Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 533.72 № 931, 2010, с.49–58

Перехідний режим між течіями типу "прискорення-ущільнення"

В.Д. Гордевський, Н.В. Лемешева

Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна
пл.Свободи, 4, 61077, Харків, Україна
gordevskyy2006@yandex.ru, lemesheva.kharkov@rambler.ru

Побудовано наближені розв'язки кінетичного рівняння Больцмана для твердих куль, які описують перехідний режим між двома течіями, що прискорюються та згущуються. Здобуто достатні умови мінімізації відхилу між частинами цього рівняння в деякій спеціальній метриці.

Гордевский В.Д., Лемешева Н.В., **Переходный режим между потоками типа "ускорение-уплотнение".** Построены приближенные решения кинетического уравнения Больцмана для твердых сфер, описывающие переходный режим между двумя ускоряющимимся и уплотняющимися потоками. Получены достаточные условия минимизации невязки между частями этого уравнения в некоторой специальной метрике.

V.D. Gordevskyy, N.V. Lemesheva, **Transitional regime between the flows of "accelerating-packing" type.** Approximate solutions of the kinetic Boltzmann equation for hard spheres are built which describe the transitional regime between two accelerating and packing flows. Sufficient conditions for the minimization of the discrepancy between the sides of this equation in some special metric are obtained.

2000 Mathematics Subject Classification: 76P05, 45K05, 82C40, 35Q55.

Вступ

Нелінійне кінетичне рівняння Больцмана, яке описує поведінку досить розрідженого газу з твердих куль, має вигляд [1, 2]:

$$D(f) = Q(f, f); \tag{1}$$

$$D(f) = \frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x}; \tag{2}$$

$$Q(f,f) = \frac{d^2}{2}\int_{R^3} dv_1 \int_{\Sigma} d\alpha |(v - v_1, \alpha)| \cdot$$
$$\cdot [f(t, v_1', x) f(t, v', x) - f(t, v_1, x) f(t, v, x)], \tag{3}$$

де $f = f(t,v,x)$ - функція розподілу молекул, що шукається; $t \in R^1$ - час; $x = \left(x^1, x^2, x^3\right) \in R^3$ та $v = \left(v^1, v^2, v^3\right) \in R^3$ - координата та швидкість молекули; $d > 0$ - її діаметр; $\frac{\partial f}{\partial x}$ (або просто f') - просторовий градієнт функції f; α - вектор на одиничній сфері Σ в R^3; v, v_1 та v', v_1' - швидкості двох молекул до зіткнення та після нього, відповідно.

Єдиним класом точних розв'язків рівняння (1)-(3), який знайдено в явному вигляді до цього моменту, є максвеліани $M(t,v,x)$, тобто розв'язки системи

$$D(M) = Q(M,M) = 0. \tag{4}$$

Глобальні (тобто незалежні ні від t, ні від x), а також локальні стаціонарні (залежні лише від x - так звані гвинти або "спіралі" [8]) максвеліани були відомі іще Максвеллу та Больцману [1, 2]. Найбільш загальний вигляд локальних максвеліанів, залежних ще й від t, було знайдено значно пізніше, і він виявився досить складним. В роботі [6] проведено детальний аналіз та запропоновано класифікацію таких розв'язків з точки зору їх фізичного сенсу та геометричної структури ("смерчі", "стиск-розширення", "прискорення-ущільнення" тощо).

Проте при переході до опису нерівноважних процесів в газі доводиться шукати вже не точні, а лише наближені явні розв'язки рівняння Больцмана. Вони будуються у вигляді бімодальних розподілів:

$$f = \varphi_1 M_1 + \varphi_2 M_2, \tag{5}$$

з коефіцієнтними функціями φ_i, які задовольняють умови:

$$\varphi_i = \varphi_i(t,x) \geq 0; \quad \varphi_i \in C^1\left(R^4\right), \quad i = 1,2 \tag{6}$$

та максвеліанами M_i, $i = 1,2$ того чи іншого з зазначених типів [3-9]. При цьому для оцінки величини "відхилу", тобто розбіжності між лівою та правою частинами рівняння (1), використовується декілька норм різниці між ними. Виявляється, що знайдені таким чином наближені розв'язки суттєво залежать саме від вибору згаданої норми, і це інколи приводить до необхідності накладати вельми жорсткі вимоги на вигляд функцій φ_i, $i = 1,2$ та на поведінку гідродинамічних параметрів (густина, температура тощо), що входять до M_i, $i = 1,2$ [6-9].

В даній роботі досліджується питання про наближений опис перехідного режиму між двома максвелівськими течіями типу "прискорення-ущільнення" з використанням відхилу "з вагою", який запропоновано тут з урахуванням специфіки таких потоків, що дозволяє суттєво розширити клас відповідних бімодальних розподілів.

Наведемо необхідні означення та точну постановку задачі.

Означення. *Назвемо рівномірно-інтегральним (або "змішаним") відхилом з вагою наступний вираз:*

$$\widetilde{\Delta} = \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{1}{1+|t|} \int_{R^3} |D(f) - Q(f,f)|\, dv \tag{7}$$

(зауважимо, що в більшості попередніх робіт щодо бімодальних розподілів, зокрема, в [7], вивчається відхил Δ, який відрізняється від (7) відсутністю "вагового" множника $\frac{1}{1+|t|}$).

Будемо шукати розподіл f у вигляді (5), (6), де максвеліани M_i відповідають течіям типу "прискорення-ущільнення" [6, 7]:

$$M_i = \rho_i \left(\frac{\beta_i}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\beta_i (v-\widetilde{v}_i)^2},\ i = 1,2 \tag{8}$$

$$\rho_i = \overline{\rho}_i \cdot e^{\beta_i \left(\widetilde{v}_i^2 + 2\overline{u}_i x\right)},\ i = 1,2 \tag{9}$$

$$\widetilde{v}_i = \overline{v}_i - \overline{u}_i t,\ i = 1,2 \tag{10}$$

(тут $\rho_i = \rho_i(t,x)$ - густина i-ої течії; $\beta_i = \frac{1}{2T_i}$ - її обернена температура; $\widetilde{v}_i = \widetilde{v}_i(t)$ - масова швидкість; $\overline{\rho}_i, \overline{v}_i, \overline{u}_i$ - скалярні та векторні константи).

Треба знайти функції φ_i, $i = 1,2$ та поведінку параметрів, що забезпечують довільну мализну відхилу (7).

В наступному розділі наведено декілька результатів, які дають розв'язок цієї задачі.

Основні результати

Теорема 1. *Нехай коефіцієнтні функції в розподілі (5) мають вигляд:*

$$\varphi_i(t,x) = C_i \left(x + \overline{u}_i \frac{(\overline{v}_i - \overline{u}_i t)^2}{2\overline{u}_i^2} \right),\ i = 1,2, \tag{11}$$

де $C_i \geq 0$ - довільні фінітні або досить швидко спадаючі на нескінченності гладкі функції. Нехай, крім того,

$$\overline{u}_i = \overline{u}_{oi} \beta_i^{-n_i}, \quad i = 1,2, \tag{12}$$

$$\overline{v}_i = \overline{v}_{oi} \beta_i^{-k_i}, \quad i = 1,2, \tag{13}$$

де $\overline{u}_{oi}, \overline{v}_{oi} \in R^3$ - довільні та фіксовані, а числа n_i, k_i такі, що

$$n_i \geq 1;\ k_i \geq \frac{1}{2};\ k_i \geq \frac{n_i}{2}, \quad i = 1,2. \tag{14}$$

Тоді має місце твердження

$$\lim_{\beta_1,\beta_2 \to +\infty} \widetilde{\Delta} = 0. \tag{15}$$

Доведення. Легко перевірити з використанням техніки розвинутої в [7], та з урахуванням (9)-(11), що величини

$$t\varphi_i\rho_i(t,x);\ \frac{\partial\varphi_i}{\partial t}\rho_i(t,x);\ \left|\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\right|\rho_i(t,x);\ t\left(\overline{u}_i,\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\right)\rho_i(t,x),\quad i=1,2 \tag{16}$$

обмежені на R^4 після множення на $\frac{1}{1+|t|}$. Звідси, в силу припущення про гладкість функцій φ_i, випливає, що така ж "обмеженість з вагою" має місце й для величин $\sqrt{|t|}\varphi_i\rho_i(t,x)$, $i=1,2$, отже, і для їх добутку: $|t|\varphi_1\varphi_2\rho_1(t,x)\rho_2(t,x)$, що знову внаслідок гладкості гарантує те ж саме й без множника $|t|$. Звідси випливає, що коректно визначена оцінка зверху $\widetilde{\Delta}'$ для відхилу (7):

$$\widetilde{\Delta}\le\widetilde{\Delta}' \tag{17}$$

наступного вигляду (вона здобувається після підстановки в (1)-(3)відомих формул для v', v_1' [1-3], а також (5), (8)-(10) з урахуванням (4) та використанням техніки робіт [7, 8]):

$$\widetilde{\Delta}'=\sup_{(t,x)\in R^4}\frac{1}{1+|t|}\sum_{i,j=1,i\neq j}^{2}\left[\int_{R^3}\left|\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}+\left(\frac{u}{\sqrt{\beta_i}}+\overline{v}_i-\overline{u}_it\right)\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}+\right.\right.$$

$$\left.+\varphi_1\varphi_2\rho_j(t,x)\frac{d^2}{\sqrt{\pi}}\int_{R^3}F_{ij}e^{-w^2}dw\right|\rho_i(t,x)\pi^{-3/2}e^{-u^2}du+$$

$$\left.+\varphi_1\varphi_2\frac{\rho_1(t,x)\rho_2(t,x)}{\pi^2}d^2\int_{R^6}e^{-w^2-u^2}F_{ij}dwdu\right] \tag{18}$$

де

$$F_{ij}=\left|\frac{u}{\sqrt{\beta_i}}+\overline{v}_i-\overline{v}_j+(\overline{u}_j-\overline{u}_i)t-\frac{w}{\sqrt{\beta_j}}\right|,\quad i,j=1,2,\ i\neq j. \tag{19}$$

Переходячи тепер в (9)-(11), (18), (19) до границі коли $\beta_1,\beta_2\to+\infty$ з урахуванням умов (12)-(14) (можливість такого граничного переходу обгрунтовується за допомогою Леми 1 роботи [8] та стандартних теорем про граничний перехід під знаком інтеграла - умови всіх цих тверджень легко перевіряються завдяки структурі виразів (18), (19), гладкості функцій, що до них входять, та хорошій збіжності всіх інтегралів), здобудемо:

$$\lim_{\beta_1,\beta_2\to+\infty}\rho_i(t,x)=\overline{\rho}_i\mu_i(x),\quad i=1,2, \tag{20}$$

де

$$\mu_i(x)=\left[\begin{array}{ll}1; & n_i>1;k_i>\frac{1}{2},\\ \exp\{2\overline{u}_{oi}x\}; & n_i=1;k_i>\frac{1}{2},\\ \exp\{\overline{v}_{oi}^2+2\overline{u}_{oi}x\}; & n_i=1;k_i=\frac{1}{2};\end{array}\right. \tag{21}$$

$$\lim_{\beta_1,\beta_2\to+\infty}\varphi_i=C_i\left(x+a_i\right), \tag{22}$$

де

$$a_i = \left[\begin{array}{ll} 0, & k_i > \frac{1}{2}n_i, \\ \frac{\overline{u}_{oi}\overline{v}_{oi}^2}{2\overline{u}_{oi}^2}, & k_i = \frac{1}{2}n_i; \end{array} \right. \tag{23}$$

$$\lim_{\beta_1,\beta_2\to+\infty} \frac{\partial\varphi_i}{\partial t} = \lim_{\beta_1,\beta_2\to+\infty} \frac{t\overline{u}_i^2 - (\overline{u}_i,\overline{v}_i)}{\overline{u}_i^2} \left(\overline{u}_i, C_i' \left(x + \overline{u}_i \frac{(\overline{v}_i - \overline{u}_i t)^2}{2\overline{u}_i^2}\right)\right) = 0; \tag{24}$$

$$\lim_{\beta_1,\beta_2\to+\infty} \frac{\partial\varphi_i}{\partial x} = C_i'\left(x + a_i\right); \tag{25}$$

$$\lim_{\beta_1,\beta_2\to+\infty} F_{ij} = 0, \quad i \neq j, \tag{26}$$

і, значить,

$$\lim_{\beta_1,\beta_2\to+\infty} \widetilde{\Delta}' = 0, \tag{27}$$

що з урахуванням (17) і тягне за собою (15). Теорему доведено.

Зауваження 1. Умови, що накладаються на функції C_i, $i = 1,2$ можна було б дещо полегшити, бо, як видно з (9), (20)-(25), множники при цих функціях зростають не за всіма напрямками в R^3, а лише вздовж вектора $\overline{u}_i$.

Теорема 2. *Нехай функції φ_i в розподілі (5) мають вигляд:*

$$\varphi_i(t,x) = \psi_i(t,x)\exp\left\{-\beta_i((\overline{v}_i - \overline{u}_i t)^2 + 2\overline{u}_i x)\right\}, \quad i = 1,2 \tag{28}$$

де функції ψ_i такі, що вирази

$$t\psi_1\psi_2; \ \frac{\partial\psi_i}{\partial t}; \ t\psi_i; \ \left|\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\right|; \ t\left(\overline{u}_i, \frac{\partial\psi_i}{\partial x}\right), \quad i = 1,2 \tag{29}$$

обмежені на R^4 після множення на $\frac{1}{1+|t|}$. Нехай до того ж виконується (12) при

$$n_i > \frac{1}{2}. \tag{30}$$

Тоді справедлива оцінка (17), причому існує скінченна границя:

$$\lim_{\beta_1,\beta_2\to+\infty} \widetilde{\Delta}' = \sum_{i,j=1,i\neq j}^{2} \overline{\rho}_i \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{1}{1+|t|} \left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t} + \overline{v}_i\frac{\partial\psi_i}{\partial x} + \psi_1\psi_2\pi d^2\overline{\rho}_j|\overline{v}_1 - \overline{v}_2|\right| +$$

$$+2\pi d^2\overline{\rho}_1\overline{\rho}_2|\overline{v}_1 - \overline{v}_2| \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{1}{1+|t|}(\psi_1\psi_2). \tag{31}$$

Доведення. З урахуванням (9), (10), (28) маємо:

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial t} = \overline{\rho}_i[\rho_i(t,x)]^{-1}\left\{\frac{\partial\psi_i}{\partial t} + 2\beta_i\psi_i\left((\overline{v}_i,\overline{u}_i) - t\overline{u}_i^2\right)\right\}, \tag{32}$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = \overline{\rho}_i [\rho_i(t,x)]^{-1} \left\{ \frac{\partial \psi_i}{\partial x} - 2\beta_i \psi_i \overline{u}_i \right\}, \quad i = 1, 2, \tag{33}$$

тому замість (18) здобудемо (існування відповідних супремумів випливає з умови (29) нашої теореми):

$$\widetilde{\Delta}' = \pi^{-3/2} \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{1}{1+|t|} \sum_{i=1}^{2} \overline{\rho}_i \int_{R^3} \left[\left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + A_i + B_i \right| + A_i \right] e^{-u^2} du, \tag{34}$$

де

$$A_i = A_i(u,t) = \psi_1 \psi_2 \frac{d^2}{\sqrt{\pi}} \overline{\rho}_j \int_{R^3} e^{-w^2} F_{ij} dw, \quad i \neq j, \tag{35}$$

$$B_i = B_i(u,t) = \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \left(\frac{u}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{v}_i - \overline{u}_i t \right) - 2\psi_i \sqrt{\beta_i}(u, \overline{u}_i) \tag{36}$$

при збереженні (19). Значить, граничний перехід завдяки (12), (30) тепер дає (його обгрунтування таке ж, як при доведенні Теореми 1):

$$\lim_{\beta_1,\beta_2 \to +\infty} F_{ij} = |\overline{v}_1 - \overline{v}_2| \, ; \tag{37}$$

$$\lim_{\beta_1,\beta_2 \to +\infty} A_i = \psi_1 \psi_2 \pi d^2 \overline{\rho}_j \, |\overline{v}_1 - \overline{v}_2| \, , \quad i \neq j; \tag{38}$$

$$\lim_{\beta_1,\beta_2 \to +\infty} B_i = \overline{v}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x}, \quad i = 1, 2. \tag{39}$$

Все це після переходу до границі в (34) та подальшого інтегрування по u приводить до (31). Теорему доведено.

Легко тепер сформулювати наслідок з цієї теореми, який дає одну з можливих достатніх умов довільної мализни відхилу (7).

Наслідок 1. *Нехай виконуються всі умови Теореми 2, і ψ_i має вигляд:*

$$\psi_i = C_i \left(x - \overline{v}_i t \right), \quad i = 1, 2 \tag{40}$$

або

$$\psi_i = C_i \left([x \times \overline{v}_i] \right), \quad i = 1, 2, \tag{41}$$

де $C_i \geq 0$ - фінітні гладкі функції.

Тоді:

1) Якщо C_1, C_2, $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$ задовольняє наступні умови:

$$supp C_1 \cap supp C_2 = \oslash \tag{42}$$

або

$$\overline{v}_1 = \overline{v}_2, \tag{43}$$

то має місце твердження (15).

2) При довільних C_1, C_2, $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$ маємо:

$$\lim_{d \to 0} \lim_{\beta_i \to +\infty, i=1,2} \widetilde{\Delta} = 0. \tag{44}$$

Доведення. Перш за все, легко бачити, що функції вигляду (40) або (41) за накладених тут умов задовольняють вимоги Теореми 2. Дійсно, для (40) виконується:

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} = -\left(\overline{v}_i, C_i^{'}\right), \quad i = 1, 2, \tag{45}$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x} = C_i^{'}, \quad i = 1, 2; \tag{46}$$

а у випадку (41) буде:

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} = 0, \tag{47}$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x} = \left[\overline{v}_i \times C_i^{'}\right], \quad i = 1, 2. \tag{48}$$

Значить, справедливе (31), і, крім того, в обох випадках

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \overline{v}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x} = 0, \quad i = 1, 2. \tag{49}$$

Остання рівність разом з (42) або (43), як видно з (31) дає або просто (27), або прямування цього виразу до нуля при $d \to 0$. Звідси завдяки (17) здобудемо (15). Наслідок 1 доведено.

Наступне твердження можна розглядати як деяке "проміжкове" між теоремами 1 і 2, оскільки показник експоненти в (28) замінюється тепер лише одним з присутніх там доданків.

Теорема 3. *Нехай*

$$\varphi_i(t, x) = \psi_i(t, x) \exp\{-\beta_i(\overline{v}_i - \overline{u}_i t)^2\}, \quad i = 1, 2, \tag{50}$$

причому вирази

$$t\psi_1\psi_2 \exp\{2\beta_1\overline{u}_1 x + 2\beta_2\overline{u}_2 x\}; \ \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \exp\{2\beta_i\overline{u}_i x\}; \ t\psi_i \exp\{2\beta_i\overline{u}_i x\};$$

$$\left|\frac{\partial \psi_i}{\partial x}\right| \exp\{2\beta_i\overline{u}_i x\}; \ t\left(\overline{u}_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial x}\right) \exp\{2\beta_i\overline{u}_i x\}, \quad i = 1, 2 \tag{51}$$

обмежені з вагою $\frac{1}{1+|t|}$, *а припущення (12) виконується для*

$$n_i \geq 1. \tag{52}$$

Тоді справедливе (17), причому існує скінченна границя величини $\widetilde{\Delta}'$, *яка дорівнює виразу (31) при* $n_i > 1$, *а при* $n_i = 1$

$$\lim_{\beta_1, \beta_2 \to +\infty} \widetilde{\Delta}' = \sum_{i,j=1, i\neq j}^{2} \overline{\rho}_i \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{1}{1+|t|} \left|\mu_i(x)\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \overline{v}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x}\right) + \right.$$

$$\left. + \psi_1\psi_2\mu_1(x)\mu_2(x)\pi d^2\overline{\rho}_j|\overline{v}_1 - \overline{v}_2|\right| + 2\pi d^2\overline{\rho}_1\overline{\rho}_2|\overline{v}_1 - \overline{v}_2| \times$$

$$\times \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{1}{1+|t|}[\mu_1(x)\mu_2(x)\psi_1(t,x)\psi_2(t,x)]+$$

$$+2\sum_{i=1}^{2}\overline{\rho}_i|(\overline{u}_{oi},\overline{v}_i)| \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{1}{1+|t|}\{\mu_i(x)\psi_i(t,x)\}, \qquad (53)$$

де

$$\mu_i(x) = \exp\{2\overline{u}_{oi}x\}, \quad i=1,2. \qquad (54)$$

Доведення аналогічне доведенню Теореми 2, але зараз завдяки (50) замість (32), (33) будемо мати:

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial t} = \exp\left\{-\beta_i(\overline{v}_i-\overline{u}_i t)^2\right\}\cdot\left\{\frac{\partial\psi_i}{\partial t}+2\beta_i\psi_i\left((\overline{v}_i,\overline{u}_i)-t\overline{u}_i^2\right)\right\}, \qquad (55)$$

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x} = \frac{\partial\psi_i}{\partial x}\exp\left\{-\beta_i(\overline{v}_i-\overline{u}_i t)^2\right\}. \qquad (56)$$

Тому в (34) перед інтегралом з'явиться множник $\exp\{2\beta_i\overline{u}_i x\}$ (і в (35) - такий же множник, але з індексом j), а другий доданок в (36) заміниться на (із знаком плюс!):

$$2\beta_i\psi_i\left((\overline{u}_i,\overline{v}_i)-t\overline{u}_i^2\right). \qquad (57)$$

Тоді при граничному переході, коли $\beta_1,\beta_2\to+\infty$, рівність (37) взагалі не зміниться, в (38) при $n_i=1$, $i=1,2$ виникає множник $\mu_j(x)$, $j\neq i$, а замість (39) здобудемо:

$$\lim_{\beta_1,\beta_2\to+\infty} B_i = \overline{v}_i\frac{\partial\psi_i}{\partial x}+2\psi_i H_i, \quad i=1,2, \qquad (58)$$

де

$$H_i = \left[\begin{array}{ll} 0, & n_i>1 \\ (\overline{u}_{oi},\overline{v}_i), & n_i=1. \end{array}\right. \qquad (59)$$

Оскільки, очевидно, границя величин $\exp\{2\beta_i\overline{u}_i x\}$ при $n_i>1$ дорівнює просто 1, а при $n_i=1$ збігається з (54), то саме в цьому (другому) випадку в граничному виразі для $\widetilde{\Delta}'$ не тільки виникають множники $\mu_i(x)$, $i=1,2$, але з'являється ще й додаткова сума (див. (58), (59)), яка не зустрічалася раніше, тобто в теоремах 1, 2, що й тягне за собою (53). Теорему доведено.

Наслідок 2. *Нехай в формулі (12) параметри n_i, $i=1,2$ задовольняють нерівність (52). Нехай, крім того, виконується додаткова умова:*

$$\overline{u}_i\perp\overline{v}_i, \quad i=1,2, \qquad (60)$$

і зберігаються припущення (50) та (40) або (41). Тоді твердження 1), 2) Наслідка 1 залишаються в силі.

Доведення. Перш за все перевіримо, що функції вигляду (40) або (41) при виконанні умов даного наслідка задовольняють вимоги Теореми 3.

Нехай спочатку виконане (40), тоді перший з виразів (51) за припущенням (42) просто дорівнює нулю тотожньо, а у випадку (43) після заміни

$$y = x - \overline{v}_i t \tag{61}$$

з урахуванням (60) набуває вигляду:

$$tC_1(y)C_2(y)e^{2y(\beta_1\overline{u}_1+\beta_2\overline{u}_2)}. \tag{62}$$

Оскільки $C_1(y)$ та $C_2(y)$ фінітні, то після множення на $\frac{1}{1+|t|}$ вираз (62), очевидно, є обмеженим.

Якщо ж брати ψ_i у вигляді (41) і знову розглянути ситуацію (43), то після розкладення довільного вектора x по ортогональному (внаслідок (60)!) базису:

$$\overline{u}_i, \overline{v}_i, [\overline{u}_i \times \overline{v}_i], \quad i = 1, 2, \tag{63}$$

завдяки специфіці аргументів в (41) виявиться, що функції C_i "зануляються" саме за тими напрямками в R^3, за якимим відповідні експоненти в (51) здатні зростати (множник t з огляду на наявність ваги є несуттєвим).

Решта виразів, що входять до (51), оцінюються цілком аналогічно з використанням формул (45) та (46), або (47) та (48).

Отже, ми можемо скористатися твердженням Теореми 3, тобто формулою (31) при $n_i > 1$ або формулами (53), (54) при $n_i = 1$. Але всі доданки, що в них входять, або просто дорівнюють нулю внаслідок чи (42), чи (43), чи (49), або прямують до нуля при $d \to 0$. Звідси завдяки (17) здобудемо (15). Наслідок 2 доведено.

Зауваження 2. Запропонований відхил з вагою $\widetilde{\Delta}$ вигляду (7) дозволив в даній роботі здобути низку нових наближених розв'язків рівняння Больцмана для твердих куль, які описують перехідний режим між течіями типу "прискорення-ущільнення" та суттєво відрізняються від побудованих раніше в [7] за допомогою розглянутого в [3-9] та інших роботах "звичайного" рівномірно-інтегрального відхилу Δ. Так, розподіл (11) тепер не містить не тільки окремого множника, спадаючого з часом на $\pm\infty$, а й мультиплікативної константи, без довільної мализни якої в роботі [7] не вдається здобути результат, аналогічний (15), а лише значно слабіше твердження, де в правій частині відповідної рівності замість нуля фігурує деяка величина, яка потребує подальшої мінімізації за рахунок інших параметрів розподілу. Те ж саме стосується і аналогів Наслідків 1,2, де завдяки новому відхилу вдається суттєво розширити класи знайдених розв'язків, а саме, вигляду (40) або (41), які до того ж можуть мати і цікавий фізичний сенс.

ЛІТЕРАТУРА

1. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана.– М.: Мир, 1978. – 495 с.

2. Карлеман Т. Математические задачи кинетической теории газов.– М.: ИИЛ, 1960. – 118 с.

3. Гордевский В.Д. Приближенное бимодальное решение уравнения Больцмана для твердых сфер // Матем. физ., анализ, геом. – 1995. – Т.2, **2**. – С. 168–176.

4. Гордевский В.Д. Критерий малости невязки для бимодального решения уравнения Больцмана // Матем. физ., анализ, геом. – 1997. – Т.4, **1/2**. – С. 46–58.

5. Гордевский В.Д. Приближенное двухпотоковое решение уравнения Больцмана // ТМФ – 1998. – Т.114, **1**. – С. 126–136.

6. Gordevskyy V.D. On the non-stationary Maxwellians // Math. Meth. Appl. Sci. – 2004. – V.27, **2**. – P. 231–247.

7. Gordevskyy V.D., Andriyasheva N.V. Interaction between "accelerating-packing" flows in a low-temperature gas // Math. Phys., Anal., Geom. – 2009. – V.5, **1**. – P. 38–53.

8. Гордевский В.Д. Двухпотоковые распределения с винтовыми модами // ТМФ – 2001. – Т.126, **2**. – С. 283–300.

9. Gordevskyy V.D. Transitional regine between vortical states of a gas//Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications – 2003. – V.53, **3-4**. – P. 481–494.

Стаття одержана: 10.10.2010; перероблений вариант: 7.11.2010; прийнята: 10.11.2010.