\,:\,(0;+\infty) \longrightarrow (1;2]$ і для всіх $p \in \mathbb{N}$, $\zeta \in \mathbf{S}$, $0 < r < +\infty$, виконуються нерівності*

$$|h_{p0}(r;\zeta)| \leq \left(2\,T(\gamma^2(r)r;u) - N(r;u)\right)\left[\left(\frac{1}{\gamma(r)}\right)^p + \frac{1 - (\gamma(r))^{-2p}}{2\,p\,\log\,\gamma(r)}\right],$$

$$m_2(r;u) \leq \left(2\,T(\gamma^2(r)r;u) - N(r;u)\right)\left[1 + \frac{4\sqrt{\log\,2}}{\sqrt{2\,\log\,\gamma(r)}}\right].$$

Наслідок 1 *Нехай $\gamma(r) = \sqrt{1 + \varepsilon(\log\,T(r;u))}$, де $\varepsilon(t)$ – неперервна додатна незростаюча функція, визначена на $[t_0;+\infty)$ така, що $\varepsilon(t) \to 0$ при $t \to +\infty$ і $\int_{t_0}^{+\infty} \varepsilon(t)\,d\,t < +\infty$. Тоді для всіх $r \geq r_0$ ($t_0 = \log\,T(r_0;u)$) зовні, можливо, множини скінченної логарифмічної міри, для всіх $p \in \mathbb{N}$ і $\zeta \in \mathbf{S}$ виконуються нерівності*

$$|h_{p0}(r;\zeta)| \leq (2\,e\,T(r;u) - N(r;u))\,\left[\left(\frac{1}{\gamma(r)}\right)^p + \frac{1 - (\gamma(r))^{-2p}}{2\,p\,\log\,\gamma(r)}\right]$$

і

$$m_2(r;u) \leq (2\,e\,T(r;u) - N(r;u))\left[1 + \frac{4\sqrt{\log 4}}{\sqrt{\varepsilon(\log\,T(r;u))}}\right].$$

3. Доведення результатів. При доведенні теореми 1 істотно використовуються наступні два оператори:
1^0. інтегральний оператор –

$$\delta^n[g](\zeta) := (n-1)\int_0^1 (1-t)^{n-2}\,g(t\zeta)\,d\,t,$$

2^0. диференціальний оператор –

$$\delta_n[g] := \frac{1}{(n-1)!}\,\frac{d^{n-1}}{d\,z^{n-1}}\left[z^{n-1}\,g(z\zeta)\right]\Big|_{z=1},$$

а також такі їх властивості (див. [26]–[28]).

Твердження 1 *Нехай g голоморфна в $\mathbf{B}(r) \subset \mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ функція, $\zeta \in \mathbf{B}(r)$, $0 < r < +\infty$. Тоді*

a) $\delta^n[g]$ *голоморфна в* $\mathbf{B}(r)$;

b) $\delta^n[g](\zeta) = \int\limits_{\mathbf{S}} g(\langle\zeta, \eta\rangle\eta)\,\sigma(\eta)$;

c) *якщо* $g(0) = 0$, *то* $\delta_n[g](0) = 0$;

d) $\delta_n[g]$ *голоморфна в* $\mathbf{B}(r)$;

e) $\delta_n \circ \delta^n[g] = \delta^n \circ \delta_n[g] = g$.

Зауваження 2 (H. Kneser [7]). *Якщо P – однорідний поліном степеня $q \in \mathbb{Z}_+$ в $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, то*

$$P(\zeta) = C^q_{q+n-1} \int_{\mathbf{S}} P(\langle\zeta, \eta\rangle\eta)\sigma(\eta).$$

Доведення теореми 1. При доведенні зображення (3) будемо, в основному, дотримуватися схеми доведення теореми 1.7 з роботи [27].

Нехай $z \in \mathbb{C}$, $|z| < r$ і $a \in \mathbf{S}$. За формулою Пуассона-Ієнсена (див. [37, с. 139] для зріз-функції $u_a(z) = u(za)$ отримуємо

$$u_a(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_a(re^{i\theta}) \operatorname{Re} \frac{re^{i\theta}+z}{re^{i\theta}-z}\,d\theta - \int_{|b|\leq r} \log\left|\frac{r^2 - \bar{b}z}{r(z-b)}\right| d\,\mu_{u_a}(b), \tag{4}$$

де μ_{u_a} – міра Ріса субгармонійної функції $u_a(z)$. Нагадаємо, що звуження потоку $t_u(\zeta)$ на комплексну пряму $\zeta = a\,z$, $z \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbf{S}$, дорівнює $t_u(\zeta)\big|_{\zeta=az} = 2\pi\,d\,\mu_{u_a}(z)$.

Підставляючи $z = 0$ в (4), отримуємо

$$0 = u_a(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_a(re^{i\theta})\,d\,\theta - \int_{|b|\leq r} \log\frac{r}{|b|}\,d\,\mu_{u_a}(b). \tag{5}$$

Враховуючи, що $\dfrac{re^{i\theta}+z}{re^{i\theta}-z} = 1 + \dfrac{2z}{re^{i\theta}-z}$ і (5), зобразимо (4) у вигляді

$$\operatorname{Re} F(az) = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_a(re^{i\theta}) \operatorname{Re}\frac{z}{re^{i\theta}-z}\,d\,\theta +$$

$$+ \int_{|b|\leq r} \log\left|1 - \frac{z}{b}\right| d\,\mu_{u_a}(b) - \int_{|b|\leq r} \log\left|1 - \frac{z\,\bar{b}}{r^2}\right| d\,\mu_{u_a}(b), \quad |z| < s. \tag{6}$$

Водночас, із (6) випливає, що

$$F(az) = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_a(re^{i\theta})\,\frac{z}{re^{i\theta}-z}\,d\theta + \int_{|b|\leq r} \operatorname{Log}\left(1 - \frac{z}{b}\right) d\,\mu_{u_a}(b) -$$

$$-\int_{|b|\le r} \mathrm{Log}\left(1-\frac{z\,\overline{b}}{r^2}\right)\,d\,\mu_{u_a}(b), \quad |z|<s. \tag{7}$$

Візьмемо $\zeta \in \mathbf{B}(s)$ і $a \in \mathbf{S}$. Замінимо в (7) z на $\langle \zeta, a\rangle$ і зауважимо, що $|\langle \zeta, a\rangle| < s$. Тоді

$$F(\langle \zeta, a\rangle a) = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}a)\,\frac{\langle \zeta, e^{i\theta}a\rangle}{r-\langle \zeta, e^{i\theta}a\rangle}\,d\,\theta +$$

$$+\int\limits_{|b|\le r} \mathrm{Log}\left(1-\frac{\langle \zeta, b\,a\rangle}{\langle b\,a, b\,a\rangle}\right)\,d\,\mu_{u_a}(b) - \int\limits_{|b|\le r} \mathrm{Log}\left(1-\frac{\langle \zeta, b\,a\rangle}{r^2}\right)\,d\,\mu_{u_a}(b). \tag{8}$$

Покладемо ($b \in \mathbb{C},\ a \in \mathbf{S},\ \zeta \in \mathbf{B}(s),\ 0<s<r$)

$$J_1(r;a) := \int_{|b|\le r} \mathrm{Log}\left(1-\frac{\langle \zeta, b\,a\rangle}{\langle b\,a, b\,a\rangle}\right)\,d\,\mu_{u_a}(b),$$

$$J_2(r;a) := \int_{|b|\le r} \mathrm{Log}\left(1-\frac{\langle \zeta, b\,a\rangle}{r^2}\right)\,d\,\mu_{u_a}(b).$$

Зауважимо, що $\forall \theta \in [0, 2\pi]$:

$$J_1(r;ae^{i\theta}) = \int_{|b|\le r} \mathrm{Log}\left(1-\frac{\langle \zeta, b\,a\,e^{i\theta}\rangle}{\langle b\,a\,e^{i\theta}, b\,a\,e^{i\theta}\rangle}\right)\,d\,\mu_{u_{ae^{i\theta}}}(b) =$$

$$= \int_{|be^{i\theta}|\le r} \mathrm{Log}\left(1-\frac{\langle \zeta, b\,a\,e^{i\theta}\rangle}{\langle b\,a\,e^{i\theta}, b\,a\,e^{i\theta}\rangle}\right)\,d\,\mu_{u_a}(be^{i\theta}) = J_1(r;a), \tag{9}$$

$$J_2(r;ae^{i\theta}) = \int_{|b|\le r} \mathrm{Log}\left(1-\frac{\langle \zeta, b\,a\,e^{i\theta}\rangle}{r^2}\right)\,d\,\mu_{u_{ae^{i\theta}}}(b) =$$

$$= \int_{|be^{i\theta}|\le r} \mathrm{Log}\left(1-\frac{\langle \zeta, b\,a\,e^{i\theta}\rangle}{r^2}\right)\,d\,\mu_{u_a}(be^{i\theta}) = J_2(r;a).$$

Крім того,

$$J_1(r;a) = J_1(1;r\,a), \qquad J_2(r;a) = J_2(1;r\,a). \tag{10}$$

Справді, маємо

$$J_1(r;a) = \int_{|b|\le r} \mathrm{Log}\left(1-\frac{\langle \zeta, b\,a\rangle}{\langle b\,a, b\,a\rangle}\right)\,\frac{t_u(b\,a)}{2\,\pi} =$$

$$= \int_{|z|\le 1} \mathrm{Log}\left(1-\frac{\langle \zeta, z\,r\,a\rangle}{\langle z\,r\,a, z\,r\,a\rangle}\right)\,\frac{t_u(z\,r\,a)}{2\,\pi} = J_1(1;r\,a)$$

і

$$J_2(r;a) = \int_{|b|\le r} \mathrm{Log}\left(1-\frac{\langle \zeta, b\,a\rangle}{r^2}\right)\,\frac{t_u(b\,a)}{2\,\pi} =$$

$$= \int_{|z|\le 1} \operatorname{Log}\left(1 - \frac{\langle \zeta, z\, r\, a\rangle}{r^2}\right) \frac{t_u(z\, r\, a)}{2\,\pi} = J_2(1; r\, a).$$

Тепер усереднемо всі складові рівності (8) за параметром $a \in \mathbf{S}$. Враховуючи п. b) твердження 5, маємо

$$\int_{\mathbf{S}} F(\langle \zeta, a\rangle a)\sigma(a) = \delta^n[F](\zeta).$$

Крім того, позаяк метрична форма Пуанкаре $\sigma(\bullet)$ інваріантна відносно обертань, то

$$\int_{\mathbf{S}} \frac{\sigma(a)}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}a)\, \frac{\langle \zeta, e^{i\theta}a\rangle}{r - \langle \zeta, e^{i\theta}a\rangle}\, d\,\theta = \int_{\mathbf{S}} u(r\eta) \frac{\langle \zeta, \eta\rangle}{r - \langle \zeta, \eta\rangle}\, \sigma(\eta).$$

Далі, з огляду на співвідношення (10), маємо

$$\int_{\mathbf{S}} J_1(r; a)\, \sigma(a) = \int_{\mathbf{S}(r)} \left(\int_{|z|\le 1} \operatorname{Log}\left(1 - \frac{\langle \zeta, z\, \xi\rangle}{|z\, \xi|^2}\right) \frac{t_u(z\, \xi)}{2\,\pi} \right) \sigma(\xi).$$

Інтегрування по $\mathbf{S}(r)$ можна здійснити спочатку по перетину $\mathbf{S}(r)$ з комплексною прямою $l_a := \{\xi = \lambda\, a\},\ \lambda \in \mathbb{C},\ a \in \mathbf{S}$, тобто по колу $\{|\lambda| = r\}$, а потім по сукупності $\{l_a\}$ таких прямих (див., наприклад, [35, Глава 3], [36, с. 254-255]). Оскільки на комплексній прямій l_a форма $-\dfrac{1}{2\,\pi}\, d^{\perp} \log|\xi| = \dfrac{d\,\theta}{2\,\pi}$, де $\theta = \arg\lambda$, то враховуючи, що $\sigma(\xi) = -\dfrac{1}{2\,\pi^n}\, d^{\perp} \log|\xi| \wedge \omega^{n-1}(\xi)$ і ті факти, що метрична форма $\omega^{n-1}(\xi)$ інваріантна відносно розтягів та обертань і $d\mu_u(\xi) = \dfrac{1}{2\,\pi}\, t_u(\xi) \wedge \omega^{n-1}(\xi)$, а також співвідношення (9) і (10), одержимо

$$\int_{\mathbf{S}(r)} \left(\int_{|z|\le 1} \operatorname{Log}\left(1 - \frac{\langle \zeta, z\, \xi\rangle}{|z\, \xi|^2}\right) \frac{t_u(z\, \xi)}{2\,\pi} \right) \sigma(\xi) =$$

$$= \int\limits_{\{l_a\}} \left(\int\limits_0^{2\,\pi} \left(\int\limits_{|z\, e^{i\,\theta}|\le r} \operatorname{Log}\left(1 - \frac{\langle \zeta, z\, a\, r\, e^{i\,\theta}\rangle}{|z\, a\, r\, e^{i\,\theta}|^2}\right) \frac{t_u(z\, a\, r\ e^{i\,\theta})}{2\,\pi} \right) \frac{d\,\theta}{2\,\pi} \right) \frac{\omega^{n-1}(\xi)}{\pi^{n-1}} =$$

$$= \frac{1}{\pi^{n-1}} \int_{\overline{\mathbf{B}}(r)} \operatorname{Log}\left(1 - \frac{\langle \zeta, \eta\rangle}{|\eta|^2}\right) d\,\mu_u(\eta)$$

тобто,

$$\int_{\mathbf{S}} J_1(r; a)\, \sigma(a) = \frac{1}{\pi^{n-1}} \int_{\overline{\mathbf{B}}(r)} \operatorname{Log}\left(1 - \frac{\langle \zeta, \eta\rangle}{|\eta|^2}\right) d\,\mu_u(\eta).$$

З тих самих міркувань

$$\int_{\mathbf{S}} J_2(r; a)\, \sigma(a) = \frac{1}{\pi^{n-1}} \int_{\overline{\mathbf{B}}(r)} \operatorname{Log}\left(1 - \frac{\langle \zeta, \eta\rangle}{r^2}\right) d\,\mu_u(\eta).$$

Отже,

$$\delta^n[F](\zeta) = 2\int_{\mathbf{S}} u(r\eta)\,\frac{\langle\zeta,\eta\rangle}{r-\langle\zeta,\eta\rangle}\,\sigma(\eta) + \frac{1}{\pi^{n-1}}\int_{\overline{\mathbf{B}}(r)} \mathrm{Log}\left(1-\frac{\langle\zeta,\eta\rangle}{|\eta|^2}\right)\,d\,\mu_u(\eta)-$$

$$-\frac{1}{\pi^{n-1}}\int_{\overline{\mathbf{B}}(r)} \mathrm{Log}\left(1-\frac{\langle\zeta,\eta\rangle}{r^2}\right)\,d\,\mu_u(\eta), \qquad \forall\zeta\in\mathbf{B}(s). \tag{11}$$

Застосовуючи тепер оператор δ_n до співвідношення (11) і враховуючи, що

$$\delta_n\circ\delta^n[F]=F, \quad \delta_n\left[\frac{\langle\zeta,\bullet\rangle}{r-\langle\zeta,\bullet\rangle}\right] = \frac{r^n}{(r-\langle\zeta,\bullet\rangle)^n}-1,$$

$$\delta_n\left[\mathrm{Log}\left(1-\frac{\langle\zeta,\bullet\rangle}{\langle\bullet,\bullet\rangle}\right)\right] = L\left(\frac{\langle\zeta,\bullet\rangle}{\langle\bullet,\bullet\rangle}\right)$$

і

$$\delta_n\left[\mathrm{Log}\left(1-\frac{\langle\zeta,\bullet\rangle}{r^2}\right)\right] = L\left(\frac{\langle\zeta,\bullet\rangle}{r^2}\right),$$

отримуємо (3), що, з огляду на зауваження 1, завершує доведення теореми 1.

Нехай

$$C(\zeta,\eta)=\frac{1}{(1-\langle\zeta,\eta\rangle)^n}$$

– ядро Коші для $\mathbf{B}:=\mathbf{B}(1)$. Коротко нагадаємо необхідні нам в подальшому факти (див., наприклад, [30, Глава 12]):

1^0. $$C(\zeta,\eta)=\sum_{p=0}^{+\infty} C_{p+n-1}^p\,\langle\zeta,\eta\rangle^p = \sum_{p=0}^{+\infty} K_{p\,0}(\zeta,\eta), \quad |\langle\zeta,\eta\rangle|<1;$$

2^0. Оператор $(Cf)(\zeta) = \int\limits_{\mathbf{S}} f(\zeta)C(\zeta,\eta)\,\sigma(\eta)$ є ортопроектором з $L^2(\mathbf{S})$ на $H^2(\mathbf{B})$, де $H^2(\mathbf{B})$ – клас Гарді, тобто простір всіх голоморфних функцій $f(\zeta)$, $\zeta\in\mathbf{B}$ таких, що

$$\|f\|_{H^2}^2 = \sup_{0<r<1}\int_{\mathbf{S}} |f(r\eta)|^2\,\sigma(\eta) < +\infty.$$

Доведення теореми 2. Нехай $0<s<r_0$, де $r_0=\inf\{r>0 : \mathrm{supp}\,\mu_u\cap\overline{\mathbf{B}}(r)\neq\emptyset\}$. Доведемо, що для всіх $\zeta\in\mathbf{B}(s)$ правильне зображення

$$F(\zeta)=\sum_{p=1}^{+\infty} C_{p+n-1}^p\left[2h_{p\,0}\left(r;\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)-\right.$$

$$\left.-\int_0^r\left(\left(\frac{r}{t}\right)^p+\left(\frac{t}{r}\right)^p\right)\frac{n_{p\,0}(t;\zeta/|\zeta|)}{t}\,d\,t\right]\left(\frac{|\zeta|}{r}\right)^p, \quad s<r<+\infty, \tag{12}$$

де $n_{p\,0}(t;\zeta/|\zeta|)$ означені співвідношеннями (1). При цьому, ряд (12) рівномірно збігається на компактах з $\mathbf{B}(s)$.

Справді, згідно з теоремою 1 маємо

$$F(\zeta) = 2\int_{\mathbf{S}(r)} u(\eta)\left[\left(\frac{r^2}{r^2-\langle\zeta,\eta\rangle}\right)^n - 1\right]\sigma(\eta)+$$

$$+\int_s^r \left[\frac{1}{\pi^{n-1}}\int_{s\le|\eta|\le t}\left(1-\left(\frac{t|\eta|}{t|\eta|-\langle\zeta,\eta\rangle}\right)^n\right)d\,\mu_u(\eta)\right]\frac{d\,t}{t}+$$

$$+\int_s^r \left[\frac{1}{\pi^{n-1}}\int_{s\le|\eta|\le t}\left(1-\left(\frac{r^2|\eta|}{r^2|\eta|-t\langle\zeta,\eta\rangle}\right)^n\right)d\,\mu_u(\eta)\right]\frac{d\,t}{t}.$$

Враховуючи той факт, що

$$\frac{r^{2\,n}}{(r^2-\langle\zeta,\eta\rangle)^n} - 1 = \sum_{p=1}^{+\infty} C_{p+n-1}^p\,\frac{\langle\zeta,\eta\rangle^p}{r^{2\,p}}$$

і ряд збігається рівномірно при $(\zeta,\eta)\in\mathcal{K}\times\mathbf{S}(r)$, де $\mathcal{K}$ – довільний компакт з $\mathbf{B}(s)$, отримуємо

$$2\int_{\mathbf{S}(r)} u(\eta)\left[\frac{r^{2\,n}}{(r^2-\langle\zeta,\eta\rangle)^n} - 1\right]\sigma(\eta) =$$

$$= 2\sum_{p=1}^{+\infty} C_{p+n-1}^p\,h_{p\,0}\left(r;\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)\left(\frac{|\zeta|}{r}\right)^p,\quad \zeta\in\mathbf{B}(s),\quad s<r<+\infty. \tag{13}$$

Зазначимо, що $K_{p0}(\zeta,\eta) = C_{p+n-1}^p\,\langle\zeta,\eta\rangle^p$ і тому

$$\left|h_{p\,0}\left(r;\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)\right| \le \frac{1}{C_{p+n-1}^p}\int_{\mathbf{S}}|u(r\eta)|\left|K_{p\,0}\left(\frac{\zeta}{|\zeta|},\eta\right)\right|\sigma(\eta)\le$$

$$\le \int_{\mathbf{S}}|u(r\eta)|\,\sigma(\eta) = 2T(r;u) - N(r;u) \le 2T(r;u)$$

для всіх $\zeta\in\mathbf{B}(s)$, $p\in\mathbb{N}$, $s<r<+\infty$. Отже, ряд (13) рівномірно збігається на компактах $\mathcal{K}\subset\mathbf{B}(s)$.

Надалі вважатимемо, що $r_0\le r<+\infty$, оскільки

$$\int_0^r\left(\frac{r}{t}\right)^p\frac{n_{p\,0}(t;\zeta/|\zeta|)}{t}\,d\,t = 0,\qquad \int_0^r\left(\frac{t}{r}\right)^p\frac{n_{p\,0}(t;\zeta/|\zeta|)}{t}\,d\,t = 0$$

при $r<r_0$.

Маємо

$$1-\frac{t^n|\eta|^n}{(t|\eta|-\langle\zeta,\eta\rangle)^n} = -\sum_{p=1}^{+\infty} C_{p+n-1}^p\,\frac{\langle\zeta,\eta\rangle^p}{t^p|\eta|^p}$$

i ряд рiвномiрно збiгається при $(t,\zeta,\eta)\in[r_0,r]\times\mathcal{K}\times\{\operatorname{supp}\mu_u\cap R(r_0,r)\}$, де $\mathcal{K}$ – компактна пiдмножина з $\mathbf{B}(s)$, $R(r_0,r):=\overline{\mathbf{B}}(r)\setminus\mathbf{B}(r_0)$. Тодi

$$\int_s^r\left[\frac{1}{\pi^{n-1}}\int_{s\le|\eta|\le t}\left(1-\left(\frac{t|\eta|}{t|\eta|-\langle\zeta,\eta\rangle}\right)^n\right)d\,\mu_u(\eta)\right]\frac{d\,t}{t}=$$

$$=-\sum_{p=1}^{+\infty}C_{p+n-1}^p\int_0^r\left(\frac{r}{t}\right)^p\frac{n_{p\,0}(t;\zeta/|\zeta|)}{t}\,d\,t\left(\frac{|\zeta|}{r}\right)^p, \tag{14}$$

де $r_0\le r<+\infty$, $\zeta\in\mathbf{B}(s)$. При цьому, оскiльки $|n_{p0}(t;\zeta/|\zeta|)|\le n(t)$, то

$$\left|\int_0^r\left(\frac{r}{t}\right)^p\frac{n_{p\,0}(t;\zeta/|\zeta|)}{t}\,d\,t\right|\le\int_{r_0}^r\left(\frac{r}{t}\right)^p\frac{n(t)}{t}\,d\,t\le\left(\frac{r}{r_0}\right)^p N(r;u)$$

для всiх $r_0\le r<+\infty$, $\in\mathbb{N}$, $\zeta\in\mathbf{B}(s)$, то ряд (14) також рiвномiрно збiгається на компактах $\mathcal{K}\in\mathbf{B}(s)$.

Далi, оскiльки

$$1-\frac{r^{2n}|\eta|^n}{(r^2|\eta|-t\langle\zeta,\eta\rangle)^n}=-\sum_{p=1}^{+\infty}C_{p+n-1}^p\frac{t^p\langle\zeta,\eta\rangle^p}{r^{2p}|\eta|^p}$$

i ряд рiвномiрно збiгається при $(t,\zeta,\eta)\in[r_0,r]\times\mathcal{K}\times\{\operatorname{supp}\,\mu_u\cap R(r_0,r))$, то

$$\int_s^r\left[\frac{1}{\pi^{n-1}}\int_{s\le|\eta|\ t}\left(1-\left(\frac{r^2|\eta|}{r^2|\eta|-t\langle\zeta,\eta\rangle}\right)^n\right)d\,\mu_u(\eta)\right]\frac{d\,t}{t}=$$

$$=-\sum_{p=1}^{+\infty}C_{p+n-1}^p\int_0^r\left(\frac{t}{r}\right)^p\frac{n_{p0}(t;\zeta/|\zeta|)}{t}\,d\,t\left(\frac{|\zeta|}{r}\right)^p, \tag{15}$$

де $r_0\le r<+\infty$, $\zeta\in\mathbf{B}(s)$. Тодi, враховуючи, що

$$\left|\int_0^r\left(\frac{t}{r}\right)^p\frac{n_{p0}(t;\zeta/|\zeta|)}{t}\,d\,t\right|\le N(r;u)$$

для всiх $p\in\mathbb{N}$, $r_0\le r<+\infty$, $\zeta\in\mathbf{B}(s)$, отримуємо рiвномiрну збiжнiсть ряду (15) на компактах $\mathcal{K}\subset\mathbf{B}(s)$.

Тепер, додаючи спiввiдношення (13),(14) i (15), отримуємо (12). Зазначимо, що для довiльного $\zeta\in\mathbf{B}(s)$, $0<s<r_0$

$$F(\zeta)=\int_{\mathbf{S}}u(s\eta)\left[2\left(\frac{s}{s-\langle\zeta,\eta\rangle}\right)^n-1\right]\sigma(\eta).$$

Окрiм того, маємо

$$\left(\int_{\mathbf{S}}|F(\tau\zeta)|^2\sigma(\zeta)\right)^{1/2}<+\infty,\qquad\forall\tau\in(0,s).$$

Тоді, враховуючи співвідношення (12) і результати роботи [29] (див. також [30, Глава 12]), отримуємо

$$\alpha_{p0}\left(\frac{\zeta}{|\zeta|}\right) r^p = \left[2h_{p0}\left(r;\frac{\zeta}{|\zeta|}\right) - \int_0^r \left(\left(\frac{r}{t}\right)^p + \left(\frac{t}{r}\right)^p\right) \frac{n_{p0}(t;\zeta/|\zeta|)}{t}\,d\,t\right],$$

а також

$$h_{p\,q}\left(r;\frac{\zeta}{|\zeta|}\right) = 0 \quad \text{при} \quad p\cdot q \neq 0.$$

Співвідношення

$$h_{0p}\left(r;\frac{\zeta}{|\zeta|}\right) = \overline{h_{0p}}\left(r;\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)$$

безпосередньо випливає з того, що $u_r(\zeta) = u(r\zeta)$ є дійсною функцією.

І, нарешті, оскільки $K_{00}(\zeta,\eta) = 1$, то співвідношенння для h_{00} – це формула Ієнсена для плюрісубгармонійних функцій (див., наприклад, [21]).

Зауваження 3. *Нехай плюрісубгармонійна функція задовольняє умови теореми 2. Тоді для довільних* $0 < r < +\infty,\ \zeta \in \mathbf{S} \subset \mathbb{C}^n,\ \theta \in \mathbb{R}$ *маємо*

$$u(re^{i\theta}\zeta) = N(r;u) + \sum_{p=1}^{+\infty} h_{p0}(r;\zeta)e^{i\,p\,\theta} + \sum_{p=1}^{+\infty} h_{0p}(r;\zeta)e^{-i\,p\,\theta},$$

тобто

$$c_0(r;u_\zeta) = h_{00}(r;\zeta), \quad c_p(r;u_\zeta) = h_{p0}(r;\zeta), \quad c_{-p}(r;u_\zeta) = h_{0p}(r;\zeta),$$

де

$$c_p(r;u_\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i\,p\,\theta} u_\zeta(re^{i\theta})\,d\,\theta$$

– коефіцієнти Фур'є зріз-функцій $u_\zeta(z) = u(z\zeta),\ z \in \mathbb{C},\ \zeta \in \mathbf{S}$ *(порівн. з [21] та [22]).*

Доведення теореми 3. При $p \in \mathbb{N},\ \zeta \in \mathbf{S} \subset \mathbb{C}^n,\ 0 < r < +\infty,\ 1 < \gamma(r) \le 2$, маємо

$$h_{p0}(r;\zeta) - (\gamma(r))^{-p} h_{p0}(r\gamma(r);\zeta) = -\frac{1}{2}\int_0^{r\gamma(r)} \left[\left(\frac{r}{t}\right)^p + \left(\frac{t}{r\gamma^2(r)}\right)^p\right] \frac{n_{p0}(t;\zeta)}{t}\,d\,t +$$

$$+\frac{1}{2}\left(1-(\gamma(r))^{-2p}\right)\int_0^r \left(\frac{t}{r}\right)^p \frac{n_{p0}(t;\zeta)}{t}\,d\,t,$$

і, тому

$$|h_{p0}(r;\zeta)| \le \frac{|h_{p0}(r\gamma(r);\zeta)|}{\gamma^p(r)} + \frac{n(r)+n(r\gamma(r))}{2p}\left(1-(\gamma(r))^{-2p}\right).$$

Тоді, враховуючи нерівності

$$|h_{p0}(r\gamma(r);\zeta)| \le 2T(r\gamma(r);u) - N(r;u) \le 2T(r\gamma^2(r);u) - N(r;u),$$

$$n(r)+n(r\gamma(r))\le \frac{N(r\gamma^2(r);u)-N(r;u)}{\log\gamma(r)}\le \frac{2T(r\gamma^2(r);u)-N(r;u)}{\log\gamma(r)},$$

отримуємо

$$|h_{p0}(r;\zeta)|\le \left(2\,T(\gamma^2(r)r;u)-N(r;u)\right)\left[\left(\frac{1}{\gamma(r)}\right)^p+\frac{1-(\gamma(r))^{-2p}}{2\,p\,\log\gamma(r)}\right].$$

Звідси, з огляду на рівність Парсеваля

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u^2(re^{i\theta}\zeta)\,d\,\theta=|h_{00}(r;\zeta)|^2+2\sum_{p=1}^{+\infty}|h_{p0}(r;\zeta)|^2$$

і нерівності

$$N(r;u)\le 2T(r;u)-N(r;u)\le 2T(r\gamma^2(r);u)-N(r;u),$$

як і при доведенні леми 2.1 з [32] дістаємо

$$m_2(r;u)\le \left(2\,T(\gamma^2(r)r;u)-N(r;u)\right)\left[1+\frac{4\sqrt{\log 2}}{\sqrt{2\,\log\gamma(r)}}\right],$$

що завершує доведення теореми 3.

Нагадаємо, що множина $E\subset[1,+\infty)$ називається множиною скінченної логарифмічної міри, якщо інтеграл $\int_E d(\log t)$ збігається. При доведенні леми 2 з [38], по суті справи, встановлено наступне твердження.

Лема 6 *Нехай $\varepsilon(t)$ – неперервна, додатна функція, задана на $[t_0,+\infty)$, незростаюча, $\varepsilon(t)\to 0$ при $t\to+\infty$, причому $\int_{t_0}^{+\infty}\varepsilon(t)\,d\,t<+\infty$. Тоді, для всіх $r\ge r_0^*$, крім, можливо, множини скінченної логарифмічної міри*

$$T\left((1+\varepsilon\left(\log T(r,u)\right))\,r,\,u\right)<e\,T(r,u).$$

Доведення наслідку 4. Покладемо в твердженнях теореми 3 $\gamma(r)=\sqrt{1+\varepsilon(\log T(r;u))}$ і застосуємо лему 6. Тоді для всіх $r\ge r_0$ зовні, можливо, множини скінченної логарифмічної міри правильне наступне співвідношення

$$2T(r\gamma^2(r);u)-N(r;u)\le 2\,e\,T(r;u)\,-N(r;u).$$

Вважаючи, що $0<\varepsilon(t)\le 1$, звідси і тверджень теореми 3, з урахуванням елементарної нерівності $\log(1+x)\ge x/2$, $0<x\le 1$, отримуємо всі твердження цього наслідку.

Подяка. *Автори висловлюють щиру подяку рецензенту за цілу низку істотних зауважень та порад, які дозволили усунути з нашої статті допущені в першому її варіанті неточності, недогляди та описки.*

ЛІТЕРАТУРА

1. Jensen J. L. W. V. Sur un nouvel et important theoreme de la theorie des fonctions. // Acta Math., – 1899. – **22**. – P. 359–364.

2. Nevanlinna F. Bemerkugen zur Theorie der ganzen Functionen endlicher Ordnung. // Soc. Sci. Fenn. Comment. Phys.–Math., – 1923. – V. 2, **4**. – P. 1–7.

3. Nevanlinna R. Zur theorie der meromorphen Functionen. // Acta Math., – 1925. – **46**. – P. 1–99.

4. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 592 с.

5. Ахієзер Н.І. Новий вивід необхідних умов приналежності цілої функції цілого порядку до певного типу. // Запис. фіз.-мат. відділення АН УРСР., – 1927. – Т. 2, **3**. – С. 29–33.

6. Cartwright M. L. On integral function of integral order. // Proc. London Math. Soc., – 1932. – V. 33, **33**. – P. 209–224.

7. Kneser H. Zur theorie der gebrochenen Funktionen mehrer Veränlicher. // Jber. Deutsch. Math.-Verein., – 1938. – **48**. – P. 1–28.

8. Pfluger A. Die Wertverteilung und das Verhalten von Betrag und Argument einer Speziellen Klasse analitishen Functionen. I. // Comm. Helv., – 1938. – **11**. – P. 180–213.

9. Edrei A., Fuchs W. H. J. Meromorphic functions with several deficient values. // Trans. Amer. Math. Soc., – 1959. – **93**. – P. 292–328.

10. Rubel L. A. A survey of a Fourier series method for meromorphic functions. // Lect. Not. in Math., – 1973. – **336**. – P. 51–62.

11. Гольдберг А. А., Левин Б. Я., Островский И. В. Целые и мероморфные функции. // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Соврем. проблемы мат. Фундам. напр., – 1990. – **85**. – С. 5–186.

12. Miles J. A Fourier series method in value distribution theory. // Fourier Series Methods in Complex Analysis (Mekriärvi, 2005). Univ. Joensuu Dept. Math. Rep. Ser., – 2006. – **10**. – P. 129–158.

13. Rubel L. A. Entire and meromorphic functions. – New York–Berlin–Heideberg: Springer–Verlag, 1996. – 187 p.

14. Кондратюк А. А. Ряды Фурье и мероморфные функции. – Львов: Вища школа, 1988. – 195 с.

15. Rubel L. A. A Fourier series method for entire functions. // Duke Math. J., – 1963. – **39**. – P. 437–442.

16. Rubel L. A. Une methode de series de Fourier pour les fonctions meromorphes. // Seminaire P. Lelong, 6eme annee. – 1965/66.

17. Rubel L. A. Croissance et zeros des Fonctions Meromorphes – Espace Duals de Fonctions Entieres. // Publ. Sem. Math. d'Orsay. 1965/66. – P. 77.

18. Rubel L. A., Taylor B. A. A Fourier series method for meromorphic and entire functions. // Bul. Amer. Math. Soc., – 1966. – V. 73, **5**. – P. 857–860.

19. Rubel L. A., Taylor B. A. A Fourier series method for meromorphic and entire functions. // Bul. Soc. Math. France., – 1968. – **96**. – P. 53–96.

20. Noverraz P. Extension d'une methode de series de Fourier aux fonctions sousharmoniques et plurisousharmoniques. // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1967. – **264**. – P. 675–678.

21. Noverraz P. Fonctions plurisousharmoniques et analytiques dans les espaces vectoriels topologiques complexes. // Ann. Inst. Fourier., – 1969. – V. 19, **2**. – P. 419–493.

22. Кондратюк А. А. О методе сферических гармоник для субгармонических функций. // Матем. сб. – 1981. – Т. 116, **2**. – С. 147–165.

23. Кондратюк А. А. Сферические гармоники и субгармонические функции. // Докл. АН СССР., – 1983. – Т. 268, **3**. – С. 541–544.

24. Кондратюк А. А. Сферические гармоники и субгармонические функции. // Матем. сб. – 1984. – Т. 125, **2**. – С. 147–166.

25. Василькив Я. В. Исследование асимптотических свойств целых и субгармонических функций методом рядов Фурье: Дис.... канд. физ.–мат. наук; – Львов, – 1986. – 129 с.

26. Stoll W. About entire and meromorphic functions of exponential type. // Proc. Sympos. Pure Math., Amer. Math. Soc. Providence, R.I., – 1968. – **11**. – P. 392–430.

27. Stoll W. Normal familes of non-negative divisors. // Math. Z., – 1964. –**84**. – P. 154–218.

28. Kujala R. O. Functions of finite λ-type in several complex variables. // Trans. Amer. Math. Soc., – 1971. – **161**. – P. 327–358.

29. Nagel A., Rudin W. Moebius-invariant function spaces on balls and spheres. // Duke Math. J., – 1976. – V. 43, **4**. – P. 841–865.

30. Рудин У. Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. – М.: Мир, 1984. – 455 с.

31. Александров А. Б. Теория функций в шаре. // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Соврем. проблемы матем. Фундаментальные направления., – 1985. – **8**. – С. 115–190.

32. Miles J., Shea D. F. On the growth of meromorphic functions having at least one deficient value. // Duke Math. J., – 1976. – V. 43, **1**. – P. 171–186.

33. Шабат Б. В. Распределение значений голоморфных отображений. – М.: Наука, 1982. – 288 с.

34. Lelong P. Fonctions plurisousharmoniques et formes differentialles positives. – Paris–London–New York: Gordon and Breach, 1968. – 79 p.

35. Чирка Е. М. Комплексные аналитические множества. – М.: Наука, 1985. – 272 с.

36. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ, Ч. 2. – М.: Наука, 1985. – 464 с.

37. Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции. – М.: Мир, 1980. – 304 с.

38. Васильків Я.В. Асимптотична поведінка логарифмічних похідних та логарифмів мероморфних функцій цілком регулярного зростання в $L^p[0, 2\pi]$-метриці. Ч. 1. // Матем. Студії., – 1999. – Т. 12, **1**. – С. 37–58.

Стаття одержана: 5.05.2010; перероблений вариант: 15.11.2010; прийнята: 19.11.2010.