Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517 № 931, 2010, с.20–32

Нормальные функции в плоскости без точки нуль

Л.Д. Радченко

Харьковский национальный университет имени В.Н.Каразина, пл. Свободы, 4, 61077, Харьков, Украина
liudmyla.radchenko@gmail.com

В работе изучаются мероморфные функции $f(z)$ в $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$, для которых семейство $\{f(\lambda z)\}_{\lambda\in\mathbb{C}^*}$ является нормальным. Такие функции (при дополнительном ограничении — наличие полюса или устранимой особенности в нуле) изучал А. Островский. Он получил их представление в терминах нулей и полюсов. Позже, А. Еременко предположил, что результат Островского верен в общем случае. В данной работе приводится подробное доказательство, указанного Еременко результата.

Радченко Л.Д., **Нормальні функції у площині з вилученим початком координат**. У роботі вивчаються мероморфні функції $f(z)$ у $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$, для яких сімейство $\{f(\lambda z)\}_{\lambda\in\mathbb{C}^*}$ нормальне. Такі функції (при додатковому обмеженні — наявність полюса або переборної особливості у нулі) вивчав А. Островський. Він отримав їх представлення в термінах нулів і полюсів. Пізніше, А. Єрьоменко припустив, що результат Островського вірний у загальному випадку. В даній роботі наводиться докладний доказ, зазначеного Єрьоменком результату.

L.D. Radchenko, **Normal functions in a punctured plane**. In given work meromorphic functions $f(z)$ in $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ are concerned. For these functions the family $\{f(\lambda z)\}_{\lambda\in\mathbb{C}^*}$ is normal. Such functions (with additional restriction, namely, presence of a pole or removable singularity in zero) were studied by A. Ostrovsky. He received its representation in terms of zeros and poles. Later A. Eremenko assumed that Ostrovsky's result is true in the general case. In this work we give the detailed proof of this result.

2000 Mathematics Subject Classification 30D45.

1 Обозначения и основной результат

Данная работа является продолжением работы [4]. Напомним обозначения из первой части.

Пусть f – мероморфная функция в $\mathbb{C}^*$, a_k, b_k – ее нули и полюсы. Последовательности (a_k) и (b_k) могут быть конечными или бесконечными в одну или обе стороны, при этом будем считать, что $|a_k|$ и $|b_k| < 1$ при $k < 0$, $|a_k|$ и $|b_k| \geqslant 1$ при $k \geqslant 0$. Отметим, что $a_k, b_k \to 0$, $k \to -\infty$ и $a_k, b_k \to \infty$, $k \to +\infty$, если последовательности бесконечны в соответствующую сторону. Положим $\mathfrak{M}(r) = \dfrac{\prod_{k:0\leqslant\frac{\ln|a_k|}{\ln r}\leqslant 1}\frac{r}{|a_k|}}{\prod_{k:0\leqslant\frac{\ln|b_k|}{\ln r}\leqslant 1}\frac{r}{|b_k|}}$.

Через $\Gamma(r,R)$ обозначим открытое кольцо $\{z \in \mathbb{C} : r<|z|<R\}$. На множестве значений, т. е. в замкнутой комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, всегда рассматривается сферическая метрика ρ_S. На множестве мероморфных функций в Ω всегда, если не оговорено противное, рассматривается равномерная сходимость на компактах в Ω. Функция называется нормальной в $\mathbb{C}^*$, если из любой последовательности $\lambda_n \in \mathbb{C}^*$ можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся на компактах относительно сферической метрики. При проверке нормальности мероморфной функции в $\mathbb{C}^*$ можно ограничиться автоморфизмами $\lambda_n \to 0$ или $\lambda_n \to \infty$, т. к. если $\lambda_n \to \lambda_0 \neq 0, \infty$, то всегда $f(\lambda_n z) \to f(\lambda_0 z)$. Поскольку преобразование $z \to \dfrac{1}{z}$ сохраняет нормальность и меняет местами особенности в нуле и бесконечности, то при изучении характера особенностей в этих точках достаточно ограничиться особенностью в нуле. Через $cardA$ обозначим количество элементов конечного множества A.

Теперь сформулируем основной результат этой части работы.

Теорема 1. *Функция* $f\colon \mathbb{C}^* \to \overline{\mathbb{C}}$ *нормальна тогда и только тогда, когда* $f(z)$ *имеет вид*

$$f(z) = az^m \frac{\prod_{k\geqslant 0}(1-\frac{z}{a_k})\prod_{k<0}(1-\frac{a_k}{z})}{\prod_{k\geqslant 0}(1-\frac{z}{b_k})\prod_{k<0}(1-\frac{b_k}{z})}, \qquad (1)$$

для некоторых $a \in \mathbb{C}$, $m \in Z$, $a_k, b_k \in \mathbb{C}^*$ *и подчиняется следующим условиям:*

1. *Для всех* $0 < r_1 < r_2 < \infty$ *величина* $|card\{k : r_1<|a_k|<r_2\} - card\{k : r_1<|b_k|<r_2\}|$ *ограничена константой, не зависящей от* r_1, r_2.

2. *Для всех* $r > 0$ *величины* $card\{k : r\leqslant|a_k|\leqslant 2r\}$ *и* $card\{k : r\leqslant|b_k|\leqslant 2r\}$ *ограничены константой, не зависящей от* r.

3. *Величина* $\ln\mathfrak{M}(r) + m\ln r$ *равномерно ограничена сверху для* r *из множества* $\{r > 0 : r = |a_k|\}$ *и снизу – для* r *из множества* $\{r > 0 : r = |b_k|\}$.

4. *Величина* $\inf_{k,l}\left|\dfrac{a_k}{b_l}-1\right|$ *строго положительна.*

Эта теорема в случае, когда в нуле устранимая особенность или полюс, была доказана А. Островским (см. [1], [3]). В общем случае она была сформулирована без доказательства А. Еременко (см. [2]).

Следствие. *Если* f_1, f_2 *— нормальные функции с одинаковыми нулями и полюсами с учетом кратности, то* $f_1 = Kf_2$, *где* $K \in \mathbb{C}$.

2 Вспомогательные результаты

В первой части этой работы [4] были доказаны следующие свойства нормальных функций.

Теорема 2 [4]. *Величина* $|card\{k : a_k \in \Gamma(r_1, r_2)\} - card\{k : b_k \in \Gamma(r_1, r_2)\}|$ *ограничена равномерно при* $0 < r_1 < r_2 < \infty$.

Теорема 3 [4]. *Величина* $card\{k : a_k \in \overline{\Gamma(r, 2r)}\} + card\{k : b_k \in \overline{\Gamma(r, 2r)}\}$ *ограничена равномерно при* $r > 0$.

Теорема 4 [4]. *Величина* $\inf_{k,l}\left|\dfrac{a_k}{b_l}-1\right|$ *строго положительна.*

Теорема 5 [4]. *Если нормальная функция в* $\mathbb{C}^*$ *в некотором круге с выколотым центром* $\{z : 0<|z|<\varepsilon\}$ *выпускает хотя бы одно значение, то она имеет в нуле либо устранимую особенность, либо полюс. Аналогичное утверждение верно для окрестности бесконечности.*

Покажем, что при проверке нормальности функции в $\mathbb{C}^*$ можно рассматривать не все последовательности $(\lambda_n) \subset \mathbb{C}^*$, а также проверять сходимость не на всех кольцах, а только на фиксированном кольце в $\mathbb{C}^*$.

Предложение 1. *Пусть* r, R *– произвольные числа,* $0 < r < R < \infty$, f *– мероморфная функция в* $\mathbb{C}^*$. *Если из любой последовательности чисел* p_n *можно выделить подпоследовательность* p'_n *такую, что* $f(p'_n z)$ *сходится равномерно по* $z \in \{r \leqslant |z| \leqslant R\}$, *то* f *нормальна в* $\mathbb{C}^*$.

Доказательство. Переходя к последовательности tp_n, получаем, что сходящуюся подпоследовательность можно выбрать для кольца вида $\{tr \leqslant |z| \leqslant tR\}$. Разобьем $\mathbb{C}^*$ на кольца $\{r_1 \leqslant |z| \leqslant r_2\}$ так, что $\dfrac{r_2}{r_1} = \dfrac{R}{r}$. На каждом из таких колец из любой последовательности можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность. Применяя диагональный процесс, получим подпоследовательность, которая сходится на любом компакте в $\mathbb{C}^*$. ■

Предложение 2. *Пусть* $\{p_n\}$ *— последовательность положительных чисел,* $p_n \to \infty$ *при* $n \to +\infty$ *и* $p_n \to 0$ *при* $n \to -\infty$, $ap_n \leqslant p_{n-1} < p_n$ *при некотором* $a < 1$. *Тогда мероморфная функция* $f\colon \mathbb{C}^* \to \overline{\mathbb{C}}$ *нормальна в том и только том случае, если* $\{f(p_n z)\}$ *– нормальное семейство.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Покажем, что это условие является достаточным. Пусть h_k – произвольная последовательность. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\arg h_k \to \alpha \in [0, 2\pi)$.

Выберем подпоследовательность p_{n_k} так, чтобы $p_{n_k-1} < |h_k| \leqslant p_{n_k}$, и проредим так, чтобы $f(p_{n_k}z)$ сходилось равномерно на компактах в $\mathbb{C}^*$ к функции $g(z)$. Можно, проредив при необходимости подпоследовательность, считать, что $\dfrac{|h_k|}{p_{n_k}} \to b \in (a,1]$.

Имеем: $\rho\left(f(h_k z), g(be^{i\alpha}z)\right) \leqslant \rho\left(f(p_{n_k}\frac{h_k}{p_{n_k}}z), g(\frac{h_k}{p_{n_k}}z)\right) + \rho\left(g(\frac{h_k}{p_{n_k}}z), g(be^{i\alpha}z)\right)$. Оба слагаемых в последней сумме стремятся к нулю при $k \to \infty$. ■

Предложение 3. *Мероморфная функция* $f\colon \mathbb{C}^* \to \overline{\mathbb{C}}$ *нормальна в том и только том случае, если* $\{f(2^n z)\}$ *нормально в кольце* $\{\frac{1}{2} \leqslant |z| \leqslant 2\}$.

Доказательство. Необходимость очевидна.

Покажем, что данное утверждение является достаточным. Аналогично доказательству предложения 2 с $a = \frac{1}{2}$ рассмотрим произвольную подпоследовательность h_k, $\arg h_k \to \alpha \in [0, 2\pi)$. Выберем подпоследовательность n_k так, чтобы $2^{n_k-1} < h_k \leqslant 2^{n_k}$ и проредим так, чтобы $f(2^{n_k}z)$ сходилось равномерно на компактах в $\mathbb{C}^*$ к функции $g(z)$. Как и раньше, можно считать, что $\frac{|h_k|}{2^{n_k}} \to b \in (\frac{1}{2}, 1]$. При $z \in \{\frac{1}{2} \leqslant |z| \leqslant 2\}$, имеем $be^{i\alpha}z \in \bigcap_{b\in(\frac{1}{2},1]}\{bz : \frac{1}{2} \leqslant |z| \leqslant 2\} = \{z : \frac{1}{2} \leqslant |z| \leqslant 1\}$ и $\rho(f(h_k z), g(be^{i\alpha}z)) \to 0$ при $k \to \infty$. Следовательно, произвольное семейство нормально в кольце $\{z : \frac{1}{2} \leqslant |z| \leqslant 1\}$. Отсюда, применяя предложение 1, получим требуемое утверждение. ■

Далее докажем несколько свойств функции $\mathfrak{M}(r)$.

Прежде всего отметим, что при замене f на $\dfrac{1}{f}$, $\mathfrak{M}(r)$ меняется на $\dfrac{1}{\mathfrak{M}(r)}$.

Далее имеем,

$$\ln \mathfrak{M}(r) = \begin{cases} \int\limits_1^r \frac{card\{k:1<|a_k|<t\} - card\{k:1<|b_k|<t\}}{t} dt, & \text{если } r \geqslant 1; \\ \int\limits_r^1 \frac{card\{k:t<|a_k|<1\} - card\{k:t<|b_k|<1\}}{t} dt, & \text{если } r < 1. \end{cases} \tag{2}$$

Действительно, это равенство получается из определения $\mathfrak{M}(r)$ с помощью интегрирования по частям ввиду того, что

при $r > 1$ имеем $\{k : 0 \leqslant \dfrac{\ln \alpha_k}{\ln r} \leqslant 1\} \equiv \{k : 1 \leqslant \alpha_k \leqslant r\}$.

при $r < 1$ имеем $\{k : 0 \leqslant \dfrac{\ln \alpha_k}{\ln r} \leqslant 1\} \equiv \{k : r \leqslant \alpha_k \leqslant 1\}$.

Лемма 1. *Для любой мероморфной функции в* $\mathbb{C}^*$ *существуют числа* $A, A' \in \mathbb{R}$ *такие, что для* $r > 1$ *верно* $\ln \mathfrak{M}(r) + A \ln r = \dfrac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln |f(re^{i\theta})|\, d\theta - \dfrac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln |f(e^{i\theta})|\, d\theta$, *а для* $r < 1$ *верно аналогичное равенство с* A' *вместо* A.

Доказательство. Пусть $r > 1$, $\{a_k\}_{k=1}^n$ и $\{b_l\}_{l=1}^m$ — нули и полюсы $f(z)$ в кольце $\{1 \leqslant |z| \leqslant r\}$, а $\{a_k\}_{k=n+1}^{n'}$ и $\{b_l\}_{l=m+1}^{m'}$ — нули и полюсы $f(z)$ в кольце $\{r < |z| \leqslant r'\}$ для некоторого $r' > r$. Введем функцию $g(z) = f(z)\dfrac{\prod_{l=1}^{m'}(z - b_l)}{\prod_{k=1}^{n'}(z - a_k)}$.

Она голоморфна в кольце $\{1\leqslant|z|\leqslant r'\}$ и не имеет там нулей. Среднее по окружности $\{|z| = t\}$ от гармонической функции в кольце $\{1\leqslant|z|\leqslant r'\}$ есть линейная функция от $\ln t$, поэтому гармоническая в этом кольце функция $\ln|g(z)|$ при некотором $A = A(r')$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln|g(re^{i\theta})|\,d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln|g(e^{i\theta})|\,d\theta = A\ln r. \tag{3}$$

С другой стороны, используя равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln|\alpha+\beta e^{i\theta}|\,d\theta = \ln\max\{|\alpha|,|\beta|\}, \tag{4}$$

имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln|g(re^{i\theta})|\,d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln|g(e^{i\theta})|\,d\theta =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln|f(e^{i\theta})|\,d\theta + \sum_{j=1}^{m}\ln\frac{r}{|b_j|} - \sum_{i=1}^{n}\ln\frac{r}{|a_i|} =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln|f(e^{i\theta})|\,d\theta -$$
$$- \int_{1}^{r}\frac{card\{k: 1\leqslant|a_k|\leqslant t\} - card\{k: 1\leqslant|b_k|\leqslant t\}}{t}\,dt.$$

Используя (3) и (2), получим, что справедливо равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln|f(e^{i\theta})|\,d\theta = \ln\mathfrak{M}(r) + A\ln r.$$

Отсюда, в частности, следует, что A не зависит от r', значит, утверждение леммы доказано для всех $r > 1$.

При $r < 1$ также обозначим через $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ и $\{b_l\}_{l=1}^{m}$ нули и полюсы $f(z)$ в кольце $\{r\leqslant|z|\leqslant1\}$, а через $\{a_k\}_{k=n+1}^{n'}$ и $\{b_l\}_{l=m+1}^{m'}$ — в кольце $\{r'\leqslant|z|<r\}$, для некоторого $r' < r$. Аналогично, введем функцию $g(z) = f(z)\dfrac{\prod_{l=1}^{m'}(z-b_l)}{\prod_{k=1}^{n'}(z-a_k)}$, для которой при некотором $A_1 = A_1(r')$ будет выполнено

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln|g(e^{i\theta})|\,d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln|g(re^{i\theta})|\,d\theta = -A_1\ln r. \tag{5}$$

Далее имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|g(e^{i\theta})|\,d\theta-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|g(re^{i\theta})|\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|f(e^{i\theta})|\,d\theta-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta+\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{|a_i|}{r}-\sum_{j=1}^{m}\ln\frac{|b_j|}{r}+\ln r(card\{k:r'\leqslant|a_k|\leqslant 1\}-$$

$$-\,card\{k:r'\leqslant|b_k|\leqslant 1\})=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|f(e^{i\theta})|\,d\theta-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta+$$

$$+\int\limits_{r}^{1}\frac{card\{k:t\leqslant|a_k|\leqslant 1\}-card\{k:t\leqslant|b_k|\leqslant 1\}}{t}\,dt+$$

$$+\ln r(card\{k:r'\leqslant|a_k|\leqslant 1\}-card\{k:r'\leqslant|b_k|\leqslant 1\}).$$

Обозначая через $A'=A_1+card\{k:r'\leqslant|a_k|\leqslant 1\}-card\{k:r'\leqslant|b_k|\leqslant 1\}$, $A'=A'(r')$ и используя (5) и (2), получим, что для мероморфной функции в кольце $\{r\leqslant|z|\leqslant 1\}$ справедливо равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|f(e^{i\theta})|\,d\theta=\ln\mathfrak{M}(r)+A'\ln r.$$

Отсюда следует, что A' не зависит от r'. Утверждение леммы доказано полностью. ■

Замечание 1. *Если функция $f(z)$ допускает представление (1), то утверждение леммы 1 выполняется с $A=A'=m$.*

Действительно, используя (4), получим

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|f(e^{i\theta})|\,d\theta=m\ln r+\sum_{k\geqslant 0}\ln\max\{1,\frac{r}{|a_k|}\}+$$

$$+\sum_{k<0}\ln\max\{1,\frac{|a_k|}{r}\}-\sum_{k\geqslant 0}\ln\max\{1,\frac{r}{|b_k|}\}-\sum_{k<0}\ln\max\{1,\frac{|b_k|}{r}\}.$$

Пользуясь (2), для всех r имеем $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|f(e^{i\theta})|\,d\theta=$ $=m\ln r+\ln\mathfrak{M}(r)$. Поэтому $A=A'=m$.

Лемма 2. *Пусть f_n – мероморфные функции в $\mathbb{C}^*$, $f_n(z)\to f(z)\not\equiv 0$ – равномерно на компактах в $\mathbb{C}^*$. Тогда для всех $r>0$ верно:* $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|f_n(re^{i\theta})|d\theta\to\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|f(re^{i\theta})|d\theta$ *при $n\to\infty$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное $r > 0$. Если на окружности $\{|z| = r\}$ нет ни нулей, ни полюсов функции $f(z)$, то утверждение Леммы очевидно. Пусть $a_1, \ldots, a_k$, $b_1, \ldots, b_l$ — нули и полюсы $f(z)$ на окружности $\{|z| = r\}$. Рассмотрим a_{in}, b_{jn} — нули и полюсы функций $f_n(z)$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, l$. Перенумеруем их так, чтобы $a_{in} \to a_i$, $b_{jn} \to b_j$ при $n \to \infty$. Введем функции $\widetilde{f}(z) = \dfrac{f(z)\prod_{j=1}^{l}(z-b_j)}{\prod_{j=1}^{k}(z-a_j)}$, $\widetilde{f_n}(z) = \dfrac{f_n(z)\prod_{j=1}^{l}(z-b_{jn})}{\prod_{j=1}^{k}(z-a_{jn})}$. Зафиксируем $\delta > 0$ такое, что на окружностях $|z| = r - \delta$ и $|z| = r + \delta$ нет нулей и полюсов функции $f(z)$. При $n \to \infty$, последовательность функций $\widetilde{f_n}(z)$ сходится к функции $\widetilde{f}(z)$ равномерно на этих окружностях. Используя принцип максимума, получим, что $\widetilde{f_n}(z)$ сходится к $\widetilde{f}(z)$ на окружности $|z| = r$. Поэтому $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln|\widetilde{f_n}(re^{i\theta})|d\theta$ стремится к $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln|\widetilde{f}(re^{i\theta})|d\theta$ при $n \to \infty$. Ввиду (4), поскольку $a_{nj} \to a_j$, получим, что $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln|re^{i\theta} - a_{nj}|d\theta$ стремится к $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln|re^{i\theta} - a_j|d\theta$. Значит, $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln|f_n(re^{i\theta})|d\theta$ стремится к $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln|f(re^{i\theta})|d\theta$ при $n \to \infty$. ■

Теорема 6. *Пусть f – нормальная мероморфная функция в $\mathbb{C}^*$. Тогда величины $\ln\mathfrak{M}(r) + A\ln r$ и $\ln\mathfrak{M}(r) + A'\ln r$ ограничены сверху для всех $r \in \{|a_k|\}_{k\geqslant 0}$, соответственно для всех $r \in \{|a_k|\}_{k<0}$, и снизу – для всех $r \in \{|b_k|\}_{k\geqslant 0}$, соответственно для всех $r \in \{|b_k|\}_{k<0}$, где $A, A' \in \mathbb{R}$ — константы из леммы 1.*

Доказательство. Докажем теорему для $r \in \{|a_k|\}_{k\geqslant 0}$. Рассмотрим произвольную последовательность индексов $p_n \to +\infty$ при $n \to \infty$. Последовательность функций $f(a_{p_n}z)$ нормальна в кольце $\{\frac{1}{2}\leqslant|z|\leqslant 2\}$. Следовательно, можно найти подпоследовательность $f(a_{p_{n_k}}z)$, равномерно сходящуюся к предельной функции $f_0(z)$ в этом кольце. Ввиду того, что $a_{p_{n_k}}$ — нули f, имеем: $f_0(1) = 0$. Ввиду леммы 1,

$$\ln\mathfrak{M}(|a_{p_{n_k}}|) + A\ln(|a_{p_{n_k}}|) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln|f(a_{p_{n_k}}e^{i\theta})|d\theta - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln|f(e^{i\theta})|d\theta. \quad (6)$$

При $f_0(z) \not\equiv 0$, используя предыдущую лемму, получим, что первое слагаемое правой части при $k \to \infty$ имеет своим пределом конечное число $\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln|f_0(e^{i\theta})|d\theta$.

При $f_0(z) \equiv 0$, первое слагаемое правой части стремится к $-\infty$, поэтому также правая часть ограничена сверху. Следовательно и величина $\ln\mathfrak{M}(|a_{p_{n_k}}|) + A\ln|a_{p_{n_k}}|$ ограничена сверху.

Для $r \in \{|a_k|\}_{k<0}$, достаточно заменить $f(z)$ на $f(\frac{1}{z})$.

Для $r \in \{|b_k|\}$ достаточно заменить f на $\dfrac{1}{f}$. ■

3 Доказательство основного результата

Достаточность. Покажем, что при выполнении условий 1) - 4) функция вида $f(z) = az^m \dfrac{\prod_{k\geqslant 0}(1-\frac{z}{a_k})\prod_{k<0}(1-\frac{a_k}{z})}{\prod_{k\geqslant 0}(1-\frac{z}{b_k})\prod_{k<0}(1-\frac{b_k}{z})}$ является нормальной. Для этого (согласно предложению 3) достаточно показать, что семейство $\{f(2^n z)\}$ нормально в $\{\frac{1}{2}\leqslant |z|\leqslant 2\}$.

Заметим, что если достаточные условия теоремы выполнены для функции $f(z)$, то они выполнены для функции $f(\frac{1}{z})$. Действительно, пусть a_k и b_k – нули и полюсы f соответственно. Тогда $\frac{1}{a_k}$ и $\frac{1}{b_k}$ – нули и полюсы $f(\frac{1}{z})$. Проверка свойств 1) - 3) очевидна. Свойство 4) легко доказывается "от противного". Так как проверка нормальности семейства $\{f(2^n z)\}$ при $n\to -\infty$ сводится к проверке нормальности семейства $\{f(\frac{1}{2^n z})\}$ при $n\to +\infty$, то можно проверять только нормальность $\{f(2^n z)\}$ при $n\to +\infty$.

Мы можем написать:

$$f(2^n z) = P_{1n}(z)P_{2n}(z)Q_n(z)R_n(z), \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned}
P_{1n}(z) &= \frac{\prod_{k:|a_k|,|b_k|\leqslant 2^{n-2}}(1-\frac{a_k}{2^n z})}{\prod_{k:|a_k|,|b_k|\leqslant 2^{n-2}}(1-\frac{b_k}{2^n z})}\\
P_{2n}(z) &= \frac{\prod_{k:|a_k|,|b_k|\geqslant 2^{n+2}}(1-\frac{2^n z}{a_k})}{\prod_{k:|a_k|,|b_k|\geqslant 2^{n+2}}(1-\frac{2^n z}{b_k})}\\
Q_n(z) &= (-1)^{p_n+q_n}(2^n z)^m \frac{\frac{2^n z}{a_1}\cdots\frac{2^n z}{a_{p_n}}}{\frac{2^n z}{b_1}\cdots\frac{2^n z}{b_{q_n}}}\\
R_n(z) &= \frac{\prod_{k:2^{n-2}<|a_k|,|b_k|<2^{n+2}}(1-\frac{2^n z}{a_k})}{\prod_{k:2^{n-2}<|a_k|,|b_k|<2^{n+2}}(1-\frac{2^n z}{b_k})},
\end{aligned}$$

где p_n и q_n — количество нулей и полюсов функции f в кольце $\{1\leqslant |z|\leqslant 2^{n-2}\}$.

Положим $\Gamma_s = \{z : 2^{s-1}\leqslant |z|\leqslant 2^{s+1}\}$, $s\in\mathbb{Z}$.

Оценим $P_{1n}(z)$ в $\{\frac{1}{2}\leqslant |z|\leqslant 2\}$. По свойству 2 можно найти такое C_1, что имеется не более C_1 точек a_k в кольце Γ_{n-3}, не более C_1 точек a_k в кольце $\Gamma_{n-5}, \ldots$

при $a_k\in\Gamma_{n-3} : |\ln|1-\frac{a_k}{2^n z}||\leqslant \frac{|a_k|}{2^n|z|} < \frac{1}{2}$,

при $a_k\in\Gamma_{n-5} : |\ln|1-\frac{a_k}{2^n z}|| < \frac{1}{2^3}$,

при $a_k\in\Gamma_{n-7} : |\ln|1-\frac{a_k}{2^n z}|| < \frac{1}{2^5}$ и т.д.

Точно также оценивается $\left|\ln|1-\frac{b_k}{2^n z}|\right|$.

Имеем

$$|\ln|P_{1n}(z)|| = \left| C_1\sum_{k<0}\ln|1-\tfrac{a_k}{2^n z}| - C_1\sum_{k<0}\ln|1-\tfrac{b_k}{2^n z}|\right| < 2C_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2k+1}} < 2C_1.$$

Таким образом, в $\{\frac{1}{2}<|z|<2\}$

$$\frac{1}{e^{2C_1}} \leqslant |P_{1n}(z)| \leqslant e^{2C_1} \tag{8}$$

Оценим $P_{2n}(z)$ в $\{\frac{1}{2}<|z|<2\}$. По свойству 2 можно найти такое C_1, что имеется не более C_1 точек a_k в кольце Γ_{n+3}, не более C_1 точек a_k в кольце $\Gamma_{n+5}, \ldots$

при $a_k \in \Gamma_{n+3} : |\ln|1-\frac{2^n z}{a_k}|| \leqslant \frac{2^n|z|}{|a_k|} < \frac{2^{n+1}}{2^{n+2}} = \frac{1}{2}$,

при $a_k \in \Gamma_{n+5} : |\ln|1-\frac{2^n z}{a_k}|| < \frac{1}{2^3}$, и т.д.

Точно также оценивается $|\ln|1-\frac{2^n z}{b_k}||$.

Аналогично предыдущему случаю получим, что в $\{\frac{1}{2}<|z|<2\}$:

$$\frac{1}{e^{2C_1}} \leqslant |P_{2n}(z)| \leqslant e^{2C_1} \tag{9}$$

Оценим $Q_n(z)$. Легко видеть, что $|Q_n(z)| = (4|z|)^{p_n-q_n}(2^n|z|)^m\mathfrak{M}(2^{n-2})$. Имеем,

$$\ln\frac{\mathfrak{M}(2^n)}{\mathfrak{M}(2^{n-2})} = \ln\mathfrak{M}(2^n) - \ln\mathfrak{M}(2^{n-2}) =$$

$$= \int\limits_{2^{n-2}}^{2^n} card\{k : 1<|a_k|<t\} - card\{k : 1<|b_k|<t\}dt.$$

В силу свойства 1, последняя разность не превосходит $C_2 \ln 4$, следовательно, отношение $\dfrac{\mathfrak{M}(2^n)}{\mathfrak{M}(2^{n-2})}$ ограничено. Согласно свойству 1, $|p_n - q_n| < C_2$. Следовательно, в кольце $\{\frac{1}{2} \leqslant |z| \leqslant 2\}$ верна следующая оценка:
$2^{-3C_2+(n-1)m} < |(2^2 z)^{p_n-q_n}(2^n z)^m| < 2^{3C_2+(n+1)m}$.

Таким образом, получаем следующую оценку при $\frac{1}{2} \leqslant |z| \leqslant 2$:

$$C_3^{-1}2^{mn}\mathfrak{M}(2^n) < |Q_n(z)| < C_3 2^{mn}\mathfrak{M}(2^n), \qquad \text{где } C_3 < \infty \tag{10}$$

Далее покажем, что если в кольце $\{2^{n-1} \leqslant |z| \leqslant 2^{n+1}\}$ есть нуль a_n, то $\ln\mathfrak{M}(2^n) + m\ln 2^n$ ограничена сверху.

При $|a_n| < 2^n$ имеем:

$$\ln\mathfrak{M}(2^n) - \ln\mathfrak{M}(|a_n|) = \int\limits_{|a_n|}^{2^n} \frac{card\{k : 1 < |a_k| < t\} - card\{k : 1 < |b_k| < t\}}{t}dt.$$

В силу свойства 1, $card\{k : 1 < |a_k| < 2^n\} - card\{k : 1 < |b_k| < 2^n\} < C_2$.

Для $|a_n| > 2^n$ оценки проводятся так же. Согласно свойству 3, величина $\ln\mathfrak{M}(|a_n|) + m\ln|a_n|$ ограничена сверху. Так как $|\ln|a_n| - \ln 2^n| \leqslant \ln 2$, то

$\ln\mathfrak{M}(2^n)+m\ln 2^n$ также ограничена сверху. Следовательно, $|Q_n(z)|\leqslant C_4<\infty$ в кольце $\frac{1}{2}<|z|<2$.

Если существует $b_n\in\{2^{n-1}<|z|<2^{n+1}\}$, то можно аналогичным образом проверить, что величина $|\ln\mathfrak{M}(2^n)+m\ln 2^n$ ограничена снизу. Поэтому $|Q_n(z)|\geqslant\frac{1}{C_4}>0$ в кольце $\frac{1}{2}<|z|<2$.

Изучим теперь функцию $R_n(z)$. В силу свойства 2 количество нулей и полюсов этой функций на множестве $\{\frac{1}{2}<|z|<2\}$ равномерно ограничено. Рассмотрим несколько случаев:

Пусть последовательность $f(2^n z)$, начиная с некоторого номера, не имеет нулей (либо полюсов, либо и нулей, и полюсов) в кольце $\{\frac{1}{4}<|z|<4\}$. Тогда, в силу теоремы 5, функция $f(z)$ имеет на бесконечности несущественную особенность, поэтому этот случай сводится к случаю, рассмотренному Островским [3]. Следовательно, в этом случае можно выделить подпоследовательность $f(2^{n_k}z)$, равномерно сходящуюся в кольце $\{\frac{1}{2}\leqslant|z|\leqslant 2\}$, т. е. функция $f(z)$ нормальна.

Если существует подпоследовательность $f(2^{n_k}z)$, не имеющая полюсов в $\{\frac{1}{4}<|z|<4\}$, но имеющая хотя бы один нуль, тогда, по определению, функции $R_{n_k}(z)$ являются полиномами от z с ограниченными коэффициентами. Вследствие этого, функции $R_{n_k}(z)$ ограничены в кольце $\{\frac{1}{2}\leqslant|z|\leqslant 2\}$. Ввиду (7), (8), (9), (10) имеем:

$$f(2^{n_k}z)=F_{n_k}(z)2^{mn_k}\mathfrak{M}(2^{n_k}),$$

где $F_{n_k}(z)$ – ограниченная функция в $\{\frac{1}{2}\leqslant|z|\leqslant 2\}$, а выражение $2^{mn_k}\mathfrak{M}(2^{n_k})$ ограничено сверху. Из последовательности $F_{n_k}(z)$ можно выбрать подпоследовательность $F_{n'_k}(z)$, сходящуюся равномерно в $\{\frac{1}{2}\leqslant|z|\leqslant 2\}$; из числовой последовательности $2^{mn'_k}\mathfrak{M}(2^{n'_k})$ можно выбрать подпоследовательность $2^{mn''_k}\mathfrak{M}(2^{n''_k})$, имеющую ограниченный сверху предел. Значит подпоследовательность $f(2^{n''_k}z)$ сходится равномерно в $\{\frac{1}{2}\leqslant|z|\leqslant 2\}$, причем предельная функция ограничена сверху, в частности, может быть тождественным нулем.

Если существует подпоследовательность $f(2^{n_k}z)$, не имеющая нулей в $\{\frac{1}{4}<|z|<4\}$, но имеющая хотя бы один полюс, то заменяем f на $\frac{1}{f}$, сводя данный случай к предыдущему. В этом случае предельная функция будет ограниченной снизу и, в частности, может быть тождественной бесконечностью.

Иначе, существует подпоследовательность $f(2^{n_k}z)$, имеющая в $\{\frac{1}{4}<|z|<4\}$ хотя бы один нуль и хотя бы один полюс. В этом случае величина $2^{mn_k}\mathfrak{M}(2^{n_k})$ ограничена и сверху, и снизу. В силу (8), (9), (10), величины $|P_{1n_k}(z)|$, $|P_{2n_k}(z)|$, $|Q_{n_k}(z)|$ ограничены. Ввиду (7) мы можем записать:

$$f(2^{n_k}z)=R_{n_k}(z)F_{n_k}(z),$$

где $F_{n_k}(z)=P_{1n_k}(z)\ P_{2n_k}(z)\ Q_{n_k}(z)$. Так как при $\dfrac{1}{4}<|z|<4$ имеем

$0 < C_5^{-1} \leqslant\leqslant |F_{n_k}| \leqslant C_5 < \infty$, то существует подпоследовательность $F_{n'_k}(z)$, равномерно сходящаяся к функции $F(z)$ и $F(z) \not\equiv 0$, $F(z) \not\equiv \infty$.

Нули и полюсы функции $R_{n_k}(z)$ лежат в кольце $\{\frac{1}{4} < |z| < 4\}$ и, согласно свойству 2, их количество не превосходит $C_1 < \infty$. Отсюда следует, что $R_{n_k}(z)$ – рациональная дробь. Введем $U_n(z) = \prod_{k:2^{n-2}<|a_k|,|b_k|<2^{n+2}}(1 - \frac{2^n z}{a_k})$ и $V_n(z) = \prod_{k:2^{n-2}<|a_k|,|b_k|<2^{n+2}}(1 - \frac{2^n z}{b_k})$. Очевидно, что $U_n(z)$ и $V_n(z)$ многочлены от z степени, не превосходящей C_1. В принятых обозначениях, $R_{n_k}(z) = \dfrac{\prod_{l:2^{n_k-2}<|a_l|,|b_l|<2^{n_k+2}}(1 - \frac{2^{n_k} z}{a_l})}{\prod_{l:2^{n_k-2}<|a_l|,|b_l|<2^{n_k+2}}(1 - \frac{2^{n_k} z}{b_l})} = \dfrac{U_{n_k}(z)}{V_{n_k}(z)}$. Из того, что $U_{2n_k}(z)$ и $V_{2n_k}(z)$ – полиномы с ограниченными коэффициентами, следует, что существует подпоследовательность $n'_k \to \infty$ такая, что $U_{n'_k} \to U, V_{n'_k} \to V$ при $n'_k \to +\infty$, причем сходимость равномерна в кольце $\{\frac{1}{3} \leqslant |z| \leqslant 3\}$. Здесь U и V – многочлены степени, не превосходящей K. Заметим, что $\lim_{|z|\to 0} U(z) = \lim_{|z|\to 0} V(z) = 1$, так что $U(z) \not\equiv 0$, $V(z) \not\equiv 0$.

Покажем, что $f(2^{n'_k} z)$ сходится равномерно в кольце $\{\frac{1}{2} \leqslant |z| \leqslant 2\}$.

Достаточно проверить сходимость в окрестности каждой точки $z_0 \in \{z : \frac{1}{2} \leqslant |z| \leqslant 2\}$, а затем применить диагональный процесс. Рассмотрим следующие два случая:

1. $V(z) \neq 0$ в некоторой окрестности точки z_0.
   Тогда $R_{n'_k} = \dfrac{U_{n'_k}}{V_{n'_k}} \rightrightarrows \dfrac{U}{V}$ в этой окрестности. Обозначим предельную дробь через R. Тогда $f(2^{n'_k} z) = R_{n'_k} F_{n'_k} \rightrightarrows RF$.

2. $V(z_0) = 0$.
   Тогда $U(z_0) \neq 0$, т.к. любой нуль функции U является пределом точек $\frac{a_l}{2^{n'_k}}$, а любой нуль функции V является пределом последовательности точек $\frac{b_l}{2^{n'_k}}$. Эти пределы не совпадают в силу свойства 4, поэтому $U(z) \neq 0$ в некоторой окрестности точки z_0. Заменим $f(2^{n'_k} z)$ на $\dfrac{1}{f(2^{n'_k} z)}$ и проведем рассуждения предыдущего случая.

Необходимость.

Предположим, что $f(z)$ нормальная функция. Тогда свойства $1), 2), 4)$ выполнены в силу теорем 2, 3 и 4. Функцию $f(z)$ представим в виде

$$f(z) = H(z) \frac{\prod_{k\geqslant 0}(1 - \frac{z}{a_k}) \prod_{k<0}(1 - \frac{a_k}{z})}{\prod_{k\geqslant 0}(1 - \frac{z}{b_k}) \prod_{k<0}(1 - \frac{b_k}{z})},$$

где (a_k) и (b_k) – соответственно последовательности нулей и полюсов функции $f(z)$, а $H(z)$ – голоморфная функция в $\mathbb{C}^*$ без нулей. Далее будет показано, что бесконечные произведения сходятся равномерно на компактах в $\mathbb{C}^*$. Последовательности (a_k) и (b_k) могут быть конечными или бесконечными в одну или обе стороны, при этом будем считать, что $|a_k|$ и $|b_k| < 1$ при $k < 0$, $|a_k|$ и $|b_k| \geqslant 1$ при $k \geqslant 0$. Отметим, что $a_k, b_k \to 0, k \to -\infty$ и $a_k, b_k \to \infty$, $k \to +\infty$, если последовательности бесконечны в соответствующую сторону.

Рассмотрим представление, аналогичное (10):

$$f(2^n z) = H(2^n z) P_{1n}(z) P_{2n}(z) \widetilde{Q_n}(z) R_n(z).$$

Здесь $P_{1n}(z)$, $P_{2n}(z)$ и $R_n(z)$ имеют тот же вид, что и в доказательстве достаточности, а $\widetilde{Q_n}(z) = (-1)^{p_n+q_n} \frac{\frac{2^n z}{a_1} \cdots \frac{2^n z}{a_{p_n}}}{\frac{2^n z}{b_1} \cdots \frac{2^n z}{b_{q_n}}}$. Имеем $|\widetilde{Q_n}(z)| = (4|z|)^{p_n - q_n} \cdot$ $\cdot \mathfrak{M}(2^{n-2})$. Рассуждая так же, как и в доказательстве достаточности, получим $C_3^{-1}\mathfrak{M}(2^n) < |\widetilde{Q_n}(z)| < C_3 \mathfrak{M}(2^n)$. Из (8), (9) и последнего неравенства, повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве достаточности получаем, что из любой последовательности $n \to \infty$, можно выделить подпоследовательность n', на которой функции $P_{1n'}(z)$, $P_{2n'}(z)$, $R_{n'}(z)$, $\dfrac{\widetilde{Q_{n'}}(z)}{\mathfrak{M}(2^{n'})}$ имеют предел, отличный от нуля и бесконечности, а также, бесконечные произведения сходятся равномерно на компактах в $\mathbb{C}^*$. Так как функция $f(z)$ нормальна, то при переходе к подпоследовательности получим, что функции $f(2^{n''} z)$ имеют предел, возможно равный нулю или бесконечности. Поэтому по некоторой подпоследовательности существует $\lim_{n'' \to \infty} H(2^{n''} z) \mathfrak{M}(2^{n''})$, возможно равный нулю или бесконечности.

Если функция $f(z)$ не имеет нулей (или полюсов) в области $\{\frac{1}{\varepsilon} < |z| < \infty\}$, то, в силу теоремы 5, $f(z)$ имеет на бесконечности устранимую особенность или особенность типа полюса. Следовательно, этот случай сводится к случаю, рассмотренному Островским [3]. В этом случае данная теорема доказана.

Аналогично рассуждаем в случае, когда функция $f(z)$ не имеет нулей либо полюсов, либо и нулей, и полюсов в области $\{0 < |z| < \varepsilon\}$.

Из определения $\mathfrak{M}(r)$ следует, что $-C_2 \ln r \leqslant \ln \mathfrak{M}(r) \leqslant C_2 \ln r$. При необходимости увеличив C_2, можно считать, что оно является целым числом. Имеем

$$\frac{|H(2^n z)|}{2^{nC_2}} \leqslant |H(2^n z)| \mathfrak{M}(2^n) \quad \text{и} \quad \frac{|H(2^n z)|}{2^{-nC_2}} \geqslant |H(2^n z)| \mathfrak{M}(2^n). \tag{11}$$

Если в любой окрестности вида $\{\frac{1}{\varepsilon} < |z| < \infty\}$ есть нули функции $f(z)$, то их бесконечно много. Значит, по свойству 1), в этой окрестности также бесконечно много плюсов $f(z)$.

Мы знаем, что для некоторой подпоследовательности n'', $\lim_{n'' \to +\infty} H(2^{n''} z) \mathfrak{M}(2^{n''})$ существует и возможно является тождественным нулем или бесконечностью. Из (11) следует, что $\lim_{n'' \to +\infty} \dfrac{H(2^{n''} z)}{2^{n'' C_2}}$ также существует и возможно является тождественным нулем или бесконечностью. Обозначим предельную функцию через $h(z)$. Если $h(z) \equiv 0$, то модуль функции $\dfrac{|H(2^{n''}z)|}{2^{n''C_2}}$ ограничен сверху на окружности $|z| = 1$. Функция $\dfrac{H(z)}{z^{C_2}}$ голоморфна в $\mathbb{C}^*$ и ограничена на последовательности окружностей $|z| = 2^{n''}$. Поэтому, применяя принцип максимума, получим, что модуль функции $\dfrac{H(z)}{z^{C_2}}$ ограничен сверху в окрестности бесконечности. В этом случае $H(z)$ имеет на бесконечности устранимую особенность или особенность типа полюса. Аналогично рассуждаем, когда $h(z) \equiv \infty$.

Пусть $h(z) \not\equiv 0$, $h(z) \not\equiv \infty$. Так как функция $\dfrac{H(2^{n''}z)}{2^{n''C_2}}$ не имеет ни нулей, ни полюсов в $\mathbb{C}^*$, то, по теореме Гурвица, $h(z)$ также не имеет ни нулей, ни полюсов в $\mathbb{C}^*$. Поэтому $h(z)$ ограничена на окружности $|z| = 1$, значит, функция $\dfrac{H(z)}{z^2}$ ограничена на последовательности окружностей $|z| = 2^{n''}$. Применяя к голоморфной в $\mathbb{C}^*$ функции $\dfrac{H(z)}{z^N}$ принцип максимума, получим, что ее модуль при некотором $N < \infty$ ограничен в окрестности бесконечности. Поэтому и в этом случае $H(z)$ имеет на бесконечности устранимую особенность или особенность типа полюса.

Повторяя рассуждения, проведенные выше, для окрестности вида $\{0 << |z| < \varepsilon\}$ получим, что $H(z)$ имеет в нуле либо устранимую особенность, либо особенность типа полюса.

В силу того, что $H(z) \neq 0$ и $H(z) \neq \infty$ в $\mathbb{C}^*$, получим, что $H(z) = Cz^m$.

Ввиду доказанного выше и замечания 1 получим, что условие 3) теоремы верно. ■

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A.Ostrovski, Uber Folgen analytischer Funktionen — Math.Zeitschrift.(1925), v.24, p.241

2. A. Eremenko. Normal holomorphic curves from parabolic regions to projective spaces. // Preprint. Purdue University. — 1999.

3. П. Монтель. Нормальные семейства аналитических функций. — М.: Объединенное научно-техническое издательство НКТП СССР, главная редакция общетехнической литературы и номографии. — 1936. — 239с.

4. Л.Д. Радченко. Аналитические функции в плоскости без точки нуль // Вестник Харьковского национального университета — 2010. — **922**. — С. 43-55.

Статья получена: 18.03.2010; окончательный вариант: 15.09.2010; принята: 21.09.2010.