Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517 № 931, 2010, с.93–98

# О скорости приближения бесконечно дифференцируемых функций частичными суммами обобщенного ряда Тейлора

Т. В. Рвачева
*Национальный аэрокосмический университет имени Н. Е. Жуковского "ХАИ", Украина*
*E-mail: rvachova@gmail.com*

В статье рассматриваются приближения бесконечно дифференцируемых функций частичными суммами обобщенного ряда Тейлора, построенного на основе атомарной функции $up(x)$. Получены оценки скорости приближения для некоторых классов бесконечно дифференцируемых функций.

Т. В. Рвачова, **Про швидкість наближення нескінченно диференційовних функцій частинними сумами узагальненого ряду Тейлора.** У статті розглянуті наближення нескінченно диференційовних функцій частинними сумами узагальненого ряду Тейлора, побудованого на основі атомарної функції $up(x)$. Одержані оцінки швидкості наближення для деяких класів нескінченно диференційовних функцій.

T. V. Rvachova, **On the rate of approximation of the infinitely differentiable functions by the partial sums of the generalized Taylor series.** Approximation of the infinitely differentiable functions by the partial sums of the based on the atomic function $up(x)$ generalized Taylor series is considered in the paper. The rate of approximation for some classes of the infinitely differentiable functions is estimated.

*2000 Mathematics Subject Classification:* 41A58.

## 1. Введение.

Пусть $H(M)$ — класс функций $\varphi \in C^{\infty}[a,\, b]$ таких, что

$$\|\varphi^{(n)}(x)\|_{C[a,\, b]} \le C(\varphi) M_n, n \in \mathbb{N},$$

где $M = \{M_n\}$.

Класс функций $H(M)$ называется квазианалитическим классом, если всякая функция $\varphi \in H(M)$ определяется единственным образом по последовательности чисел $\{\varphi^{(n)}(x_0)\}_0^\infty$, где $x_0$ — произвольно заданная точка из $[a, b]$. В противном случае $H(M)$ называется неквазианалитическим классом (см. [1, 2]).

Если класс квазианалитичен, то он не может содержать финитных функций, то есть функций, носитель которых строго содержится в $[a, b]$. С другой стороны, в работе Хьюз [3] показано, что если класс неквазианалитичен, то он содержит финитные функции со сколь угодно малым носителем.

В. А. Рвачев в 1982 г. предложил и исследовал обобщенные ряды Тейлора для классов

$$H_\rho = \{f \in C^\infty[-1, 1] : \|f^{(k)}\|_{C[-1,1]} \le C(f)\rho^k 2^{\frac{k(k+1)}{2}},\ k = 0, 1, 2, \ldots\}.$$

В его работах [4, 5] доказан следующий факт: если

$$f \in H_\rho,\ \text{где}\ \rho \in [1, 2), \tag{1}$$

то $f$ раскладывается в ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in N_n} f^{(n)}(x_{n,k}) \tilde{\varphi}_{n,k}(x), \tag{2}$$

где

$$N_n = \{-2^{n-1},\ -2^{n-1} + 1, \ldots,\ 2^{n-1} - 1,\ 2^{n-1}\}, n \ne 0; N_0 = \{-1,\ 0,\ 1\};$$

$$x_{n,k} = \left\{\frac{k}{2^{n-1}}\right\},\ n \ne 0,\ k \in N_n;\ x_{0,k} = \{k\},\ k \in N_0,$$

а функции $\tilde{\varphi}_{n,k}(x) \in H_1$ — так называемые базисные функции обобщенного ряда Тейлора — однозначно определяются из условий

$$(\tilde{\varphi}_{n,k}(x_{m,s}))^{(m)} = \delta_n^m \delta_s^k.$$

Они представляют собой конечные линейные комбинации сдвигов функций $up(x)$:

$$\tilde{\varphi}_{n,k}(x) = \sum_l c_l^{(n,k)} up(x - l2^{-n})$$

и играют роль функций $x^n$ в обычных рядах Тейлора.

Функция

$$up(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin t2^{-k}}{t2^{-k}} dt$$

является решением с компактным носителем ФДУ

$$y'(x) = 2y(2x + 1) - 2y(2x - 1).$$

Ряд (2) сходится на промежутке $[-1,1]$ равномерно.

В работах [6, 7] автором была исследована связь между коэффициентами и суммой обобщенного ряда Тейлора.

Настоящая работа посвящена получению результатов о приближении бесконечно дифференцируемых функций частичными суммами обобщенного ряда Тейлора.

## 2. Теоремы о приближении.

Для доказательства теорем о приближении частичными суммами обобщенного ряда Тейлора сформулируем следующую лемму, принадлежащую В. А. Рвачеву (лемма 6 из [5]):

**Лемма 1** *Пусть*

$$\varphi(x) = \sum_{k\in N_n} c_k \tilde{\varphi}_{n,k}(x),$$

*где* $|c_k| \le M 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

*Тогда*

$$\|\varphi^{(r)}\|_{C[-1,1]} \le \begin{cases} \hat{C} M 2^{\frac{r(r+1)}{2}}, & r > n, \\ \hat{C} M 2^{\frac{r(r+1)}{2}+r-n}, & r \le n, \end{cases}$$

*где* $\hat{C}$ *— абсолютная константа.*

Автором получены следующие теоремы о приближении бесконечно дифференцируемых функций частичными суммами обобщенного ряда Тейлора:

**Теорема 1** *Пусть* $f(x)$ *удовлетворяет* (1) *и*

$$\exists C: \ |f^{(n)}(x_{n,k})| \le C r^n n^{\alpha n} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall k \in N_n \tag{3}$$

*для некоторого* $r > 0$, $\alpha \ge 1$. *Тогда справедлива следующая оценка для скорости приближения* $f(x)$ *частичной суммой ряда* (2)*:*

$$\|R_m(x)\|_{C[-1,\,1]} \le \frac{\hat{C}(r,\alpha)}{2^{\frac{m(m+1)}{2}-\alpha m \log_2(m+1) - m\log_2 r}},$$

*где*

$$R_m(x) = f(x) - \sum_{n=0}^{m} \sum_{k\in N_n} f^{(n)}(x_{n,k}) \tilde{\varphi}_{n,k}(x). \tag{4}$$

*Доказательство.* Поскольку $f(x)$ удовлетворяет (1),

$$R_m(x) = f(x) - \sum_{n=0}^{m} \sum_{k\in N_n} f^{(n)}(x_{n,k}) \tilde{\varphi}_{n,k}(x) = \sum_{n=m+1}^{\infty} P_n(x),$$

где
$$P_n(x) = \sum_{k\in N_n} f^{(n)}(x_{n,k})\tilde{\varphi}_{n,k}(x).$$

По лемме 1, сформулированной выше, с учетом (3) имеем:
$$\|P_n(x)\| \le \tilde{C} r^n n^{\alpha n} 2^{-\frac{n(n+1)}{2}} 2^{-n}.$$

Следовательно,
$$|R_m(x)| \le \sum_{n=m+1}^{\infty} |P_n(x)| \le \tilde{C} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+\frac{n(n+1)}{2}-\alpha n\log_2 n - n\log_2 r}} =$$
$$= \tilde{C} \sum_{n=m+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\frac{n}{2}-\alpha\log_2 n - \log_2 r + \frac{3}{2}}}\right)^n.$$

Очевидно, что при $m$, больших некоторого $m_0(\alpha)$
$$|R_m(x)| \le \tilde{C} \sum_{n=m+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\frac{m+1}{2}-\alpha\log_2(m+1)-\log_2 r}}\right)^n =$$
$$= \tilde{C} \left(\frac{1}{2^{\frac{m+1}{2}-\alpha\log_2(m+1)-\log_2 r}}\right)^m \sum_{n=m+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\frac{m+1}{2}-\alpha\log_2(m+1)-\log_2 r}}\right)^{n-m}$$
$$= \tilde{C} \left(\frac{1}{2^{\frac{m(m+1)}{2}-\alpha m\log_2(m+1)-m\log_2 r}}\right) \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\frac{m+1}{2}-\alpha\log_2(m+1)-\log_2 r}}\right)^{l}.$$

Для $m$, больших некоторого $m_1(r,\alpha)$
$$\frac{m+1}{2} - \alpha\log_2(m+1) - \log_2 r > \beta > 0,$$
и, следовательно, для таких $m$
$$|R_m(x)| \le \tilde{C}\frac{1}{2^\beta - 1}\frac{1}{2^{\frac{m(m+1)}{2}-\alpha m\log_2(m+1)-m\log_2 r}}$$
$$= \hat{C}\frac{1}{2^{\frac{m(m+1)}{2}-\alpha m\log_2(m+1)-m\log_2 r}}.$$

Положив теперь
$$\hat{m}(r,\alpha) = \max(m_0(\alpha), m_1(r,\alpha))$$
и выбрав
$$\hat{C}(r,\alpha) = \max_{k=0,\dots,\hat{m}(r,\alpha)}(\hat{C}, \|R_k(x)\|\, 2^{\frac{k(k+1)}{2}-\alpha k\log_2(k+1)-k\log_2 r}),$$

получим, что для любого $m = 0, 1, 2, \ldots$

$$\|R_m(x)\|_{C[-1,\,1]} \le \frac{\hat{C}(r,\alpha)}{2^{\frac{m(m+1)}{2} - \alpha m \log_2(m+1) - m \log_2 r}}.$$

**Теорема 2** *Пусть $f(x)$ удовлетворяет* (1) *и*

$$\exists C : |f^{(n)}(x_{n,k})| \le CA(n) \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in N_n,$$

*где* $\frac{A(n+1)}{A(n)} \le 2^{n+\frac{1}{2}}$.
*Тогда*

$$\|R_m(x)\|_{C[-1,\,1]} \le \frac{\tilde{C}}{8^{\frac{m}{2}}},$$

*где $R_m(x)$ определено в* (4).

*Доказательство.* $R_m(x) = \sum_{n=m+1}^{\infty} P_n(x)$, где

$$P_n(x) = \sum_{k \in N_n} f^{(n)}(x_{n,k}) \tilde{\varphi}_{n,k}(x).$$

Из леммы 1 с учетом условий теоремы, имеем:

$$|P_n(x)| \le \tilde{C} A(n) 2^{-\frac{n(n+1)}{2} - n}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
|R_m(x)| &\le \tilde{C} \sum_{n=m+1}^{\infty} A(n) 2^{-\frac{n(n+1)}{2} - n} = \tilde{C} A(m) \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{A(n)}{A(m)} 2^{-\frac{n(n+1)}{2} - n} = \\
&= \tilde{C} A(m) \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{A(n)}{A(n-1)} \frac{A(n-1)}{A(n-2)} \cdot \ldots \cdot \frac{A(m+1)}{A(m)} 2^{-\frac{n(n+1)}{2} - n} \le \\
&\le \tilde{C} A(m) \sum_{n=m+1}^{\infty} 2^{\frac{1}{2}(n^2 - m^2)} 2^{-\frac{n(n+1)}{2} - n} = \tilde{C} \frac{A(m)}{2^{\frac{m^2}{2}}} \sum_{n=m+1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)^n = \\
&= \hat{C} \frac{A(m)}{2^{\frac{m^2}{2} + \frac{3}{2}(m+1)}} \le C_1 \frac{A(m-1) 2^{m-1+\frac{1}{2}}}{2^{\frac{m^2}{2} + \frac{3}{2}(m+1)}} \le \\
&\le C_2 \frac{A(m-2) 2^{m-2+\frac{1}{2}} \cdot 2^{m-1+\frac{1}{2}}}{2^{\frac{m^2}{2} + \frac{3}{2}(m+1)}} \le \ldots \le C_m \frac{A(1) 2^{\frac{1}{2}(m^2-1)}}{2^{\frac{m^2}{2} + \frac{3}{2}(m+1)}} \le \frac{C}{2^{\frac{3}{2} m}}.
\end{aligned}$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бернштейн С. Н. Аналитические функции вещественной переменной, их возникновение и пути обобщений. // Собрание сочинений. Т. 1. Конструктивная теория функций. – 1952. – С.285–320.

2. Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье. – М.:Мир, – 1986. – 464 с.

3. Hughes R. B. Zero sets of functions from non-quasi analytic classes. // Proc. Amer. Math. Soc., – 1971. – 27(3). – P. 539–542.

4. Рвачев В. А. Обобщенные ряды Тейлора для бесконечно дифференцируемых функций. // Мат. методы анализа динамических систем., – 1982. – Вып. 6. – С. 99–102.

5. Рвачев В. А. Финитные решения функционально-дифференциальных уравнений и их применение. // Успехи матем. наук., – 1990. – Т. 45, Вып. 1 (271). – С. 77–103.

6. Рвачова Т. В. Про зв'язок між коефіцієнтами і сумами узагальненого ряду Тейлора. // Доповіді Національної академії наук України., – 2002. – №7. – С. 26–30.

7. Rvachova T. V. On a relation between the coefficients and the sum of the generalized Taylor series. // Matematicheskaya fizika, analiz, geometriya., – 2003. – Vol. 10, No. 2. — P. 262–268.

Статья получена: 26.10.2010; принята: 19.11.2010.