

Распространение волн в заполненных жидкостью  
вязкоупругих трубках: сравнение одномерной и  
двумерной моделей

Н.Н. Кизилова

*Харьковский национальный университет им.В.Н.Каразина,  
пл. Свободы, 4, 61077, Харьков, Украина  
n.kizilova@gmail.com*

Представлены постановки и решения одномерной нелинейной и двумерной линеаризованной задач, описывающих распространение пульсовых волн в артериях. Для моделей артериальных русел, представленных системами трубок с разной топологией, выполнены сравнительные расчеты на одномерной и двумерной моделях. Проведено моделирование патологий, связанных с наличием стеноза и нарушениями микроциркуляции. Показано, что метод анализа интенсивностей волн позволяет определять локализацию патологии.

Кизилова Н.М., **Розповсюдження хвиль в заповнених рідиною в'язкопружних трубках: порівняння одновимірної та двовимірної моделей** Наведені постановки та розв'язки одновимірної нелінійної і двовимірної линеаризованої задач, які описують поширення пульсових хвиль в артеріях. Для моделей артеріальних русел, які представлені системами трубок з різною топологією, виконані порівняльні розрахунки на одновимірній і двовимірній моделях. Проведено моделювання патологій, які пов'язані з наявністю стенозу і порушеннями мікроциркуляції. Показано, що метод аналізу інтенсивностей хвиль дозволяє визначати локалізацію патології.

N.N. Kizilova, **Wave propagation in fluid-filled viscoelastic tubes: a comparative study of 1D and 2D models** Formulations and solutions of the one-dimensional nonlinear and two-dimensional linearized problems describing the pulse wave propagation in arteries are presented. For several models of arterial beds that are presented by the systems of tubes with different topology, the comparative study of the one-dimensional and two-dimensional models is carried out. The modeling of pathologies, related to the stenosis and microcirculatory problems is conducted. It is shown that the wave-intensity analysis method allows determination of localization of the pathology.

*2000 Mathematics Subject Classification* 76D33, 76Z05, 74F10, 92C35.

**Введение.** Распространение волн давления и скорости в заполненных жидкостью вязкоупругих трубках исследуется в механике, прежде всего, в связи с задачами гидромеханики кровообращения. Собственно, вся теоретическая гидромеханика, начало которой было положено Л.Эйлером, началась с его интереса к задаче о движении крови по артериям, в результате решения которой была получена система уравнений для невязкой жидкости (уравнения Эйлера) [1].

Волны давления  $P(t)$  и скорости кровотока  $U(t)$  в артериях человека и животных легко регистрируются с помощью современной ультразвуковой аппаратуры или магнито-резонансной томографии. Прямые методы с помощью микродатчиков, введенных с катетером, позволяют проводить длительную непрерывную запись пульсовых кривых. Таким образом, к настоящему времени в медицине накоплен достаточно большой экспериментальный материал, и анализ кривых показывает, что форма пульсовых кривых и ряд интегральных параметров могут быть использованы для своевременной диагностики сердечно-сосудистых патологий и нарушений кровообращения во внутренних органах. Эмпирические данные медицины и клинические наблюдения нуждаются в биомеханическом обосновании, поскольку разброс и относительных параметров, и безразмерных параметров волн довольно большой, что вообще-то свойственно биологическим данным.

Важным для биомеханики является представление о том, что пульсовые волны, регистрируемые в разных артериях, представляют собой результат наложения падающей волны  $P^+(t)$ , генерируемой сокращающимся сердцем, и отраженных волн  $P^-(t)$  [2]. Отраженные волны распространяются вверх по течению и связаны с наличием сосудистых бифуркаций и локальных неоднородностей (стенозов, аневризм), вызывающих несогласование волновых проводимостей последовательных участков сосудистого русла [3]. Тогда регистрируемые в артериях кривые  $P(t)$  будут представлять собой результат суперпозиции падающей и отраженной волн:  $P(t) = P^+(t) + P^-(t)$ . Поскольку волны давления  $P^+(t)$  и  $P^-(t)$  способствуют перемещению крови в соответствующем направлении, то  $U(t) = U^+(t) - U^-(t)$ . Таким образом, при достаточно большом волновом сопротивлении систем средних и малых артерий могут появляться периоды времени, когда кровоток отрицателен (направлен от периферических сосудов к сердцу). Подобные периоды чаще всего свойственны различным патологиям, но могут появляться в некоторых артериях и у здоровых пациентов [4].

Линейная теория пульсовых волн в артериях была разработана Дж. Лайтхиллом для невязкой жидкости, как для сжимаемой, так и для несжимаемой [5]. Одним из наиболее интересных методов анализа волн в артериях, который выявляет детальную картину многократных отражений волн во времени, является метод анализа волновых интенсивностей (wave-intensity analysis, WIA), заимствованный из газовой динамики [6]. Для использования этого метода необходимо одновременно зарегистрировать кривые  $P(t)$  и  $U(t)$  на одном и том же участке артерии, что возможно с помощью современной

техники. Проводя синхронний аналіз кривих, можна убедитися, що інтервали часу, коли тиск в судині і швидкість кровотоку зростають або зменшуються, не завжди збігаються [2,6,7]. На певних ділянках тиск і швидкість зростають або зменшуються синхронно, а на інших – одна з величин зростає, а інша зменшується. Якщо вважати, що інтервал часу, коли  $dU > 0$ , відповідає умові  $dU^+ > dU^-$ , тобто переважає падаюча хвиля, і навпаки, а також що випадок  $dP > 0$  відповідає хвилі стиснення, а  $dP < 0$  – розрідження (формальна аналогія зі стислим газом), то, порівнюючи криві  $dP(t)$  і  $dU(t)$ , можна виділити на них наступні ділянки [6]:

$dU > 0, dP > 0$  – падаюча хвиля стиснення;

$dU > 0, dP < 0$  – падаюча хвиля розрідження;

$dU < 0, dP > 0$  – відбита хвиля стиснення;

$dU < 0, dP < 0$  – відбита хвиля розрідження.

Звичайно, терміни "хвиля стиснення" і "хвиля розрідження" в застосуванні до нестисливої рідини, нефізичні, але за десять років після їх введення в англійську літературу, вони прижилися і широко використовуються в застосуванні до теорії імпульсних хвиль в артеріях. Для нестисливої рідини фізичний зміст хвиль стиснення і розрідження пов'язаний не стільки з властивостями рідини, скільки з деформацією стінки трубки: при  $dP > 0$  трубка розширюється і площа її поперечного перерізу  $S$  збільшується, а при  $dP < 0$   $S$  зменшується. Прямі вимірювання показали, що криві  $P(t)$  і  $S(t)$ , переобчислені в одні і ті ж безрозмірні величини, практично збігаються [8]. На цьому оснований широко застосовуваний в сучасній медицині метод неінвазивної (безкровної) реєстрації кривих  $P(t)$  в довільній артерії шляхом відновлення їх з кривих  $S(t)$ , реєструваних ультразвуковою апаратурою. Метод WIA добре зарекомендував себе в останні роки як важливий діагностичний прийом для аналізу не тільки центральної гемодинаміки, але і кровообігу в внутрішніх органах і в коронарних артеріях, в яких багаторазові відбиття хвиль мають місце при скороченні м'язових волокон в окремих камерах серця [6,7,9,10]. Існують і інші ефективні методи діагностики, засновані на аналізі кривих  $P(U)$  і фазових кривих  $P_t'(P), U_t'(U)$  [11].

Для аналізу хвиль в артеріях деякі автори використовують нелінійні одномерні моделі, засновані на рівняннях Ейлера (плоскі хвилі), а інші – лінеаризовані двомірні рівняння (осесиметричний випадок). В даній роботі представлені результати порівняльного дослідження параметрів хвиль тиску і швидкості в трубці і системах трубок на основі чисельних розрахунків за заданими одномерною і двомірною моделями.

**1. Одномерна модель.** Закони збереження маси і імпульсу для середньої по перерізу  $S$  трубки швидкості кровотоку  $U=Q/S$ , де  $Q$  – об'ємний витіток через перерізу, були записані в [1] і строго виведені в [5] для випадку нестисливої рідини в вигляді:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (SU) = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

где  $\rho$  – плотность жидкости,  $x$  – аксиальная координата, отсчитываемая от входного сечения трубки,  $U = U(t, x)$ ,  $S = S(t, x)$ .

Для замыкания системы (1) в [1] были использованы две, как выяснилось впоследствии, несвойственных артериям зависимости  $P(S)$ . Многочисленные эксперименты показали, что кривая  $P(S)$  имеет две нелинейные ветви, которые различны для случаев  $P < P_0$  (схлопывание артерии) и  $P > P_0$  (раздувание артерии), где  $P_0$  – так называемое нерастягивающее давление, при котором артерия полностью расправлена, но напряжения в ее стенке равны нулю. При этом  $P_0$  соответствует давлению в окружающих артерию тканях. В случае  $P < P_0$  осесимметричность схлопывающейся трубки не сохраняется, и такие задачи решают в трехмерной постановке методом конечных элементов. При  $P > P_0$  зависимость  $P(S)$  хорошо описывается соотношением [2]:

$$P = P_0 + k \left( \sqrt{S} - \sqrt{S_0} \right), \quad (2)$$

где  $S_0 = S(P_0)$  – невозмущенная площадь сечения сосуда,  $k$  – коэффициент.

В физически линейных моделях используют аппроксимацию нелинейного участка  $P(S)$  линейной зависимостью в виде [12]

$$P = P_0 + k(S - S_0), \quad (3)$$

где  $k = \alpha_3 \lambda$ ,  $\lambda$  – окружная жесткость стенки трубки,  $\alpha_3$  – эмпирический коэффициент, обеспечивающий близость линейной аппроксимации нелинейной экспериментальной зависимости для данного типа сосудов (крупные, средние, малые, эластического, мышечного или смешанного типов) [2]. На основе системы (1), (3) были исследованы разные случаи распространения волн в артериях и системах артерий и получены результаты, соответствующие результатам клинических исследований [13–15].

Обобщение системы (1) на случай вязкой жидкости получают добавлением в правую часть уравнения импульсов слагаемого, соответствующего осредненного по периметру трения на стенке на единицу длины трубки  $2\pi a \tau_w / \rho S$ , где  $\tau_w$  – среднее по периметру напряжение трения на стенке. В качестве  $\tau_w$  чаще всего выбирают напряжение трения в стационарном Пуазейлевском течении [2] или в пульсирующем течении Уомерсли [16]. При этом для одномерной задачи возникает проблема граничных условий на стенке [10].

Для однородной изотропной упругодеформируемой стенки с конечной невозмущенной толщиной  $h_0$  выражение для  $k$  может быть получено из известных соотношений теории упругости [12]:

$$k = \frac{\sqrt{\pi} h_0 E}{(1 - \nu^2) S_0}, \quad (4)$$

где  $E$  и  $\nu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала стенки.

**2. Численный метод решения одномерной задачи.** Задачи (1), (2) и (1), (3) сводятся к гиперболическим системам уравнений для определения неизвестных  $U, S$  и могут быть решены методом характеристик. Рассмотрим случай нелинейного закона упругости стенки (2) и будем считать, что  $k = k(x)$  и  $S_0 = S_0(x)$  (трубка переменного невозмущенного сечения), тогда

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial S_0} \frac{\partial S_0}{\partial x}, \quad (5)$$

где частные производные от  $P$  берутся при постоянстве остальных параметров. Из (1) следует, что  $\partial P / \partial S = k / (2\sqrt{S})$ .

Запишем задачу (1), (2) с учетом (5) в виде квазилинейной системы уравнений:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + |M| \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} = \vec{F}, \quad (6)$$

где  $\vec{V}^T = (S, U)$ ,  $\vec{F}^T = (0, f)$ ,  $f = - \left( \frac{\partial P}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial S_0} \frac{\partial S_0}{\partial x} \right) \frac{1}{\rho}$ ,  $c^2 = \frac{S}{\rho} \frac{\partial P}{\partial S} = \frac{k\sqrt{S}}{2\rho}$ ,

$$|M| = \begin{vmatrix} U & S \\ \frac{c^2}{S} & U \end{vmatrix}.$$

Матрица  $|M|$  имеет два действительных собственных значения  $\lambda_{1,2} = U \pm c$  и ее можно представить в виде  $|M| = |G| |\Lambda| |G|^{-1}$ , где

$$|\Lambda| = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix}, \quad |G| = \begin{vmatrix} S & -S \\ c & c \end{vmatrix}.$$

Тогда (6) можно переписать в виде

$$|G|^{-1} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + |\Lambda| |G|^{-1} \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} = |G|^{-1} \vec{F}.$$

Поскольку в артериях скорость распространения волн  $c=8-20$  м/с превышает линейную скорость кровотока  $\max\{U\}=0.6-0.8$  м/с, то  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ .

Если существует векторная функция  $\vec{W} = \vec{W}(\vec{V})$  такая, что  $\partial \vec{W} / \partial \vec{V} = |G|^{-1}$ , то ее компоненты  $W_1, W_2$  - инварианты Римана:

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial \vec{V}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial W_1}{\partial S} & \frac{\partial W_1}{\partial U} \\ \frac{\partial W_2}{\partial S} & \frac{\partial W_2}{\partial U} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{c}{S} & 1 \\ \frac{S}{c} & 1 \end{vmatrix} = |G|^{-1}. \quad (7)$$

Здесь  $W_1$  соответствуют волне, бегущей вправо (вниз по течению), а  $W_2$  – волне, бегущей влево (вверх по течению). Интегрируя (7), получим выражения

$$W_{1,2} = U - U_0 \pm \int_{S_0}^S \frac{c(S)}{S} dS = U - U_0 \pm 4\sqrt{\frac{k}{2\rho}} \left( S^{1/4} - S_0^{1/4} \right). \quad (8)$$

Откуда

$$S = \left( \frac{W_1 - W_2}{4} \right)^4 \left( \frac{\rho}{2k} \right)^2, \quad U = \frac{(W_1 + W_2)}{2}. \quad (9)$$

Теперь система (6) может быть записана в виде

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + |\Lambda| \frac{\partial \vec{W}}{\partial x} = |G|^{-1} \vec{F},$$

причем в случае  $\vec{F} = 0$  правая часть обращается в ноль и может быть применена обычная схема численных расчетов [17].

**3. Граничные условия.** В качестве граничных условий для гиперболической системы (6) достаточно задать значения  $U(t)$  или  $S(t)$  во входном сечении трубки. В силу наличия зависимости вида (2), (3) это означает задание  $U(t)$  или  $P(t)$ , а эти кривые могут быть измерены для конкретной артерии конкретного пациента.

На выходном конце трубки следует задать условие отражения падающей волны от нижележащего участка сосудистого русла, представленного сложной системой артерий, и называемого обычно терминальным элементом. Для случая последовательного соединения двух трубок (1 и 2) с разными площадями сечения и свойствами стенки (например, нормальный сосуд и участок стеноза или атеросклеротической бляшки) условия непрерывности объемного расхода и давления дают следующие условия в сечении, разделяющем две трубки:

$$\frac{\rho}{2} U_1^2 + k_1 \left( \sqrt{S_1} - \sqrt{S_{10}} \right) = \frac{\rho}{2} U_2^2 + k_2 \left( \sqrt{S_2} - \sqrt{S_{20}} \right), \quad U_1 S_1 = U_2 S_2. \quad (10)$$

Из (10) следует, что в сечении, разделяющем две трубки, встречаются волна, распространяющаяся по первой трубке в положительном направлении, и волна, отраженная во второй трубке, так что

$$\begin{aligned} W_1 &= U_1 - U_{10} + 4\sqrt{\frac{k_1}{2\rho}} \left( S_1^{1/4} - S_{10}^{1/4} \right), \\ W_2 &= U_2 - U_{20} + 4\sqrt{\frac{k_2}{2\rho}} \left( S_2^{1/4} - S_{20}^{1/4} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Выражения (10), (11) позволяют задавать граничные условия для вычисления величин  $U_j(t, x)$ ,  $S_j(t, x)$  в системе с произвольным числом трубок  $j=1, \dots, N$ , зная входные условия в первой трубке и условия отражения волн в последней из трубок последовательного соединения или в терминальных трубках ветвящихся систем, например, бинарных деревьев, достаточно хорошо моделирующих артериальные русла.

Для терминальної трубки (8) примет вид

$$W_1 = U_t + 4\sqrt{\frac{k}{2\rho}}S_t^{1/4}, \quad W_2 = U_t - 4\sqrt{\frac{k}{2\rho}}S_t^{1/4}, \quad (12)$$

где  $U_t$  и  $S_t$  – скорость и площадь сечения в терминальном элементе.

Вводя коэффициент отражения волн  $\Gamma$  на терминальном элементе  $\Gamma = -W_2/W_1$ , из (12) получим

$$U_t = \sqrt{\frac{k}{2\rho}}S_t^{1/4} \frac{1 - \Gamma}{1 + \Gamma}.$$

Приравнявая соответствующие выражения из (11) и (12), получим граничное условие на правом конце трубки для другой переменной

$$S_t = \left( S_1^{1/4} + (U_1 - U_t) \sqrt{\frac{k_1}{8\rho}} \right)^4.$$

Коэффициент  $\Gamma$  может принимать значения от нуля (проводимости трубок согласованы и отраженная волна отсутствует) до единицы (полное отражение, в терминальный элемент жидкость не поступает) [5].

**4. Постановка двумерной задачи и метод решения.** Исследование пульсовых волн в артериях чаще всего основано на задаче об осесимметричном течении вязкой несжимаемой жидкости в толстостенной трубке из несжимаемого вязкоупругого материала. Движение жидкости описывается уравнениями Навье-Стокса:

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0, \quad \rho_f \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \mu \Delta \vec{v}, \quad (13)$$

где  $\vec{v} = (v_r, 0, v_x)$ ,  $p$ ,  $\rho_f$  и  $\mu$  – скорость, гидростатическое давление, плотность и вязкость жидкости.

Система уравнений для трубки имеет вид:

$$\operatorname{div}(\vec{u}) = 0, \quad \rho_s \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = -\nabla p_s + \operatorname{div} \hat{\sigma}, \quad \hat{\sigma} = 2G \left( I + \tau_1 \frac{\delta}{\delta t} \right)^{-1} \left( I + \tau_2 \frac{\delta}{\delta t} \right) \hat{\epsilon}, \quad (14)$$

где  $\vec{u} = (u_r, 0, u_x)$  – вектор перемещения,  $\rho_s$  и  $p_s$  – плотность материала и гидростатическое давление в стенке. Последнее соотношение в (14) соответствует трехэлементной модели вязкоупругой стенки, где  $\hat{\epsilon}$  – тензор деформаций,  $\tau_{1,2}$  – времена релаксации напряжений и деформаций,  $G$  – модуль сдвига.

На границе раздела жидкость-стенка выполняются условия непрерывности радиальной и аксиальной компонент скорости, нормальных и тангенциальных напряжений.

Задачи (13) и (14) связаны через граничные условия на стенке, поэтому их решения можно найти независимо, а затем из граничных условий получить систему уравнений для определения постоянных интегрирования. В соответствии с подходом Лайтхилла, пульсовые волны рассматриваются как малые возмущения, накладываемые на стационарную компоненту [5]. Лайтхилл впервые исследовал распространение и отражение волн на основании системы (1), (3), линеаризованной относительно состояния покоя  $U_0 = 0$ ,  $P = P_0$ ,  $S = S_0$  [5]. Для двумерного случая решение линеаризованной системы (13) было получено в [18] и [19] соответственно для бесконечно длинной чисто упругой трубки из изотропного и ортотропного материала. В [20] было показано, что при учете вязкости стенки трубки получаются результаты, лучше соответствующие данным клинических измерений. Решение линеаризованной задачи (13)-(14) может быть найдено в виде  $f(t, r, x) = f^*(r, x) e^{i\omega t}$ , где  $f = \{u_r, u_x, v_r, v_x, p, p_s\}$ , а звездочкой обозначены амплитуды соответствующих величин. При этом выражения для всех компонент  $f$  получаются в явном виде. Для трубки конечной длины, то есть с учетом отражения волн, решение выписано в [21]. Отличие состоит в учете падающей и отраженной волн, которые переносят жидкость вниз и вверх по течению соответственно. При этом волны давления и скорости жидкости записываются в виде

$$\begin{aligned} p(t, x) &= e^{i\omega t} (p^+ e^{-i\omega x/c} + p^- e^{i\omega(x-2L)/c}), \\ v_x(t, x) &= e^{i\omega t} (p^+ e^{-i\omega x/c} - p^- e^{i\omega(x-2L)/c}) / S_0, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $p^+$  и  $p^-$  – амплитуды падающей и отраженной волн.

Решение (15) можно также записать, используя коэффициент отражения волн на конце трубки  $\Gamma = p^- / p^+$ , как это было сделано выше для одномерной модели.

Решение связанной задачи (13)-(14) в нелинейной постановке было получено в [22] в виде разложений по степеням малого параметра. При этом полученное решение для нулевого приближения соответствует решению [21] линеаризованной задачи.

**5. Граничные условия для двумерной задачи.** На входе в трубку  $x = 0$  задается волна давления в виде Фурье-разложения:

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} P_k^0 e^{i\omega_k t}. \quad (16)$$

В соответствии с результатами анализа пульсовых волн в артериях, 4-6 гармоник достаточно точно описывают большинство из зарегистрированных кривых, соответствующих как норме, так и сердечно-сосудистым патологиям [2,12]. На выходе из трубки  $x = L$  записываются условия непрерывности объемного расхода и среднего по сечению гидростатического давления

$$Q(t, L) = Q_t, \quad P(t, L) = P_t. \quad (17)$$



Из определения входной проводимости терминального элемента  $Y_t = Q_t/P_t$  с учетом (17) получим граничное условие  $Y_t P(t, L) = Q(t, L)$  для задачи (13). Предложенный подход можно использовать и для систем с произвольным числом трубок. При этом для каждой из трубок могут быть записаны условия (17), где терминальный элемент представлен входной волновой проводимостью всей совокупности трубок, расположенных от данной вниз по течению. Соотношения вида (15) могут быть записаны также для каждой из трубок с номером  $j=1, \dots, N$ :

$$\begin{aligned} P_j(t, x_j) &= P_j^0 e^{i\omega t} \left( e^{-i\omega x_j/c_j} + \Gamma_j e^{i\omega(x_j-2L_j)/c_j} \right), \\ Q_j(t, x_j) &= Y_j^0 P_j^0 e^{i\omega t} \left( e^{-i\omega x_j/c_j} - \Gamma_j e^{i\omega(x_j-2L_j)/c_j} \right), \end{aligned} \quad (18)$$

где координата  $x_j$  отсчитывается в каждой трубке от ее входного сечения,  $S_j^0$  и  $Y_j^0 = \rho S_j^0/c_j$  – невозмущенная площадь сечения и характеристическая проводимость  $j$ -й трубки,  $\Gamma_j = (Y_j^0 - Y_{tj}) / (Y_j^0 + Y_{tj})$ ,  $Y_{tj}$  – терминальный элемент для  $j$ -й трубки. Общее решение задачи (13) может быть найдено путем суммирования выражений (18), вычисленных для каждой из гармоник в (15).

**6. Отличия одномерной и двумерной моделей пульсовых волн.** Для невязкой жидкости отсутствует дисперсия волн, поэтому скорость волны, характеристическая волновая проводимость трубок и входная проводимость терминальных элементов не зависят от частоты. В модели (13) дисперсия присутствует как за счет вязкости жидкости, так и за счет вязкоупругости стенки.

В задачах (1), (2) и (1), (3) радиальная координата отсутствует, поэтому толщина стенки входит неявно, например, в виде соотношения (4). В модели (14) толщина стенки входит явно и на ней могут быть заданы различные граничные условия: отсутствие продольных или полных перемещений, отсутствие напряжений, закрепление к окружающим вязкоупругим тканям, что значительно расширяет диапазон применимости модели к конкретным случаям.

В одномерной модели условия на конце трубки (10)-(12) соответствуют случаю  $Im(\Gamma) = 0$ , то есть чисто резистивному терминальному элементу. Вообще говоря, любое артериальное русло обладает как резистивными свойствами, связанными со способностью оказывать сопротивление стационарному потоку (импеданс  $Z_0$ ) и распространению волн (волновое сопротивление  $Z_\omega$ ), так и емкостными свойствами, связанными со способностью артерий растягиваться и аккумулировать некоторый объем крови. В силу условия непрерывности объемного расхода крови в бифуркациях сосудов стационарная (Пуазейлевская) проводимость  $Y_{t0}$  терминального элемента постоянна  $Y_{t0} = (Z_0)^{-1}$ , а его волновая проводимость  $Y_{t\omega}$  имеет действительную и мнимую части  $Y_{t\omega} = (Z_\omega)^{-1} = Y_t^{re} + iY_t^{im}$ , которые характеризуют соответственно резистивные и емкостные свойства терминального

элемента. Для чисто резистивного терминального элемента  $Im(Y_{tw}) = 0$  отраженная волна совпадает с падающей по фазе, для чисто мнимого  $Re(Y_{tw}) = 0$  – противоположна по фазе [5]. В общем случае будет иметь место некоторый фазовый сдвиг, что приводит к появлению в артериях сложных волновых форм с одним основным и несколькими дополнительными максимумами [2].

Таким образом, различия одномерной и двумерной моделей довольно существенны и для наглядности сведены в таблице (Табл.1).

Таблица 1. Отличия одномерной и двумерной моделей.

№	Свойства	Одномерная модель	Двумерная модель
1	Физическая нелинейность задачи	Нелинейная	Линеаризованная
2	Свойства жидкости	Невязкая	Вязкая
3	Решение задачи	Суперпозиция бегущих волн конечной амплитуды	Суперпозиция малых возмущений
4	Граничные условия на конце трубки	Непрерывность динамического давления	Непрерывность гидростатического давления
5	Свойства стенки трубки	Чисто упругая, толщина не учитывается	Упругая или вязкоупругая, толщина учитывается. На наружной поверхности можно задавать разные условия закрепления.
6	Свойства терминального элемента	Чисто резистивный	Содержит и резистивную, и емкостную компоненты

**7. Результаты численных расчетов по одномерной и двумерной моделям.** Для тестирования задач (1), (2), (4) и (13), (14) были выбраны модели артериальных русел в виде бинарных деревьев, содержащих 4 генерации (порядка ветвления) (рис.1а). Длины  $L_j$  и диаметры  $d_j$  трубок последовательных генераций  $j = 1, \dots, n$  связаны следующими закономерностями:

$$d_{j+1} = d_{j+1}(d_j), \quad L_j = L_j(d_j). \quad (19)$$

Соотношения (19) могут быть заданы в произвольной форме, а могут соответствовать зависимостям, обнаруженным путем измерений на препаратах проводящих систем животных и растений [9,23]. Длины и диаметры трубок в одной генерации приняты одинаковыми (симметричные деревья).

Если  $d_{j+1} = \sqrt[3]{2}d_j$ , то получим оптимальный с точки зрения линейной теории [5] волновод, в котором отражение волн отсутствует на всех бифуркациях [24]. Некоторые артериальные русла содержат циклы (петли), поэтому в работе исследовалось также бинарное дерево с трубкой, образующей цикл на уровне трубок 2-го (рис.1б) и 3-го (рис.1в) порядков генерации. Поскольку соотношение между  $Y_t$  и  $d_n$  также определяется формулами вида (19), то величины  $Y_t$  отличаются для разных деревьев. Чтобы унифицировать подход к описанию терминальных элементов, будем рассматривать вместо  $Y_t$  коэффициент отражения  $\Gamma \in [0; 1]$  (введены выше и для одномерной, и для двумерной моделей). При моделировании стеноза проводилось уменьшение диаметра отдельных трубок в модели в 10 раз. Для определенности введена нумерация трубок (рис.1а), так что трубки 2-й генерации имели номера 2,3, 3-й номера 4-7 и 3-й номера 8-15. Соответственно трубка, создающая цикл, имеет N17.

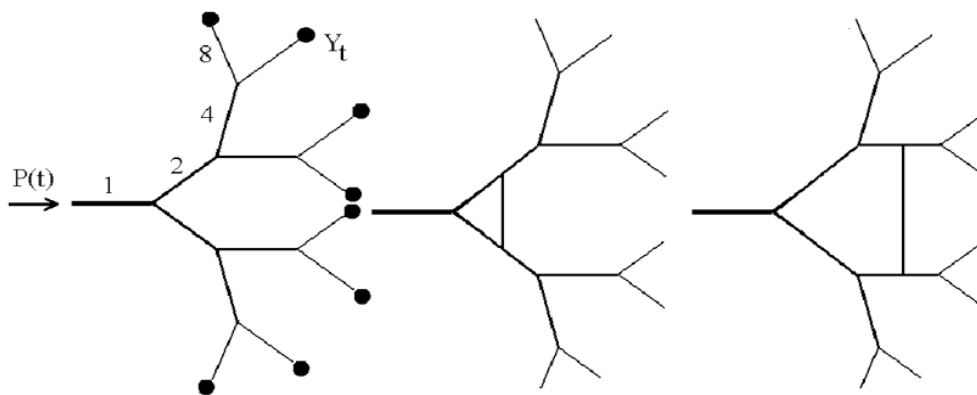


Рис.1. Модель артериального русла в виде бинарного дерева (а) и дерева с циклом на уровне трубок 2-й (б) и 3-й (в) генераций.

Для численных расчетов были выбраны значения, соответствующие артериальной системе человека:

$p_0 = 10^4$  Па,  $G = 10^5 - 10^6$  Па,  $h_0 = 0.01 - 0.5$  мм,  $E = 5 \cdot (10^5 - 10^7)$  Па,  $\sigma = 0.2 - 0.4$ ,  $\mu = (3 - 10) \cdot 10^{-3}$  Па·с,  $\rho = 1050$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_s = 1000 - 1100$  кг/м<sup>3</sup>,  $S_0 = \pi R_0^2$ ,  $R_0 = 0.1 - 5$  мм,  $L = 0.02 - 0.16$  м,  $\tau_{1,2} = 0.05 - 0.1$  с, основная частота  $\omega_1 = 2\pi f_0$  в (16) соответствовала пульсу человека, где  $f_0 = 1 - 1.5$  Гц.

В качестве входной волны давления для задачи (1), (2), (4) выбирался Гауссиан  $P_G(t) = P_{amp} \exp\left(-\frac{(t - t_0)^2}{\zeta^2}\right)$ , где  $P_{amp}$  - амплитуда, а параметры  $t_0$  и  $\zeta$  определяют положение и ширину пика волны. Задание входной волны в такой форме предпочтительнее перед введением реальных кривых колебаний давления в артериях, поскольку эти кривые имеют, как правило, несколько максимумов и минимумов разной амплитуды, что приводит к сложной физической картине чередования многочисленных падающих и отраженных волн разрежения и сжатия. Входная волна, содержащая один пик, приведет к появлению одной пары "волна сжатия - волна разрежения",

распространяющейся по течению, и еще одной пары, связанной с отраженной волной и распространяющейся против течения. Для задачи (13), (14) в условии (16) использовалось Фурье-разложение  $P_G(t)$ , содержащее пять гармоник, что обеспечивало достаточно высокую точность.

Результаты расчетов по одномерной модели идеального волновода без циклов (рис.1а) приведены на рис.2. Во всех случаях для определенности приведены результаты расчетов колебаний давления и скорости в среднем сечении ( $x = L_1/2$ ) первой трубки. При отсутствии отражений на терминальных элементах форма волны скорости соответствует с точностью до масштабного коэффициента и сдвига по времени волне давления (кривые 1 и 6 на рис.2а). При снижении проводимости терминальных элементов амплитуда волны скорости монотонно уменьшается и одновременно увеличивается амплитуда волны и длительность фазы обратного тока жидкости (кривые 2-5 на рис.2а). При этом положение амплитуды максимума скорости смещается влево и при достаточно больших значениях  $\Gamma$  максимум скорости опережает по времени максимум давления, что имеет место в реальных артериальных руслах [2,12].

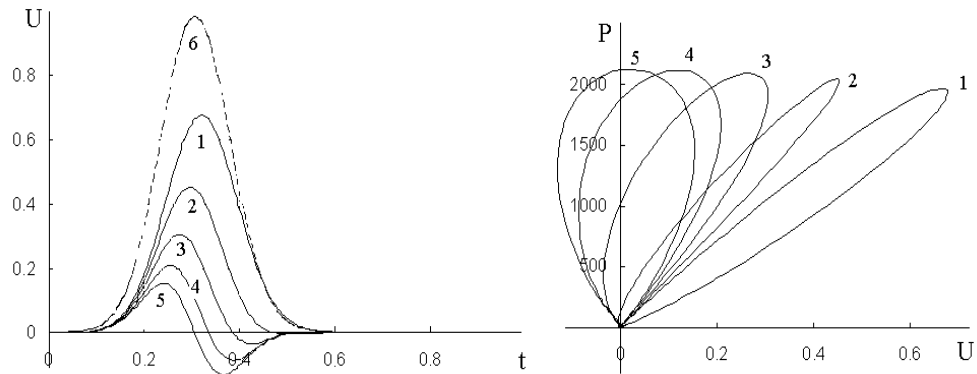


Рис.2. Зависимости  $U(t)$  (а) и  $P(U)$  (б), одномерная модель, кривые 1-5 соответствуют случаям  $\Gamma = 0; 0.25; 0.5; 0.75; 1$ , а кривая 6 входному давлению  $P_G(t)$ .

Зависимость давление-расход, которую удобно использовать в диагностике [25], имеет вид вытянутой петли. С увеличением коэффициента отражения длинная ось петли поворачивается против часовой стрелки, а площадь петли увеличивается (рис.2б). Это соответствует как результатам численных расчетов по другой модели [25], так и экспериментам на латексных трубках [26] и на аорте собаки [27].

Метод WIA предполагает вычисление интенсивностей падающей и отраженной волн по измеренным экспериментально или рассчитанным в ходе решения задачи кривым  $P(t)$  и  $U(t)$  по формулам [6,7,10,11]:

$$dI^{\pm}(t) = \pm \frac{1}{4\rho c} (dP(t) \pm \rho c dU(t))^2,$$

где знак  $d$  обозначает приращение.

Падающая и отраженная компоненты волн давления и скорости определяются по формулам [6,7,10,11]:

$$P^+(t) = \frac{Y_0 P(t) + SU(t)}{2Y_0}, \quad P^-(t) = \frac{Y_0 P(t) - SU(t)}{2Y_0};$$

$$U^+(t) = \frac{SU(t) + Y_0 P(t)}{2SZ^0}, \quad U^-(t) = \frac{SU(t) - Y_0 P(t)}{2S}.$$

При этом  $P(t) = P^+(t) + P^-(t)$ ,  $U(t) = U^+(t) - U^-(t)$ . Результат вычисления падающей и отраженной волн давления  $P^+(t)$  и  $P^-(t)$  по решению одномерной задачи для неидеального волновода приведен на рис.3а. Видно, что при  $\Gamma = 0$  есть ненулевая компонента  $P^-(t)$ , которая, как было показано в [25], представляет собой колебания давления в системе трубок как упругом резервуаре (компонента Франка). При увеличении коэффициента отражения на терминальных элементах амплитуда падающей волны уменьшается, а отраженной возрастает. Для уменьшения громоздкости рисунка на нем пронумерованы только кривые 1 и 5, а пронумерованные кривые расположены между ними.

Кривые интенсивностей волн  $dI^\pm(t)$  демонстрируют два пика на кривой  $dI^+(t)$ , соответствующей падающей волне, и два пика на кривой  $dI^-(t)$ , соответствующей отраженной волне (рис.3б). Первые пики соответствуют волне сжатия, а вторые волне разрежения. Таким образом, распространение волны сопровождается следующими событиями: при  $t_1 = 0.1$  в среднем сечении трубки появляется передний фронт падающей волны сжатия, которая достигает максимума при  $t = 0.25$  (в зависимости от  $\Gamma$ ). При  $t_2 = 0.15$  появляется передний фронт отраженной волны сжатия, которая достигает максимума при  $t = 0.28$ . Затем появляется падающая волна разрежения, которая всегда сопровождает волну сжатия, и вслед за ней отраженная волна разрежения. С увеличением  $\Gamma$  амплитуда падающих волн монотонно снижается, а амплитуда отраженных волн растет. Разница во времени  $\Delta t = t_2 - t_1$ , умноженная на скорость волны  $c$ , дает расстояние до места отражения. Для идеального волновода это расстояние до терминальных элементов, но из рис.3б видно, что в модели (рис.1а) присутствует небольшая по амплитуде отраженная волна, связанная с нелинейностью свойств стенки трубки и задачи. Таким образом, условия отсутствия отражения волн для нелинейной модели должны быть получены отдельно и, в силу (2), они будут зависеть от  $P_0$ , так как при малых  $P_0$  проявляются линейные свойства стенки, а с ростом  $P_0$  становится существенной нелинейность.

Для сравнения результаты расчетов по модели идеального волновода без петель приведены на рис.4. При увеличении  $\Gamma$  амплитуда волны давления монотонно возрастает, поскольку падающая волна накладывается на отраженную и, в силу малости длины трубки по сравнению с длиной волны, отраженная волна быстро достигает середины трубки. Для обеих моделей выражена тенденция к небольшому смещению максимума падающей

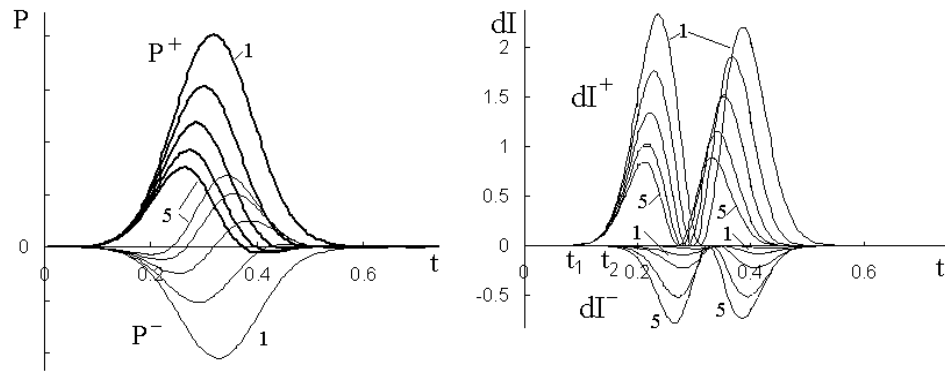


Рис.3. Зависимости  $P^\pm(t)$  (а) и  $dI^\pm(t)$  (б), одномерная модель, кривые 1 и 5 соответствуют случаям  $\Gamma = 0; 1$ , а кривые между 1 и 5 - случаям  $\Gamma = 0.25; 0.5; 0.75$ .

волны давления (рис.3а и рис.4а) влево с ростом коэффициента отражения, причем сдвиг волны скорости больше, чем волны давления, что соответствует рис.2а и данным физиологии.

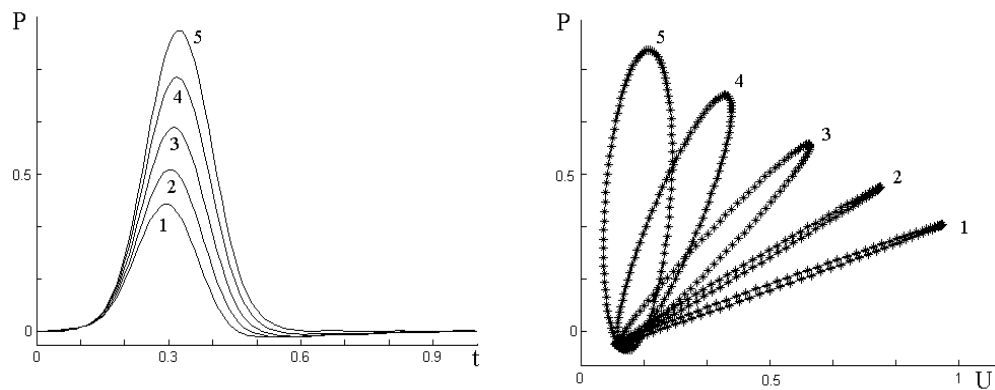


Рис.4. Зависимости  $U(t)$  (а) и  $P(U)$  (б), двумерная модель, кривые 1-5 соответствуют случаям  $\Gamma = 0; 0.25; 0.5; 0.75; 1$ .

Зависимость давление-расход, рассчитанная по линеаризованной двумерной модели, проявляет те же свойства: с ростом  $\Gamma$  длинная ось петли поворачивается против часовой стрелки, а площадь петли увеличивается (рис.2б). Следует обратить внимание на различия кривых  $P(U)$ . Для линеаризованной модели при  $\Gamma = 0$  участки синхронного возрастания давления и скорости практически линейны (кривая 1 на рис.4б), что связано с отсутствием отраженных волн. Для нелинейной модели эта зависимость линейна только в начальном периоде распространения волны вдоль трубки. Поскольку скорость волны пропорциональна величине  $dP/dU$ , которая определяет угол наклона касательной к кривой, это значит, что скорость пульсовой волны возрастает со временем, очевидно, в связи с нелинейным

возрастанием жесткости трубки по мере роста давления. Поэтому в линеаризованной модели кривые  $P(U)$  для всего диапазона значений  $\Gamma$  близки к эллипсам, а для нелинейной модели их форма отличается от эллипсоидальной и присутствует точка в нижней части кривой, где  $dP/dU$  терпит разрыв (рис.2б).

Результаты моделирования стеноза путем уменьшения диаметра соответствующей трубки в 10 раз приведены на рис.5-6 для нелинейной модели. На рис.5 показаны измерения колебаний скорости. На обоих рисунках кривая 1 соответствует неподжатым трубкам. На рис.5а кривые 2,3,4 соответствуют пережатию следующих наборов трубок: {8}, {8,9}, {8,9,10,11}. Таким образом, поджатие каждой дополнительной из трубок 4-й генерации вызывает небольшое дополнительное уменьшение амплитуды волны и увеличения амплитуды обратного тока. По мере увеличения числа пережатых трубок момент времени начала обратного тока становится все раньше. На рис.5б кривые 2-4 соответствуют пережатию 2-й, 3-й и 4-й трубок. В отличие от предыдущего случая, здесь форма волны несколько изменяется, поскольку трубки 2-3-й генераций имеют больший диаметр и их пережатие более существенно для тока жидкости. Трубки N2 и N3 расположены в дереве симметрично, поэтому соответствующие им кривые 2 и 3 практически совпадают.

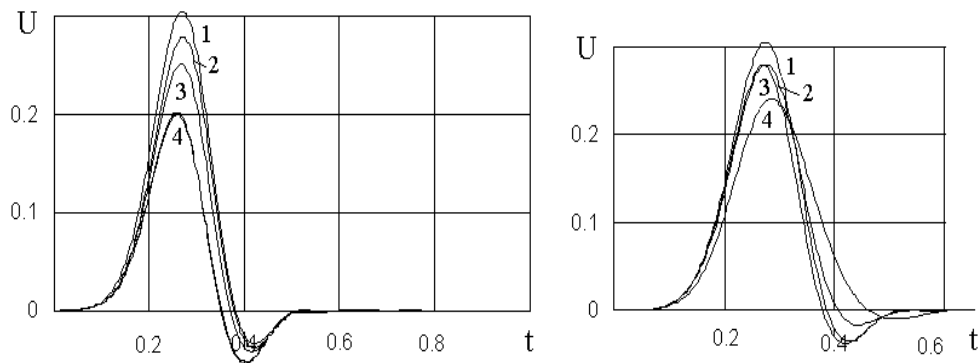


Рис.5. Зависимости  $U(t)$ , одномерная модель, для  $\Gamma = 0.25$  и пережатия трубок 4-й (а) и 2-3-й (б) генераций. Пояснения в тексте.

Зависимости  $P(U)$  для тех же случаев пережатия трубок приведены на рис.6. Закупорка трубок последней генерации ведет к повороту длинной оси петли против часовой стрелки и увеличению «ширины» петли, то есть ее максимального размера в направлении, ортогональном длинной оси. Таким образом, характер изменений петли  $P(U)$  сходен с тем, что происходит при увеличении коэффициента отражения, то есть с уменьшением проводимости терминальных элементов (рис.2б, 4б). Это не удивительно, поскольку трубки последней генерации также играют роль терминальных, то есть по сути система, представленная последовательным соединением трубки последней

генерации и ее терминального элемента  $Y_t$ , сама играет роль терминального элемента, и его проводимость можно уменьшить как пережимая трубку, так и уменьшая  $Y_t$ . В отличие от петель, приведенных на рис.2б, петли на рис.6а несимметричны, что позволяет отличать случаи уменьшения проводимости  $Y_t$  и пережатия трубок последней генерации, что можно использовать в медицинской диагностике. Сходные изменения прослеживаются и при пережатии трубок 2-3-й генерации (рис.6б) с заметной асимметрией петли  $P(U)$ .

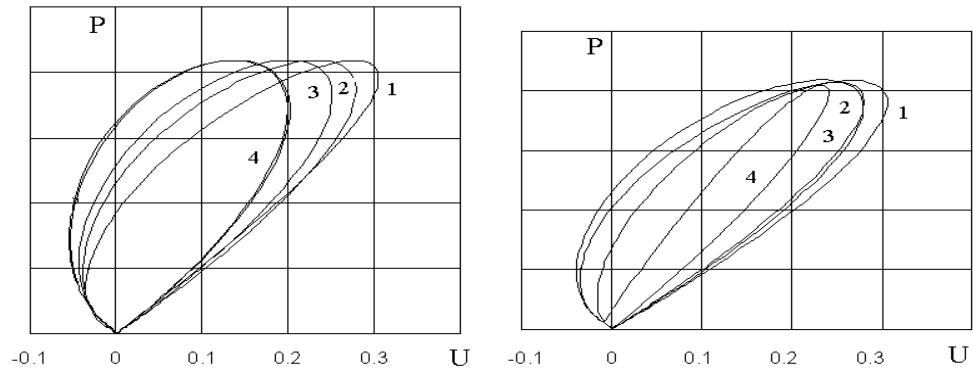


Рис.6. Зависимости  $P(U)$ , одномерная модель, для  $\Gamma = 0.25$  и пережатия трубок 4-й (а) и 2-3-й (б) генераций. Обозначения те же, что и на рис.5.

На основе одномерной и двумерной моделей были также рассчитаны многие другие случаи одновременного пережатия нескольких трубок и снижения проводимости  $Y_t$ , причем как для бинарных деревьев, так и для систем с циклами (рис.1б,в). Было получено, что при наличии циклов все описанные выше изменения кривых  $P(t)$ ,  $U(t)$ ,  $P(U)$ ,  $dI^\pm(t)$  сохраняются, но менее выражены, поскольку существуют дополнительные пути распространения волн и течения жидкости. Например, пережатие трубки N2 в модели на рис.1в не приведет к отсутствию течения в трубках N8-11, поскольку жидкость будет поступать через трубку N17. Наличие дополнительных путей для распространения волн приводит к усложнению картины отражения волн, поэтому на кривых  $dI^\pm(t)$  появляется гораздо больший набор отраженных волн разрежения-сжатия. По временам запаздывания передних фронтов соответствующих падающих и отраженных волн можно вычислить расстояние до соответствующего участка отражения. При наличии закупорки амплитуда отраженной волны больше, а при наличии дополнительных циклов в системе трубок – меньше.

**7. Заключение.** Таким образом, сравнительные расчеты по представленным нелинейной одномерной и линеаризованной двумерной моделям показали, что обе дают качественно сходные результаты как для бинарных деревьев, так и для систем с циклами, при наличии пережатий трубок и многочисленных участков отражения волн. Зависимости давление-



расход и распределение интенсивностей падающей и отраженных волн имеют характерные отличия при наличии пережатых трубок, циклов и больших терминальных сопротивлений, поэтому их можно использовать в медицине для дифференциальной диагностики нарушений в системе кровообращения. При больших гидростатических давлениях проявляются нелинейные свойства стенки трубок, поэтому использование одномерной модели предпочтительнее.

Работа выполнена при частичной поддержке международного Украинско-Белорусского гранта Ф29.1/046 и Royal Society London (Royal Society London fellowship). Автор выражает глубокую признательность проф. Kim Parker и проф. Spenser Sherwin (Imperial College, London) за плодотворные обсуждения результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Euler, L. Principia pro motu sanguinis per arterias determinando // Opera Postuma. - 1862. v.2. - P. 814–823.
2. McDonald D.A. Blood flow in arteries. Baltimore:Williams & Wilkins. 1974. 480p.
3. Parker K.H., Jones J.H. Forward and backward running waves in arteries: analysis using the method of characteristics. //ASME J.Mech.Eng. - 1990. - v.112. - P.322–326.
4. Ottesen J.T., Olufsen M.S., Larsen J.K. Applied mathematical models in human physiology. Roskilde University Press. - 2003. 234p.
5. Lighthill, M.J. Waves in Fluids. New York: Cambridge University Press, - 1978.
6. Sun Y.-H., Anderson T.J., Parker K.H., Tyberg J.V. Wave-intensity analysis: a new approach to coronary hemodynamics. // J.Appl.Physiol. - 2000. - v.89. - P.1636–1644.
7. Кизилова Н.Н. Новые направления и перспективы теории пульсовых волн в артериях // Современные проблемы биомеханики. - М.: Издательство Московского университета, 2006. Вып. 11. - С. 44–63.
8. Belani K., Ozaki M., Hynson J., et al A new noninvasive method to measure blood pressure. //Anesthesiology. - 1999. - v.91,N3. - P.686–692.
9. Зенин О.К., Кизилова Н.Н., Филиппова Е.Н. Исследование закономерностей строения русла коронарных артерий человека. //Биофизика. - 2007. - т.52,№5. - С.924–930.

10. Кизилова Н.Н. Разложение волн давления, распространяющихся в податливых трубках, на падающую и отраженную компоненты // Вестник Харьковского национального университета. Сер."Математика, прикладная математика и механика". - 2004. - т.645,№54. - С. 85-92.
11. Кизилова Н.Н. Исследование зависимостей давление-расход и параметров падающей и отраженной волн давления в артериальных руслах //Акустический вестник. - 2004. - т.7,№1. - С.50-61.
12. Pedley T.J. The Fluid Mechanics of Large Blood Vessels. Cambridge University Press. - 1980. - 246p.
13. Моисеева И.Н., Регирер С.А. Некоторые особенности отражения пульсовых волн в артериях. //Иzv.РАН. МЖГ. - 1993. - №4. - С.134-139.
14. Кизилова Н.Н. Отражение пульсовых волн и резонансные свойства артериальных русел //Известия РАН. Серия МЖГ. - 2003. №5.- С.127-137.
15. Matthys K.S., Alastruey J., Peiror J. et al Pulse wave propagation in a model human arterial network: Assessment of 1-D numerical simulations against in vitro measurements. // J. Biomech. - 2007. - v.40. - P. 3476-3486.
16. Womersley J.R. Oscillatory motion of a viscous liquid in a thin-walled elastic tube. //Phil.Mag. - 1955. - v.46,№73. - P.199-221.
17. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.:Наука. - 1970. - 904с.
18. Cox R.H. Wave propagation through the Newtonian fluid contained within thick-walled viscoelastic tube. //Biophys.J. - 1968. - v.8,№2. - P.691-709.
19. Atabek H.B. Wave propagation through a viscous fluid contained in a tethered, initially stressed, orthotropic elastic tube. //Biophys.J. - 1968.- v.8,№2. - P.626-649.
20. Taylor M.G. The input impedance of an assembly of randomly branching elastic tubes. //Biophys.J. - 1966. - Vol.6,№1. - P.29-51.
21. Кизилова Н.Н. Распространение волн давления в толстостенной трубке конечной длины из вязкоупругого материала: приложение к распространению пульсовых волн в артериальных руслах // Вестник Харьковского национального университета. Сер."Математика, прикладная математика и механика". - 2003. - т.602,№53. - С.82-93.
22. Кизилова Н.Н. Распространение волн давления в заполненных жидкостью трубках из вязкоупругого материала. //Известия РАН. МЖГ. - 2006. - №3. - С.125-139.

23. Кизилова Н.Н., Попова Н.А. Критерии оптимального функционирования ветвящихся транспортных систем живой природы //Вестник Харьковского университета. Сер. Математика, прикладная математика и механика. - 1999. - N444. - С.148-156.
24. Kizilova N.N. Computational approach to optimal transport network construction in biomechanics // Lecture Notes in Computer Science. - 2004. - Vol.3044. - P.476–485.
25. Кизилова Н.Н. Спектральные характеристики и зависимости давление-расход при волновых течениях жидкости в системах вязкоупругих трубок. //Акустический вестник. - 2005. - т.8, N1-2. - С.54-63.
26. Ovadia-Blechman Z., Einav Sh., Zaretsky U. et al The area of the pressure flow loop for assessment of arterial stenosis: A new index. // Technology and Health Care. - 2002. V.10. - P.39–56.
27. Khir A.W., Zambanini A., Parker K.H. Local and regional wave speed in the aorta: effects of arterial occlusion. // Medical Eng. Physics. - 2004. - V.26. - P.23–29.
28. Tyberg J.V., Davies J.E., Wang Z. et al Wave intensity analysis and the development of the reservoirwave approach. // Med. Biol. Eng. Comput. - 2009. - V.47. - P.221–232.

Статья получена: 1.10.2010; окончательный вариант: 17.11.2010;  
принята: 19.11.2010.