

Электростатическое поле сегмента, экранированного секционированными сферами

В.А. Резуненко

Харьковский национальный университет им.В.Н.Каразина, Украина

Методом регуляризации решена задача электростатики для сферического сегмента, экранированного замкнутыми секционированными сферами. Для обращения главной части матричного оператора задачи использовано решение интегральных уравнений типа Абеля. Получена система алгебраических уравнений Фредгольма II рода. Рассмотрены некоторые варианты постановки задачи, вычисления потенциалов и обобщения задачи.

Резуненко В.О. **Електростатичне поле сегменту, що екранований секційними сферами.** Методом регуляризації розв'язана задача електростатики для сферичного сегменту, екранованого замкнутими секційними сферами. Для обернення головної частини матричного оператора задачі використано розв'язок інтегральних рівнянь типу Абеля. Одержана система алгебраїчних рівнянь Фредгольма II роду. Розглянуті деякі випадки постановки задачі, розрахунку потенціалів та узагальнення задачі.

V.A. Rezunenko, **Electrostatic field of a segment which is shielded by sectional spheres.** The electrostatic problem for a spherical segment which is shielded by sectional spheres is solved by a method of regularization. The main part of matrix operator of the problem is inverted using the solution of Abel integral equations. The Fredholm system of the second kind of algebraic equations has been obtained. Some generalizations and numerical results of the problem are considered.

2000 Mathematics Subject Classification: 65N12, 35A25, 78A45.

1. Введение.

Анализ электростатических потенциалов внутри ограниченных объёмов является актуальным, как в теоретическом, так и в прикладном плане. С прикладной точки зрения возникают, например, вопросы, как создавать

требуемое распределение электростатического поля в заданной области пространства, как устранить электрический пробой в газах, наполняющих рабочий объём электроприборов, как избежать накопления электростатических зарядов на поверхностях различных устройств. С теоретической точки зрения интересны вопросы разработки методов моделирования и численно-аналитической регуляризации как новых, так и классических задач электростатики, магнитостатики и электродинамики для различных, в том числе сферических, структур со сложными границами. Также важными являются вопросы оптимизации численных алгоритмов и процедур рассматриваемых задач. Задачи электростатики и магнитостатики на сферических структурах в некоторых случаях являются тестовыми для теоретических и прикладных направлений, например, обратных задач магнитотеллурического зондирования, позволяющих делать выводы о глубинном строении земной коры по измеренному на поверхности земли магнитному полю. Многочисленные применения сферических структур стимулируют развитие методов решения прямых и обратных задач математической физики, электростатики, электродинамики и теории дифракции (см. [1]-[9]). Вместе с тем, работ, посвященных таким задачам электростатики на сферических поверхностях, явно недостаточно (см. [2, 3, 4, 8]). Целью работы является построение численно-аналитического алгоритма задачи расчета электростатического потенциала идеально проводящего сферического сегмента, размещённого между секционированными замкнутыми сферами. При этом отметим, что для каждой секции замкнутых сфер может быть выбран свой потенциал. Этот выбор позволяет моделировать в широком диапазоне требуемое распределение результирующего потенциала. Так, задание нулевого потенциала на одной из внешних экранирующих секций может моделировать поверхность стыковки конструктивных опор структуры. Для решения задачи применен метод регуляризации парных сумматорных функциональных уравнений. Используются методы работ (см. [1]-[12]), в том числе, методы решения неоднородных интегральных уравнений Абеля первого рода, суммирования разрывных рядов функций комплексного переменного. Отметим, что регуляризацию исходной задачи можно выполнить несколькими методами. В работе применен метод регуляризации задачи электростатики в трехмерном пространстве, сводящий исходную задачу к эффективно разрешимой системе алгебраических уравнений Фредгольма второго рода. Отметим, что решаемая в работе задача не сводится к ранее рассмотренным задачам (см. [1]-[4]). Получено и исследовано решение актуальной многопараметрической задачи электростатики. Рассмотрены некоторые варианты постановки задачи, вычисления потенциалов и обобщения задачи.

2. Постановка задачи.

Пусть центр сферического сегмента, центры двух экранирующих сегмент секционированных замкнутых сфер помещены в начало декартовой и сферической систем координат. Сегмент и секционированные сферы имеют несколько параметров, опишем их подробно. Полагаем a_0 - радиус сферического сегмента, θ_0 - полярный угол, измеряющий сегмент (на сегменте $\theta_0 < \theta \leq \pi$). Пусть b_1, b_2 - радиусы соответственно внутренней и внешней секционированных сфер ($b_1 < a_0 < b_2$). Пусть диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, в которой рассматриваются сферические структуры, есть $\varepsilon_1 \neq 1$, $\mu_1 \neq 1$ и проводимость $\sigma = 0$. Для сферического сегмента выбираем потенциал V_0/ε_1 , отличный от нуля, $V_0 \neq 0$. Пусть сферический сегмент и секционированные замкнутые сферы являются идеально проводящими (их проводимость $\sigma = \infty$). Предполагаем, что секционированные сферы состоят из частей - секций, разделенных непроводящими бесконечно тонкими перегородками, расположенными на сечениях сферы плоскостями, параллельными плоскости XOY . Для размещения секций на поверхности внутренней сферы (радиуса b_1) заданы полярные углы $\theta_{j,1}$ перегородок между N секциями сферы [$\theta_{j-1,1} < \theta_{j,1}$, ($j = 1, 2, \dots, N$)], при этом отмечаем, что, по определению $\theta_{0,1} = 0$, $\theta_{N,1} = \pi$. Пусть каждая (j) - секция имеет свой (независимый) потенциал $V_{j,1}/\varepsilon_1$. Обозначим $V_1^{(N)}/\varepsilon_1$ потенциал всех секций поверхности внутренней сферы, равный потенциалу $V_{j,1}/\varepsilon_1$ на (j) секции. Для внешней сферы (радиуса b_2) аналогично полагаем: А) заданными полярные углы $\theta_{i,2}$ перегородок между M секциями [при этом $\theta_{0,2} = 0$, $\theta_{M,2} = \pi$],
 Б) также заданными потенциалы секций $V_{i,2}/\varepsilon_1$ ($i = 1, 2, 3, \dots, M$),
 В) для потенциала всей внешней сферы принято обозначение $V_2^{(M)}/\varepsilon_1$.
 Значит,

$$V_1^{(N)} = V_{j,1}, \quad r = b_1, \theta_{j-1,1} < \theta < \theta_{j,1}, \quad 1 \leq j \leq N, \quad (1)$$

$$V_2^{(M)} = V_{i,2}, \quad r = b_2, \theta_{i-1,2} < \theta < \theta_{i,2}, \quad 1 \leq i \leq M. \quad (2)$$

Электростатические поля \vec{E} и вектор электрической индукции \vec{D} всюду вне сегмента и вне секционированных сфер должны удовлетворять уравнениям Максвелла и материальным уравнениям

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad \vec{D} = \varepsilon_1 \vec{E}, \quad (3)$$

где ρ - плотность зарядов на поверхности проводников.

Электростатические поля, в силу однородности уравнений Максвелла (3), представим, с точностью до калибровочной константы, скалярными потенциалами U , для которых $\vec{E} = -\operatorname{grad}(U)$. При этом учитываем, что в данной постановке задачи магнитостатическое поле \vec{H} и магнитная индукция \vec{B} отсутствуют, т. е. $\vec{H} = 0$, $\vec{B} = 0$. Полные потенциалы U должны удовлетворять граничным условиям:

а) быть непрерывными на поверхности сегмента и на поверхности каждой части секционированных сфер;

б) нормальные производные потенциалов должны быть непрерывными на дополнении сферического сегмента до замкнутого сегмента. Полные потенциалы должны исчезать на бесконечности $U = O(r^{-1})$, $r \rightarrow \infty$ и удовлетворять условию конечности интеграла энергии в любой ограниченной области W трехмерного пространства $\int_W (grad(U))^2 dw < \infty$.

Требуется найти полные потенциалы вне сферического сегмента и вне секционированных сфер. В такой постановке задача электростатики имеет единственное решение [13].

3. Ряды Фурье-Лежандра для потенциалов.

Для решения задачи сначала применим метод частичных областей в пространстве R^3 и метод разделения переменных для уравнений Максвелла (3) в сферической системе координат. Пусть в R^3 выделены четыре области Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 , разделенных тремя сферами радиусов $r = b_1$, $r = a_0$, $r = b_2$, полагая $0 \leq b_1 < a_0 < b_2$. Для всех областей полагаем $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Используя принцип суперпозиции, будем искать в первой области Q_1 вторичный потенциал U_1 , во второй области Q_2 - потенциалы U_2 и U_3 , для области Q_3 - потенциалы U_4 и U_5 , для Q_4 - потенциал U_6 . Вторичные потенциалы представим рядами Фурье - Лежандра, обеспечивающими выполнение условия исчезания на бесконечности и условия ограниченности потенциала в окрестности начала системы координат:

$$U_1 = \frac{1}{\varepsilon_1} \sum_{n=0}^{\infty} F_n r^n P_n(\cos \theta), \quad 0 \leq r < b_1, \quad (4)$$

$$U_2 = \frac{1}{\varepsilon_1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^{-n-1} P_n(\cos \theta), \quad b_1 < r < a_0, \quad (5)$$

$$U_3 = \frac{1}{\varepsilon_1} \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^n P_n(\cos \theta), \quad b_1 < r < a_0, \quad (6)$$

$$U_4 = \frac{1}{\varepsilon_1} \sum_{n=0}^{\infty} C_n r^{-n-1} P_n(\cos \theta), \quad a_0 < r < b_2, \quad (7)$$

$$U_5 = \frac{1}{\varepsilon_1} \sum_{n=0}^{\infty} D_n r^n P_n(\cos \theta), \quad a_0 < r < b_2, \quad (8)$$

$$U_6 = \frac{1}{\varepsilon_1} \sum_{n=0}^{\infty} H_n r^{-n-1} P_n(\cos \theta), \quad r > b_2, \quad (9)$$

где $P_n(\cos \theta)$ - полиномы Лежандра первого рода нулевого порядка степени n аргумента $\cos \theta$ (неотрицательных целых индексов n). Полиномы $P_n(\cos \theta)$

ортогональны с весом $\sin \theta$ на отрезке $(0, \pi)$; норма полиномов $P_n(x)$ равна $(2/(2n + 1))^{(0.5)}$ в пространстве $L^2(-1, 1)$, в котором они составляют базис; полиномы $P_n(x)$ - ограничены единицей по абсолютной величине для $x \in [-1, 1]$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Коэффициенты $F_n, A_n, B_n, C_n, D_n, H_n$ рядов (4)-(9) будем искать в гильбертовом пространстве \tilde{l}_2 с некоторым весом, обеспечивающим выполнение условия конечности интеграла энергии и, в частности, следующих граничных условий:

$$U_2 + U_3 = U_4 + U_5 = V_1^{(N)}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad r = b_1, \quad (10)$$

$$U_2 + U_3 = U_4 + U_5 = V_2^{(M)}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad r = b_2, \quad (11)$$

$$\frac{\partial[U_2 + U_3]}{\partial r} = \frac{\partial[U_4 + U_5]}{\partial r}, \quad r = a_0, \quad 0 \leq \theta < \theta_0. \quad (12)$$

4. Парные функциональные уравнения.

Построим парные сумматорные функциональные уравнения относительно неизвестных коэффициентов $B_n, n \geq 0$ потенциала U_3 (см. (6)). Сначала получаем вспомогательные функциональные уравнения, используя граничные условия на сферическом сегменте и условие (12):

$$\sum_{n=0}^{\infty} (A_n a_0^{-n-1} + B_n a_0^n) P_n(\cos \theta) = V_0, \quad \theta_0 < \theta \leq \pi. \quad (13)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(-n - 1) a_0^{-n-2} (A_n - C_n) + n a_0^{n-1} (B_n - D_n)] P_n(\cos \theta) = 0, \quad 0 \leq \theta < \theta_0, \quad (14)$$

Исключим из уравнений (13), (14) три последовательности неизвестных коэффициентов A_n, C_n, D_n потенциалов U_2, U_4, U_5 (см. (5),(7),(8)), выразив их через коэффициенты B_n потенциала U_3 (см. (6)). Для этого в граничных условиях воспользуемся ортогональностью полиномов Лежандра $P_n(\cos \theta)$ с весом $\sin \theta$ на отрезке $(0, \pi)$ и выполним интегрирование по θ . В результате получим для каждого $n = 0, 1, 2, \dots$, систему трех линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов A_n, C_n, D_n :

$$A_n b_1^{-n-1} + B_n b_1^n = J_{n,1}^{(N)}, \quad (15)$$

$$A_n a_0^{-n-1} + B_n a_0^n - C_n a_0^{-n-1} - D_n a_0^n = 0, \quad (16)$$

$$C_n b_2^{-n-1} + D_n b_2^n = J_{n,2}^{(M)}, \quad (17)$$

где

$$J_{n,1}^{(N)} = (2n+1)/2 \int_0^\pi (U_1^{(N)}) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (18)$$

$$J_{n,2}^{(M)} = (2n+1)/2 \int_0^\pi (U_2^{(M)}) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \quad (19)$$

Для интегралов $J_{n,1}^{(N)}$ (18) и $J_{n,2}^{(M)}$ (19) величины потенциалов $U_1^{(N)}$ и $U_2^{(M)}$ введены в (1), (2).

Решение линейной системы (15)–(17) единственно, так как её определитель

$$\Delta_n^{(0)} = a_0^{-n-1} b_2^n - a_0^n b_2^{-n-1} \quad (20)$$

отличен от нуля (для каждого $n \geq 0$) в силу заданного по условию неравенства $a_0 < b_2$. Решаем линейную систему (15)–(17) по правилу Крамера, получаем:

$$A_n = -B_n b_1^{2n+1} + J_{n,1}^{(N)} b_1^{n+1}, \quad (21)$$

$$C_n = \left[B_n (a_0^n - b_1^{2n+1} a_0^{-n-1}) b_2^n + J_{n,1}^{(N)} b_1^{n+1} a_0^{-n-1} b_2^n - J_{n,2}^{(M)} a_0^n \right] / \Delta_n^{(0)} \quad (22)$$

$$D_n = \left[B_n (b_1^{2n+1} - a_0^n) b_2^{-n-1} - J_{n,1}^{(N)} \left(\frac{b_1}{a_0 b_2} \right)^{n+1} + J_{n,2}^{(M)} a_0^{-n-1} \right] / \Delta_n^{(0)}. \quad (23)$$

Подставим A_n, C_n, D_n (21)–(23) в (13), (14) и приходим к новым вспомогательным функциональным уравнениям:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Delta_n^{(0)}} \left\{ (2n+1) \left[B_n b_2^n \left(\left(\frac{b_1}{b_2} \right)^{2n+1} + 1 \right) + J_{n,1}^{(N)} \left(\frac{b_1}{b_2} \right)^{n+1} - J_{n,2}^{(M)} \right] \right\} P_n(\cos \theta) = 0, \quad 0 \leq \theta < \theta_0, \quad (24)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ B_n \left[a_0^n (1 - (b_1/a_0)^{2n+1}) + J_{n,1}^{(N)} (b_1/a_0)^{n+1} \right] \right\} P_n(\cos \theta) = V_0, \quad \theta_0 < \theta \leq \pi. \quad (25)$$

Теперь в функциональных уравнениях (24), (25), содержащих одни отыскиваемые коэффициенты B_n , выделим главную часть и подготовим уравнения к регуляризации. Для этого в (24), (25) введем параметр малости $\widetilde{\beta}_n$ и выполним переобозначения коэффициентов $B_n, n \geq 0$:

$$\widetilde{\beta}_n = \frac{\left(\frac{b_1}{a_0} \right)^{2n+1} + \left(\frac{b_1}{b_2} \right)^{2n+1} + \left(\frac{a_0}{b_2} \right)^{2n+1} \left(1 - \left(\frac{b_1}{b_2} \right)^{2n+1} \right)}{1 + \left(\frac{b_1}{b_2} \right)^{2n+1}}, \quad (26)$$

$$B_n^{(1)} = B_n b_2^n \left[1 + (b_1/b_2)^{2n+1} \right] \frac{a_0^{-1}}{\Delta_n^{(0)}}. \tag{27}$$

Этим получили парную систему сумматорных функциональных уравнений, которую далее удобно преобразовывать в систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \left\{ B_n^{(1)} + \frac{1}{\Delta_n^{(0)}} J_{n,1}^{(N)} \left(\frac{b_1}{b_2} \right)^{n+1} \right\} P_n(\cos \theta) = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) \left\{ \frac{1}{\Delta_k^{(0)}} J_{k,2}^{(M)} \right\} P_k(\cos \theta), \quad 0 \leq \theta < \theta_0, \end{aligned} \tag{28}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ B_n^{(1)} [1 - \widetilde{\beta}_n] + J_{n,1}^{(N)} \left(\frac{b_1}{a_0} \right)^{n+1} \right\} P_n(\cos \theta) = V_0, \quad \theta_0 < \theta \leq \pi. \tag{29}$$

Рассмотрим некоторые свойства системы функциональных уравнений (28), (29):

- а) в систему входят ряды по функциям Лежандра первого рода;
- б) коэффициенты в (28), (29) при неизвестных $B_n^{(1)}$ имеют асимптотику при $n \rightarrow \infty$, отличающуюся на $O(n)$;
- в) матричный оператор системы является неограниченным в пространстве $L_2(0, \pi)$.

До сих пор общего эффективного метода решения таких уравнений не найдено. Прямые численные методы решения таких систем и в настоящее время, время сверх мощных компьютеров, мало пригодны, в том числе из-за сложности оценок погрешностей решения уравнений. Вместе с тем, система (28), (29) допускает регуляризацию. Основу регуляризации составляет, в частности, применение интегральных преобразований типа Абеля. В результате в работе получена эффективно разрешимая система алгебраических уравнений второго рода. Для этого сначала сведем задачу отыскания коэффициентов $B_n^{(1)}$ (см. (28), (29)) к решению неоднородных интегральных уравнений I рода типа Абеля. С этой целью рассмотрим функциональное уравнение (29). Преобразование уравнения начнем с подстановки вместо функций Лежандра $P_n(\cos \theta)$ их интегральных представлений Мелера-Дирихле [14]

$$P_n(\cos \theta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{\theta}^{\pi} [\sin(n + \frac{1}{2})y] / \sqrt{\cos \theta - \cos y} dy. \tag{30}$$

Воспользуемся принадлежностью коэффициентов $B_n^{(1)}$ в (29) пространству l_2 и поменяем порядки интегрирования и суммирования. Этим преобразовываем сумматорное уравнение (29) в неоднородное интегральное уравнение типа Абеля первого рода

$$\int_{\theta}^{\pi} f(y)/\sqrt{\cos \theta - \cos y} dy = V_0. \quad (31)$$

Интегральное уравнение (31) имеет корневую особенность в ядре, возникшую в связи с применением (30) для функций Лежандра; здесь функция $f(y) \in L_2(0, \pi)$ и $f(y)$ содержит тригонометрический ряд. Спектр интегрального оператора, соответствующего левой части уравнения (31), имеет единственную точку сгущения $\{0\}$. Решим уравнение (31), применяя интегральное преобразование типа Абеля, и найдем единственное его решение

$$f(y) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dy} \int_y^{\pi} [V_0]/\sqrt{\cos y - \cos t} dt. \quad (32)$$

Запишем полученное решение $f(y)$ (32) в виде нового уравнения, учитывая, что $f(y)$ содержит новый тригонометрический ряд

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(1)} \left(1 - \widetilde{\beta}_n\right) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) y = \\ & = \sum_{k=0}^{\infty} \left[J_{k,1}^{(N)} \left(\frac{b_1}{b_2}\right)^{k+1} + V_0 \delta_{k,0} \right] \sin\left(k + \frac{1}{2}\right) y, \quad \theta_0 < y \leq \pi, \end{aligned} \quad (33)$$

где $\delta_{k,0}$ - символ Кронекера.

Рассмотрим уравнение (28). Для его преобразования воспользуемся разностной связью между полиномами Лежандра и производными полиномов Лежандра

$$(2n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x), \quad (34)$$

и подставим (34) в (28). Далее, учитывая равномерную сходимость рядов в (28), выполним почленное интегрирование и находим константу интегрирования, привлекая граничные условия. Теперь в обеих частях нового уравнения заменим полиномы Лежандра интегральными представлениями Мелера-Дирихле

$$P_n(\cos \theta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\theta} [\cos(n + \frac{1}{2})y]/\sqrt{\cos y - \cos \theta} dy. \quad (35)$$

Перенеся в уравнении (28) все слагаемые в левую часть равенства, воспользуемся принадлежностью коэффициентов рядов гильбертовому пространству l_2 , вновь меняем порядки суммирования и интегрирования. Этим получили однородное интегральное уравнение первого рода типа Абеля

$$\int_0^{\theta} g(y)/\sqrt{\cos y - \cos \theta} dy = 0. \quad (36)$$

Уравнение (36) имеет корневую особенность в ядре; функция $g(y) \in L_2(0, \pi)$, $g(0) = 0$, и $g(y)$ содержит тригонометрические ряды. Решим интегральное уравнение типа Абеля, применяя композицию с ядром. Найдем единственное его решение $g(y) = 0$, $0 \leq y < \theta_0$. Теперь запишем полученное решение $g(y) = 0$ в виде нового уравнения, также учитывая, что $g(y)$ содержит тригонометрические ряды. В итоге получили искомое функциональное уравнение:

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(1)} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) y = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\Delta_m^{(0)}} \left[J_{m,1} \left(\frac{b_1}{b_2}\right)^{m+1} - J_{m,2} \right] \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) y, \quad 0 \leq y < \theta_0. \quad (37)$$

Уравнения (33), (37) составляют парную систему функциональных уравнений по полному ортогональному счетному набору тригонометрических функций $\sin\left(m + \frac{1}{2}\right) y$, $m = 0, 1, 2, \dots$ в пространстве $L_2(0, \pi)$.

5. Система алгебраических уравнений второго рода.

Рассмотрим систему функциональных уравнений (33), (37) и завершим её регуляризацию. Отметим, что величины β_n - параметра малости, входящие в множители при коэффициентах $B_n^{(1)}$ в уравнении (33) имеют предел при $n \rightarrow \infty$, равный нулю, так как, согласно (26), находим, оценку для β_n :

$$\widetilde{\beta}_n = O(q^{2n+1}), \quad q = \max\left[\frac{a_0}{b_2}, \frac{b_1}{a_0}, \frac{b_1}{b_2}\right], \quad 0 < q < 1, \quad n \rightarrow \infty. \quad (38)$$

Отметим, что в уравнениях (33), (37) все ряды есть ряды Фурье в $L_2(0, \pi)$. Полуобратим систему функциональных уравнений (33), (37), используя подход, близкий к методу задачи Римана-Гильберта [5].

В результате получаем искомую систему алгебраических уравнений второго рода:

$$B_n^{(1)} = \sum_{m=0}^{\infty} B_m^{(1)} \widetilde{\beta}_n [\delta_{m,0} - \omega_{n,m}(\theta_0)] + \sum_{i=0}^{\infty} \left[J_{i,1}^{(N)} \left(\frac{b_1}{b_2}\right)^i + V_0 \delta_{i,0} \right] [\delta_{i,0} - \omega_{i,n}(\theta_0)] + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Delta_k^{(0)}} \left[J_{k,1}^{(N)} \left(\frac{b_1}{b_2}\right)^{k+1} - J_{k,2}^{(M)} \right] \omega_{k,n}(\theta_0), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (39)$$

где искомые коэффициенты $B_n^{(1)}$ - введены в (6), (27), величины $\widetilde{\beta}_n$ - введены в (26), $J_{k,1}^{(N)}$ - в (18), $J_{k,2}^{(M)}$ - в (19), $\Delta_k^{(0)}$ - в (20), V_0 - известный потенциал сферического сегмента, $\delta_{n,m}$ - символ Кронекера,

$$\omega_{k,n}(\theta_0) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin[(k-n)\theta_0]}{k-n} - \frac{1}{\pi} \frac{\sin[(k+n+1)\theta_0]}{k+n+1}, \quad k \neq n,$$

$$\omega_{n,n}(\theta_0) = \frac{1}{\pi} \theta_0 - \frac{1}{\pi} \frac{\sin[(2n+1)\theta_0]}{2n+1}, \quad k = n = 0, 1, 2, \dots \quad (40)$$

Матричный оператор системы (39) вполне непрерывен в пространстве l_2 . Это следует из того, что:

- 1) параметр малости (26) $\widetilde{\beta}_n$ убывает до нуля по степенному закону согласно оценке (38),
- 2) $\omega_{k,n}(\theta_0)$ (40) при фиксированном n и $k \rightarrow \infty$ имеют предел и предел равен нулю,
- 3) $J_{k,1}^{(N)}$ и $J_{k,2}^{(M)}$ по абсолютной величине ограничены равномерно по $k \geq 0$, отметим, что величины N, M - определяют число секций на секционированных сферах и по условию являются ограниченными,
- 4) $1/\Delta_n^{(0)} = O(a_0/b_2)^n$, $a_0 < b_2$, $n \rightarrow \infty$,
- 5) правый столбец системы (39) принадлежит l_2 , так как он состоит из двух сумм - сходящихся рядов, которые принадлежат l_2 , при этом ряды сходятся равномерно по $\theta_0 \in (0, \pi)$ (и при $b_1 < a_0 < b_2$).

Система уравнений (39) разрешима как аналитически, так и численно [15]- [18]. Численно система разрешима, например, методом редукции для любых значений $\theta_0 \in (0, \pi)$, измеряющих величину угла среза сферического сегмента. Для ускорения метода редукции необходимо в системе (39) выполнить переобозначение коэффициентов $B_n^{(1)}$ и параметра малости $\widetilde{\beta}_n$ так, что

$$B_n^{(2)} = B_n^{(1)} q^n, \quad \widetilde{\beta}_n^{(1)} = \widetilde{\beta}_n / q^n.$$

В результате вместо системы (39) получаем новую алгебраическую систему:

$$B_n^{(2)} = \sum_{m=0}^{\infty} B_m^{(2)} \widetilde{\beta}_m^{(1)} q^n [\delta_{m,0} - \omega_{n,m}(\theta_0)] +$$

$$+ \sum_{i=0}^{\infty} \left[J_{i,1}^{(N)} \left(\frac{b_1}{b_2} \right)^i + V_0 \delta_{i,0} \right] [\delta_{i,0} - \omega_{i,n}(\theta_0)] q^n +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Delta_k^{(0)}} \left[J_{k,1}^{(N)} \left(\frac{b_1}{b_2} \right)^{k+1} - J_{k,2}^{(M)} \right] \omega_{k,n}(\theta_0) q^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (41)$$

Аналитически система (39) и система (41) разрешимы, например, методом последовательных приближений для углов θ_0 таких, что $\theta_0 \ll 1$ или $\pi - \theta_0 \ll 1$. При этом для углов θ_0 , близких к π , необходимо в системе (41) перейти к углам $\theta_1 = \pi - \theta_0$ и вновь выполнить переход от $B_n^{(2)}$ к $B_n^{(3)} = (-1)^n B_n^{(2)}$, $n \geq 0$.

6. Некоторые варианты постановки и решения задачи.

Постановка исходной задачи электростатики предусматривает одновременное рассмотрение нескольких независимых задач. Отметим, что прикладное значение имеет знание величин потенциалов и полей вблизи сферических закруглений узлов и приборов электронных систем. Такое распределение поля можно первоначально моделировать несколькими вариантами - с помощью варьирования параметрами задачи:

- а) выбором величин радиусов $r = b_1, r = a_0, r = b_2$,
- б) выбором чисел N и M - числа секций на поверхностях секционированных сфер,
- в) выбором значений потенциалов V для каждой секции,
- г) выбором азимутальной ширины по θ каждой секции.

Эти варианты постановки задачи соответствуют разбиению пространства

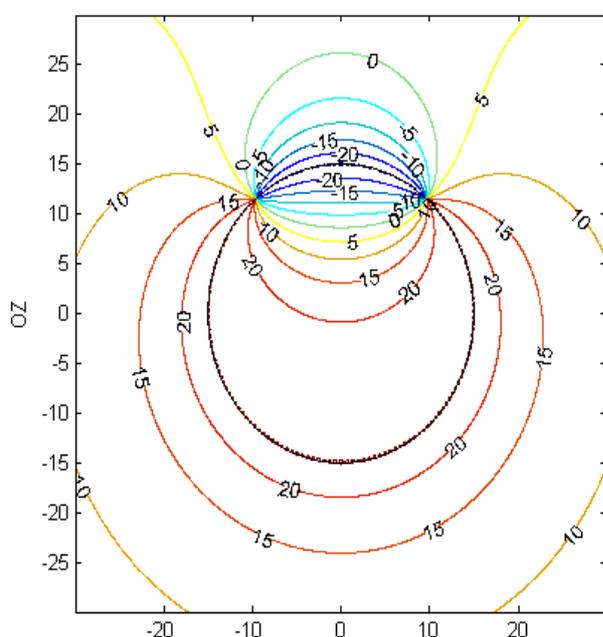


Рис. 1: Электростатические потенциалы двух секционированных сфер.

R^3 на четыре области Q_1, \dots, Q_4 . Сначала рассмотрим тестовые задачи, для которых решения строятся в явном виде; это задачи для областей Q_1 и Q_4 , для которых полагаем, что $\theta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi]$. В области Q_1 , где $0 \leq r < b_1$, отыскиваем только один потенциал U_1 (см.(4)). Для потенциала U_1 коэффициенты F_n ряда Фурье находим в явном виде: $F_n = J_{n,1}^{(N)}/(b_1)^n$, $n \geq 0$, $b_1 \neq 0$, где величины $J_{n,1}^{(N)}$ введены в (18). В области Q_4 , для которой $r > b_2 > 0$, отыскиваем также только один потенциал U_6 (см. (9)). Коэффициенты H_n для потенциала U_6 таковы: $H_n = J_{n,2}^{(M)}(b_2)^{n+1}$, $n \geq 0$,

где значения $J_{n,1}^{(M)}$ определены в (19). К рассмотренным двум вариантам сводится случай, когда радиус сферического сегмента ($r = a_0$) и радиус внешней секционированной сферы ($r = b_2$) устремлены к бесконечности. В этом случае области Q_2, Q_3 и Q_4 объединяются в одну область Q , для которой $r > b_1$. При этом ищем потенциал U , ряд Фурье которого представим в виде ряда для U_6 с коэффициентами L_n . Коэффициенты L_n находим такими: $L_n = J_{n,1}^{(N)}/(b_1)^{n+1}, n \geq 0$.

(см. рис.1). На рис. 1 рассмотрен тестовый вариант, для которого даны:

- 1) потенциалы $V_1^{(N)} = -25$ и $V_2^{(M)} = 25$ соответственно для верхней и нижней секционированных сфер,
- 2) $r = b_1 = 7.5$,
- 3) $\theta_{1,1} = \theta_{1,2} = 40$ градусов - полярный угол, соответствующий плоскости, разделяющей секционированные сферы,
- 4) $V_0 = 0$,
- 5) $a_0, b_2 \rightarrow \infty$.

Рассмотрим варианты постановки задачи, соответствующие построению решений в областях Q_2 и Q_3 , для которых $r \in [b_1, b_2], \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi]$. В этих областях ищем четыре потенциала U_2, \dots, U_5 (см. (5)-(8)). Тестовым вариантом в этом случае можно рассматривать такой, когда угол среза сферического сегмента является максимальным, т.е. $\theta_0 = \pi$. В этом случае сферический сегмент исчезает. Для этого варианта полагаем, по определению, что потенциалы U_3 (6) и U_4 (7) отсутствуют и коэффициенты рядов Фурье (6), (7) для них равны нулю, $B_n = C_n = 0$. Поиску подлежат потенциалы U_2 (5) и U_5 (8), для которых коэффициенты A_n и D_n рядов Фурье находим из граничных условий:

$$U_2 + U_5 = V_1^{(N)}, r = b_1; U_2 + U_5 = V_2^{(M)}, r = b_2; \theta \in (0, \pi), \quad (42)$$

для которых потенциалы $V_1^{(N)}, V_2^{(M)}$ заданы и введены в (1), (2). Из (42) получаем коэффициенты A_n и D_n :

$$A_n = b_1^{n+1} [J_{n,1}^N - J_{n,2}^M (b_1/b_2)^n] / [1 - (b_1/b_2)^{2n+1}],$$

$$D_n = b_2^{-n} [J_{n,2}^M - J_{n,1}^N (b_1/b_2)^n] / [1 - (b_1/b_2)^{2n+1}], n = 0, 1, 2, \dots$$

7. Выводы.

В работе решена задача электростатики на сферическом сегменте, размещенном между двумя секционированными сферами. Решение протестировано аналитически и численно рассмотрением нескольких ключевых предельных вариантов постановки задачи. Алгоритм решения задачи построен по блочному принципу и допускает применение для других задач на сферических и, например, на сферо - конических структурах.

Список литературы

1. Конторович М.И., Лебедев Н.Н. Об одном методе решения некоторых задач дифракции и родственных ей проблем. // Журн. Тех. Физ. - 1938. - Т.8, **10-11**. - С. 1193-1206.
2. Гринберг Г.А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. - М.:Изд-во АН СССР,1948. - 727с.
3. Уфлянд Я.С. О решении одного класса задач электростатики методом парных рядов.//Письма в Журн. Тех. Физ. . - 1976. - Т.2, **17**. - С. 794-798.
4. Резуненко В.А. Интегральное уравнение задачи электростатики для сферического сегмента и диэлектрического закругления конуса.// Вісн. ХНУ ім В.Н.Каразіна, Серія "Матем., прикладна матем. і механіка". - 2006. - Т. 749. - С. 50-56.
5. Агранович З.С., Марченко В.А., Шестопапов В.П. Дифракция электромагнитных волн на плоских металлических решетках. // Журн. техн. физ. - 1962. - Т. 32,**4**. - С. 381-394.
6. Шестопапов В.П., Литвиненко Л.Н., Масалов С.А., Сологуб В.Г. Дифракция волн на решетках. - Харьков: Изд. ХГУ, - 1973. - 288 с.
7. Радин А.М., Резуненко В.А., Шестопапов В.П. Излучение волн сферой с отверстием. //Журн. вычисл. матем. и матем. физ. - 1977. -Т.17, **2**. - С. 394-406.
8. Дорошенко В.А., Кравченко В.Ф. Возбуждение незамкнутых конических и биконических структур.//Электромагнитные волны и электронные системы. - 2003. - Т.8, **6**. - С.4-78.
9. Сиренко Ю.К. Моделирование и анализ переходных процессов в открытых периодических, волноводных и компактных резонаторах. - Харьков: ЭДЕНА, - 2003. - 363 с.
10. Свищев Ю.В., Тучкин Ю.А. Векторная задача дифракции электромагнитных волн на двух сферических сегментах.// ДАН УССР, сер. А. - 1987. - Т. 12. - С. 56-60.
11. Резуненко В.А. Рассеяние плоской волны сферой с круговым отверстием. // Электромагнитные волны и электронные явления. - 2005. - Т. 10, **8**. С. 5-15.
12. Куриляк Д.Б., Назарчук З.Т. Аналітико-числові методи в теорії дифракції хвиль на конічних і клиноподібних поверхнях. - Київ: Наукова Думка, - 2006. - 275 с.

13. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. - М.: -Мир, - 1987. - 312 с.
14. Суетин П.К. Эллиптические ортогональные многочлены. - М.: Наука, - 1979. - 416 с.
15. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. -Киев: Наукова Думка, - 1977. - 362 с.
16. Садовничий В.А. Теория операторов.- М.: Высшая школа, - 1999. - 368 с.
17. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. - Киев: Наукова Думка, - 1986. - 543 с.
18. Singh B.M., Rokne J.G. and Dhaliwal R.S. Two-Dimensional Electrostatic Problem in a Plane With Earthed Elliptic Cavity due to One or Two Collinear Charged Electrostatic Strips //International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. Volume 2007, Article ID 60595, 9 pages, 2007. doi:10.1155/2007/60595.

Статья получена: 10.10.2010; окончательный вариант: 15.11.2010;
принята: 19.11.2010.