

Локальная математическая модель зернистого композиционного материала

А.Г. Николаев, Е.А. Танчик

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»
Украина*

Разработана локальная математическая модель напряженно-деформированного состояния зернистого композиционного материала, основанная на обобщенном методе Фурье. Численная реализация модели позволила получить характер распределения локальных напряжений в областях их концентрации. Проведено сравнение результатов с решением методом конечных элементов.

О. Г. Ніколаєв, Є. А. Танчик, **Локальна математична модель зернистого композиційного матеріалу.** Розроблено локальну математичну модель напружено-деформівного стану зернистого композиційного матеріалу, побудовану на узагальненому методі Фур'є. Чисельна реалізація моделі дозволила отримати характер розподілу локальних напружень в областях їхньої концентрації. Проведено порівняння результатів із рішенням методом кінцевих елементів.

A. G. Nikolaev, E. A. Tanchik, **Local Mathematical Model of Granular Composite Material.** The local mathematical model of stress-strain state of granular composite material, based on a generalized Fourier's method, is developed. The numerical realization of model has allowed to receive character of distribution of local stress in the field of their concentration. The comparison of results with the solution on a finite element method is carried out.

2000 Mathematics Subject Classification 74E30.

Введение

В данный момент проводится большое количество исследований, связанных с разработкой моделей композиционных материалов и их применением в различных конструкциях. Композиционные материалы с их уникальными физико-механическими характеристиками с каждым годом вытесняют из

употребления в передовых отраслях машиностроения, таких как авиация и комонавтика, стали и цветные сплавы. Эта общая тенденция весьма устойчива, что делает данную область исследования очень перспективной.

Применение композитных материалов требует, однако, тщательного расчета и обоснования, так как механизмы деформирования и разрушения новых материалов еще очень слабо изучены. Существующие математические модели композитов в большинстве своем основаны на теории стохастических процессов и широком применении метода конечных элементов (МКЭ). Очень актуальной проблемой является создание численно-аналитических моделей для исследования локального напряженно-деформированного состояния (НДС) и получения физически точных решений. Основой подавляющего большинства всех таких моделей являются пространственные задачи теории упругости в различных постановках. Разные подходы к исследованию НДС моделей композиционных материалов приведены в работах [1, 2, 3]. Из многочисленных зарубежных публикаций на эту тему можно отметить [4, 5]. В первой из этих статей предложен метод определения эффективных упругих характеристик композиционных сред на основе решения плоских задач теории упругости с различными граничными условиями. Во второй – рассматривается модель композиционного материала со сферическими включениями с граничными условиями, допускающими скольжение на границе раздела фаз.

Анализ напряжений в окрестности одной полости канонической формы в изотропном и трансверсально-изотропном материалах стал возможным благодаря точным решениям уравнений теории упругости в канонических областях, полученных Ю. Н. Подильчуком [6]. Исследование НДС в многосвязных областях на основе обобщенного метода Фурье (ОМФ) проводилось в работах [7, 8]. В первой из этих статей рассмотрено напряженное состояние трансверсально-изотропного пространства с двумя сфероидальными полостями, подробно изучено распределение напряжений на оси между полостями. Во второй – изучено НДС изотропного пространства с двумя сфероидальными полостями на поверхностях полостей и на оси между ними для двух модификаций, рассмотренных нами и в настоящей статье, но с включениями. Для верификации громоздких выкладок приведено сравнение решения ОМФ с решением методом конечных элементов в пакете ANSYS Release 11.0.

В настоящей работе впервые предложена модель НДС зернистого композита, основанная на изучении локального поля напряжений в окрестности двух сфероидальных включений разной геометрической формы с помощью ОМФ. Предложенная модель позволяет получить приближенные аналитические формулы для описания зернистого композита, а также композита, армированного короткими волокнами в виде эллипсоидов вращения.

1. Постановка задачи

Рассматривается упругое пространство Ω с двумя непересекающимися сфероидальными включениями Ω_i , расположенными на одной оси симметрии, с центрами, сдвинутыми друг относительно друга на a (рис. 1). На рисунке изображены две цилиндрические системы координат $O_1\rho_1\varphi_1z_1$ и $O_2\rho_2\varphi_2z_2$. На рис. 2 приведен частный случай модели «А», также рассматриваемый нами при численной реализации задачи.

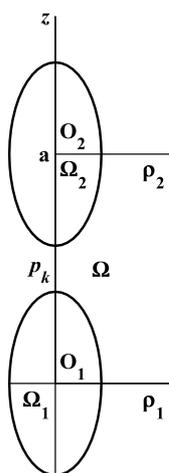


Рис. 1: Схематическое представление геометрической интерпретации задачи: при численной реализации модель «А»

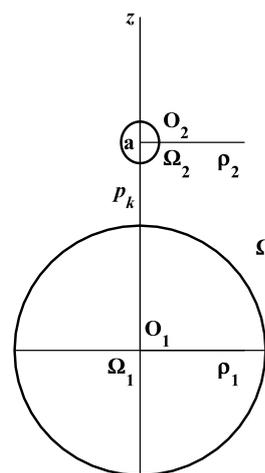


Рис. 2: Частный случай модели «А»: при численной реализации модель «Б»

Уравнения граничных поверхностей включений в цилиндрических координатах (ρ, φ, z) имеют вид:

$$\partial\Omega_i : \frac{z_i^2}{d_{1i}^2} + \frac{\rho^2}{d_{2i}^2} = 1; \quad (1)$$

где d_{1i} и d_{2i} – большая и малая полуоси сфероидов соответственно, под $\partial\Omega_i$ понимаем границу области Ω_i , $i = 1, 2$; $z_1 = z_2 + a$.

Общие решения краевой задачи для уравнения Ламе:

$$\nabla^2 \mathbf{U} + \frac{1}{1-2\mu} \nabla \operatorname{div} \mathbf{U} = 0; \quad (2)$$

в областях Ω и Ω_i согласно концепции обобщенного метода Фурье строятся как суперпозиции линейно независимых частных решений уравнения Ламе для сфероида и имеют вид (3) и (4) соответственно [9]:

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,i}^{(j)} \mathbf{U}_{i,n,0}^{+(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi) + \mathbf{U}_0; \quad (3)$$

$$\mathbf{U} = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} b_{n,j}^{(i)} \mathbf{U}_{j,n,0}^{-(5)}(\xi_i, \eta_i, \varphi); \quad (4)$$

где для:

$$\text{– одноосного растяжения: } \mathbf{U}_0 = -\frac{1}{2} \frac{\sigma_0 \mu \rho}{G(\mu + 1)} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{2} \frac{\sigma_0 z}{G(\mu + 1)} \mathbf{e}_z; \quad (5)$$

$$\text{– двуосного растяжения: } \mathbf{U}_0 = -\frac{1}{2} \frac{\sigma_0(\mu - 1)\rho}{G(\mu + 1)} \mathbf{e}_\rho - \frac{1}{2} \frac{\sigma_0 \mu z}{G(\mu + 1)} \mathbf{e}_z; \quad (6)$$

\mathbf{U} – функция перемещений; μ – коэффициент Пуассона; σ_0 – растяжение на бесконечности; $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_z$ – орты цилиндрической системы координат; G – модуль сдвига. В области Ω упругие характеристики – G, μ , в области Ω_i – G_i, μ_i соответственно; $\mathbf{U}_{i,n,0}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \varphi)$ – линейно независимые частные решения уравнения Ламе для сфероида, вводимые нами ниже; (ξ, η, φ) – вытянутые сфероидальные координаты. Здесь и в дальнейшем: индексы в обозначении координат (ξ_j, η_j, φ) поставлены там, где необходимо подчеркнуть, что имеется ввиду система координат, связанная с конкретным сфероидом.

На границе раздела сред необходимо удовлетворить граничные условия по перемещениям и напряжениям:

$$u_\rho|_{\Gamma_i} = u_\rho^{(i)}|_{\Gamma_i}; \quad u_z|_{\Gamma_i} = u_z^{(i)}|_{\Gamma_i}; \quad (7)$$

$$F_\rho|_{\Gamma_i} = F_\rho^{(i)}|_{\Gamma_i}; \quad F_z|_{\Gamma_i} = F_z^{(i)}|_{\Gamma_i}. \quad (8)$$

В формулах (7) – (8) введены следующие обозначения: u_ρ, u_z и F_ρ, F_z – компоненты векторов перемещений и напряжений соответственно в цилиндрических координатах в области Ω . Величины с верхним индексом (i) относятся к областям Ω_i .

Функции перемещений и напряжений связаны между собой следующим образом:

$$\mathbf{F}\mathbf{U} = 2G \left[\frac{\mu}{1 - 2\mu} \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{U} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{n}} + \frac{1}{2} (\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{U}) \right]; \quad (9)$$

где \mathbf{n} – вектор нормали к площадке границы.

Вводятся две сфероидальные системы координат (ξ_i, η_i, φ) , связанные с введенными цилиндрическими координатами следующими формулами:

$$\begin{cases} c_1 \operatorname{sh} \xi_1 \sin \eta_1 = c_2 \operatorname{sh} \xi_2 \sin \eta_2; \\ c_1 \operatorname{ch} \xi_1 \cos \eta_1 = a + c_2 \operatorname{ch} \xi_2 \cos \eta_2, \end{cases} \quad (10)$$

где a – расстояние между центрами; c_i – параметры сфероидальных систем координат. Принимая во внимание известные соотношения между совмещенными цилиндрическими и вытянутыми сфероидальными системами координат, первую из системы формул (10) можем записать: $\rho_1 = \rho_2 \equiv \rho$, а вторую: $z_1 = a + z_2$. Уравнения поверхностей включений (1) в сфероидальных

координатах могут быть записаны в виде $\xi_i = \xi_{0i}$. Условие непересечения граничных поверхностей имеет вид:

$$d_{11} + d_{12} < a, \quad (11)$$

где d_{11} и d_{12} – большие полуоси первого и второго сфероидов соответственно.

2. Построение общего решения

Введем следующую пару линейно независимых частных решений уравнения Ламе для сфероида[10]:

$$\mathbf{U}_{1,n,0}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \varphi) = \frac{c}{2n+1} \nabla \left[u_{n-1,0}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \varphi) - u_{n+1,0}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \varphi) \right]; \quad (12)$$

$$\mathbf{U}_{2,n,0}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \varphi) = [z\nabla + (4\mu - 3)\mathbf{e}_z] u_{n,0}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \varphi) - cq_0^2 \nabla u_{n\pm 1,0}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \varphi) \quad (13)$$

$$u_{n,m}^{+(5)} = Q_n^{-m}(\text{ch } \xi) P_n^m(\cos \eta) e^{im\varphi}; \quad u_{n,m}^{-(5)} = P_n^{-m}(\text{ch } \xi) P_n^m(\cos \eta) e^{im\varphi}; \quad (14)$$

где P_n^m и Q_n^m – присоединенные функции Лежандра 1-го и 2-го рода; $q_0 = \text{ch } \xi_0$. Знак «+» в верхнем индексе формул соответствует внешним решениям уравнения Ламе, «-» – внутренним. В решениях (12) – (13), отвечающих граничной поверхности $\partial\Omega_i$, надо выбрать $\xi = \xi_{0i}$. Формулы (12) – (13) в координатной форме имеют вид:

$$\mathbf{U}_{1,n,0}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \varphi) = -u_{n,1}^{\pm(5)} \mathbf{e}_\rho - u_{n,0}^{\pm(5)} \mathbf{e}_z; \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{2,n,0}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \varphi) = & -qu_{1,n,1}^{\pm(5)} \mathbf{e}_\rho - \left[qu_{1,n,0}^{\pm(5)} + (3 - 4\mu) u_{n,0}^{\pm(5)} \right] \mathbf{e}_z + \\ & + c(q^2 - q_0^2) \nabla u_{n\pm 1,0}^{\pm(5)}; \end{aligned} \quad (16)$$

$$u_{n,m}^+(\xi) = Q_n^{-m}(q); \quad u_{1,n,m}^+(\xi) = (n+m+1)Q_{n+1}^{-m}(q);$$

$$u_{n,m}^-(\xi) = P_n^{-m}(q); \quad u_{1,n,m}^-(\xi) = (n-m)P_{n-1}^{-m}(q);$$

$$u_{1,n,m}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \varphi) = u_{1,n,m}^{\pm}(\xi) P_n^m(\cos \eta) e^{im\varphi}.$$

Применив к формулам (15) – (16) оператор (9), получим координатную запись напряжений, отвечающих базисным решениям в точках поверхности $\xi_i = \xi_{0i}$ на площадках с нормалью $\mathbf{n} = \mathbf{e}_\xi$:

$$\mathbf{F}\mathbf{U}_{i,n,0}^{\pm(5)} = -2G \frac{h}{c} \left[s_{n,1}^{\pm(i)}(\xi) P_n^1(\cos \eta) \mathbf{e}_\rho + s_{n,0}^{\pm(i)}(\xi) P_n(\cos \eta) \mathbf{e}_z \right] \Big|_{\xi=\xi_0}; \quad (17)$$

$$s_{n,1}^{\pm(1)}(\xi) = -\frac{d}{d\xi} u_{n,1}^{\pm}; \quad s_{n,1}^{\pm(2)}(\xi) = -q^2 \frac{d}{d\xi} \left(\frac{u_{1,n,1}^{\pm}}{q} \right) + 2\mu u_{n,0}^{\pm};$$

$$s_{n,0}^{\pm(1)}(\xi) = -\frac{d}{d\xi} u_{n,0}^{\pm}; \quad s_{n,0}^{\pm(2)}(\xi) = -q^2 \frac{d}{d\xi} \left(\frac{u_{1,n,0}^{\pm}}{q} \right) - (1 - 2\mu) \frac{d}{d\xi} u_{n,0}^{\pm};$$

В этих формулах $q = \operatorname{ch} \xi$, $h = 1/\sqrt{q^2 - \cos^2 \eta}$. Для удовлетворения граничных условий на сфероидальных включениях необходимо преобразовать общее решение в отдельности к каждой сфероидальной поверхности. Для этого используем теоремы сложения решений (12) – (13), отнесенных к разным началам [10]:

$$\mathbf{U}_{i,n,0}^{+(5)}(\xi_1, \eta_1, \varphi) = \sum_{j=1}^2 \sum_{s=0}^{\infty} \left[\delta_{ij} h_{ns}^{(11)12} + \delta_{j1} \delta_{i2} h_{ns}^{(21)12} \right] \mathbf{U}_{j,s,0}^{-(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi); \quad (18)$$

$$\mathbf{U}_{i,n,0}^{+(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi) = \sum_{j=1}^2 \sum_{s=0}^{\infty} \left[\delta_{ij} h_{ns}^{(11)21} + \delta_{j1} \delta_{i2} h_{ns}^{(21)21} \right] \mathbf{U}_{j,s,0}^{-(5)}(\xi_1, \eta_1, \varphi); \quad (19)$$

$$h_{ns}^{(11)12} = \sum_{k=n}^{\infty} \left(s + \frac{1}{2} \right) \frac{c_1}{c_2} (-1)^{k+s} \beta_{kn} Q_{s,k}^{(1)}; \quad h_{ns}^{(22)12} = h_{ns}^{(11)12};$$

$$h_{ns}^{(11)21} = \sum_{k=s}^{\infty} \left(s + \frac{1}{2} \right) (-1)^{k+n+1} \beta_{ks} Q_{n,k}^{(1)}; \quad h_{ns}^{(22)21} = h_{ns}^{(11)21};$$

$$h_{ns}^{(21)12} = \sum_{k=n}^{\infty} \left(s + \frac{1}{2} \right) \frac{c_1}{c_2} (-1)^{k+s} \times \\ \times \left[\beta_{kn} \left(c_2 q_{20}^2 Q_{s+1,k+1}^{(1)} - a Q_{s,k+1}^{(1)} \right) - c_1 q_{10}^2 \beta_{k+1,n+1} Q_{s,k+2}^{(1)} \right];$$

$$h_{ns}^{(21)21} = \sum_{k=s}^{\infty} \left(s + \frac{1}{2} \right) (-1)^{k+n+1} \times \\ \times \left[\beta_{ks} \left(c_2 q_{20}^2 Q_{n+1,k+1}^{(1)} - a Q_{n,k+1}^{(1)} \right) - c_1 q_{10}^2 \beta_{k+1,s+1} Q_{n,k+2}^{(1)} \right];$$

В этих формулах: δ_{ij} – символ Кронекера; Γ – гамма-функция Эйлера;

$$\beta_{kn} = \sqrt{\pi} \left(\frac{c_1}{2} \right)^k \frac{\varepsilon_{kn}}{\Gamma((k-n)/2 + 1) \Gamma((k+n)/2 + 3/2)};$$

$$Q_{s,k}^{(1)} = \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 - c_2^2}} \right)^k Q_s^k \left(\frac{a}{c_2} \right); \quad \varepsilon_{kn} = \begin{cases} 1 & \text{если } k - n = 2l, \\ 0 & \text{если } k - n = 2l + 1. \end{cases}$$

Преобразование решения к системе координат, связанной с центром O_1 :

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,i}^{(j)} \mathbf{U}_{i,n,0}^{+(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi) + \mathbf{U}_0 = \\ = \sum_{i=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_{n,i}^{(1)} \mathbf{U}_{i,n,0}^{+(5)}(\xi_1, \eta_1, \varphi) + \tilde{a}_{n,i}^{(2)} \mathbf{U}_{i,n,0}^{-(5)}(\xi_1, \eta_1, \varphi) \right] + \mathbf{U}_0. \quad (20)$$

Преобразование решения к системе координат, связанной с центром O_2 :

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,i}^{(j)} \mathbf{U}_{i,n,0}^{+(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi) + \mathbf{U}_0 = \\ &= \sum_{i=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_{n,i}^{(2)} \mathbf{U}_{i,n,0}^{+(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi) + \tilde{a}_{n,i}^{(1)} \mathbf{U}_{i,n,0}^{- (5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi) \right] + \mathbf{U}_0. \end{aligned} \quad (21)$$

В этих формулах $\tilde{a}_{n,i}^{(2)} = \sum_{l=1}^2 \sum_{s=0}^{\infty} a_{s,l}^{(2)} \left(\delta_{li} h_{sn}^{(11)21} + \delta_{i1} \delta_{l2} h_{sn}^{(21)21} \right)$; $\tilde{a}_{n,i}^{(1)} = \sum_{l=1}^2 \sum_{s=0}^{\infty} a_{s,l}^{(1)} \left(\delta_{li} h_{sn}^{(11)12} + \delta_{i1} \delta_{l2} h_{sn}^{(21)12} \right)$. Приравняв (3) и (4), с использованием (20) – (21) удовлетворим условиям на границе раздела сред:

– по перемещениям на поверхности $\partial\Omega_1$ ($\xi_1 = \xi_{10}$):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_{n,i}^{(1)} \mathbf{U}_{i,n,0}^{+(5)}(\xi_{10}, \eta_1, \varphi) + \tilde{a}_{n,i}^{(2)} \mathbf{U}_{i,n,0}^{- (5)}(\xi_{10}, \eta_1, \varphi) \right] + \mathbf{U}_0 = \\ = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} b_{n,j}^{(1)} \mathbf{U}_{j,n,0}^{- (5)}(\xi_{10}, \eta_1, \varphi); \end{aligned} \quad (22)$$

– по перемещениям на поверхности $\partial\Omega_2$ ($\xi_2 = \xi_{20}$):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_{n,i}^{(2)} \mathbf{U}_{i,n,0}^{+(5)}(\xi_{20}, \eta_2, \varphi) + \tilde{a}_{n,i}^{(1)} \mathbf{U}_{i,n,0}^{- (5)}(\xi_{20}, \eta_2, \varphi) \right] + \mathbf{U}_0 = \\ = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} b_{n,j}^{(2)} \mathbf{U}_{j,n,0}^{- (5)}(\xi_{20}, \eta_2, \varphi); \end{aligned} \quad (23)$$

– по напряжениям на поверхности $\partial\Omega_1$ ($\mathbf{n} = \mathbf{e}_\xi$, $\xi_1 = \xi_{10}$):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_{n,i}^{(1)} \mathbf{F} \mathbf{U}_{i,n,0}^{+(5)}(\xi_{10}, \eta_1, \varphi) + \tilde{a}_{n,i}^{(2)} \mathbf{F} \mathbf{U}_{i,n,0}^{- (5)}(\xi_{10}, \eta_1, \varphi) \right] + \mathbf{F} \mathbf{U}_0 = \\ = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} b_{n,j}^{(1)} \mathbf{F} \mathbf{U}_{j,n,0}^{- (5)}(\xi_{10}, \eta_1, \varphi); \end{aligned} \quad (24)$$

– по напряжениям на поверхности $\partial\Omega_2$ ($\mathbf{n} = \mathbf{e}_\xi$, $\xi_2 = \xi_{20}$):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_{n,i}^{(2)} \mathbf{F} \mathbf{U}_{i,n,0}^{+(5)}(\xi_{20}, \eta_2, \varphi) + \tilde{a}_{n,i}^{(1)} \mathbf{F} \mathbf{U}_{i,n,0}^{- (5)}(\xi_{20}, \eta_2, \varphi) \right] + \mathbf{F} \mathbf{U}_0 = \\ = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} b_{n,j}^{(2)} \mathbf{F} \mathbf{U}_{j,n,0}^{- (5)}(\xi_{20}, \eta_2, \varphi). \end{aligned} \quad (25)$$

В формулах (24) – (25) для одноосного растяжения $\mathbf{F}\mathbf{U}_0 = \sigma_0 h \operatorname{sh} \xi \cos \eta \mathbf{e}_z$, для двуосного растяжения – $\mathbf{F}\mathbf{U}_0 = \sigma_0 h \operatorname{ch} \xi \sin \eta \mathbf{e}_\rho$. Раскладываем левые и правые части граничных условий (22) – (25) в ряды по функциям Лежандра $P_n^1(\cos \eta)$ (компонента \mathbf{e}_ρ) и $P_n(\cos \eta)$ (компонента \mathbf{e}_z). Таким образом, после удовлетворения граничным условиям получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений (БЛАУ) (26) – (33) относительно $a_{n,i}^{(j)}, b_{n,j}^{(i)}$; $i = 1..2, j = 1..2$:

$$\sum_{i=1}^2 \left[a_{n,i}^{(1)} r_{n,1}^{+(i)}(\xi_{10}, \mu) + \tilde{a}_{n,i}^{(2)} r_{n,1}^{- (i)}(\xi_{10}, \mu) - b_{n,i}^{(1)} r_{n,1}^{- (i)}(\xi_{10}, \mu_1) \right] = \frac{d_{21} \mu \sigma_0}{2G(\mu + 1)} \delta_{n1}; \quad (26)$$

$$\sum_{i=1}^2 \left[a_{n,i}^{(1)} r_{n,0}^{+(i)}(\xi_{10}, \mu) + \tilde{a}_{n,i}^{(2)} r_{n,0}^{- (i)}(\xi_{10}, \mu) - b_{n,i}^{(1)} r_{n,0}^{- (i)}(\xi_{10}, \mu_1) \right] = -\frac{d_{11} \sigma_0}{2G(\mu + 1)} \delta_{n1}; \quad (27)$$

$$\sum_{i=1}^2 \left[a_{n,i}^{(2)} r_{n,1}^{+(i)}(\xi_{20}, \mu) + \tilde{a}_{n,i}^{(1)} r_{n,1}^{- (i)}(\xi_{20}, \mu) - b_{n,i}^{(2)} r_{n,1}^{- (i)}(\xi_{20}, \mu_2) \right] = \frac{d_{22} \mu \sigma_0}{2G(\mu + 1)} \delta_{n1}; \quad (28)$$

$$\sum_{i=1}^2 \left[a_{n,i}^{(2)} r_{n,0}^{+(i)}(\xi_{20}, \mu) + \tilde{a}_{n,i}^{(1)} r_{n,0}^{- (i)}(\xi_{20}, \mu) - b_{n,i}^{(2)} r_{n,0}^{- (i)}(\xi_{20}, \mu_2) \right] = -\frac{d_{12} \sigma_0}{2G(\mu + 1)} \delta_{n1}; \quad (29)$$

$$\sum_{i=1}^2 \left[a_{n,i}^{(1)} s_{n,1}^{+(i)}(\xi_{10}, \mu) + \tilde{a}_{n,i}^{(2)} s_{n,1}^{- (i)}(\xi_{10}, \mu) - (G_1/G) b_{n,i}^{(1)} s_{n,1}^{- (i)}(\xi_{10}, \mu_1) \right] = 0; \quad (30)$$

$$\sum_{i=1}^2 \left[a_{n,i}^{(1)} s_{n,0}^{+(i)}(\xi_{10}, \mu) + \tilde{a}_{n,i}^{(2)} s_{n,0}^{- (i)}(\xi_{10}, \mu) - (G_1/G) b_{n,i}^{(1)} s_{n,0}^{- (i)}(\xi_{10}, \mu_1) \right] = \frac{d_{21} \sigma_0}{2G} \delta_{n1}; \quad (31)$$

$$\sum_{i=1}^2 \left[a_{n,i}^{(2)} s_{n,1}^{+(i)}(\xi_{20}, \mu) + \tilde{a}_{n,i}^{(1)} s_{n,1}^{- (i)}(\xi_{20}, \mu) - (G_2/G) b_{n,i}^{(2)} s_{n,1}^{- (i)}(\xi_{20}, \mu_2) \right] = 0; \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \left[a_{n,i}^{(2)} s_{n,0}^{+(i)}(\xi_{20}, \mu) + \tilde{a}_{n,i}^{(1)} s_{n,0}^{- (i)}(\xi_{20}, \mu) - (G_2/G) b_{n,i}^{(2)} s_{n,0}^{- (i)}(\xi_{20}, \mu_2) \right] = \\ = \frac{d_{22}\sigma_0}{2G} \delta_{n1}; \quad (33) \end{aligned}$$

Решаем систему методом редукции, полагая $n = 1, 2, \dots$, причем $a_{0,i}^{(j)} = b_{0,j}^{(i)} = 0$. В формулах (26) – (29) введены обозначения: $r_{n,1}^{\pm(1)} = -u_{n,1}^{\pm}$; $r_{n,0}^{\pm(1)} = -u_{n,0}^{\pm}$; $r_{n,1}^{\pm(2)} = -qu_{1,n,1}^{\pm}$; $r_{n,0}^{\pm(2)} = -qu_{1,n,0}^{\pm} - (3 - 4\mu)u_{n,0}^{\pm}$. Вектор-столбец правых частей БСЛАУ (26) – (33) соответствует случаю одноосного растяжения. Для двuosного растяжения вектор-столбец правых частей имеет следующий вид:

$$\mathbf{V}^T = \left[-\frac{d_{21}(\mu - 1)\sigma_0}{2G(\mu + 1)}, \frac{d_{11}\mu\sigma_0}{G(\mu + 1)}, -\frac{d_{22}(\mu - 1)\sigma_0}{2G(\mu + 1)}, \frac{d_{12}\mu\sigma_0}{G(\mu + 1)}, \frac{d_{11}\sigma_0}{2G}, 0, \frac{d_{12}\sigma_0}{2G}, 0 \right] \delta_{n1}. \quad (34)$$

3. Анализ результатов

Предложенный выше алгоритм аналитического решения рассматриваемой задачи был реализован в системе компьютерной математики (СКМ) Maple 13.0. Численное исследование на сходимость решений системы (26) – (33) показало, что достаточно высокая точность достигается при размерности системы 80×80 (в бесконечных суммах удерживаем 10 слагаемых). Сходимость метода редукции проиллюстрирована на рис. 3. Каждой кривой соответствует последовательно $N = 1, 2, \dots$ и так далее до $N = 10$ (N – количество удерживаемых в бесконечных суммах слагаемых). Для каждого случая решена соответствующая система уравнений, найдены напряжения σ_z/σ_0 и нанесены на сравнительный график. Из анализа графиков на рис. 3 можно сделать вывод, что сходимость метода редукции очевидна, а дальнейшее увеличение удерживаемых в бесконечных суммах слагаемых не приводит к существенному улучшению точности.

Для исследования напряженно-деформированного состояния в окрестности двух вытянутых сфероидов рассмотрим две характерные модели, приведенные на рис. 1 и 2. Первая модель «А» представляет собой два одинаковых сфероида. Вторая модель «Б» представляет собой неодинаковые сфероиды с почти равными полуосями, являясь приближением модели «сфера - сфера».

Для модели «А» межосевое расстояние будем изменять следующим образом: $a = (2.2; 2.5; 3; 4) d_{12}$, где d_{12} – малая полуось сфероида, для

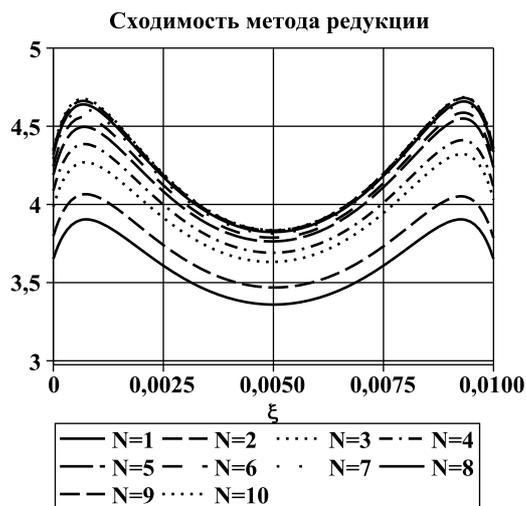


Рис. 3: Сходимость метода редукции

модели «Б» — $a = (8; 10; 12; 15) d_{12}$, где d_{12} — малая полуось малого сфероида. Численно задача решалась для смеси алюмоборосиликатного стекла (зерна) и эпоксидномалеиновой смолы (матрица) с такими характеристиками: $\mu = 0.382$; $\mu_i = 0.2$; $G_i/G \approx 25$.

На рис. 4 – 7 приведены результаты решения для главных компонент тензора напряжений (величины отнесены к σ_0 – растяжению на бесконечности) в сфероидальных координатах для одноосного растяжения на границах раздела сред, т.е. на поверхности включений. Напряжения σ_φ на порядок меньше двух других компонент и их графики здесь не приводятся.

Из анализа графиков можно сделать вывод, что для одноосного растяжения для обеих моделей на поверхности включений преобладающими являются контактные давления σ_ξ , а также при сближении включений происходит концентрация напряжений у смежных полюсов сфероидов. Следует отметить, что зеркальный (одинаковый, если соответствующим образом выбрать направление обхода по углу η) вид графиков слева и справа на рис. 4, 6, а также симметрия кривых на рис. 8 (слева) может служить косвенной проверкой достоверности полученных решений и громоздких формул, т.к. эти графики соответствуют симметричной модели «А» с симметричными граничными условиями.

На рис. 8 представлены графики напряжений σ_z на оси между включениями для моделей «А» и «Б» при одноосном растяжении в зависимости от изменения межосевого расстояния. Для модели «А» наблюдается концентрация напряжений σ_z между включениями при их сближении. Для модели «Б» максимальные напряжения практически не меняются в зависимости от расстояния между включениями.

Авторами также получены графики для случая двуосного растяжения

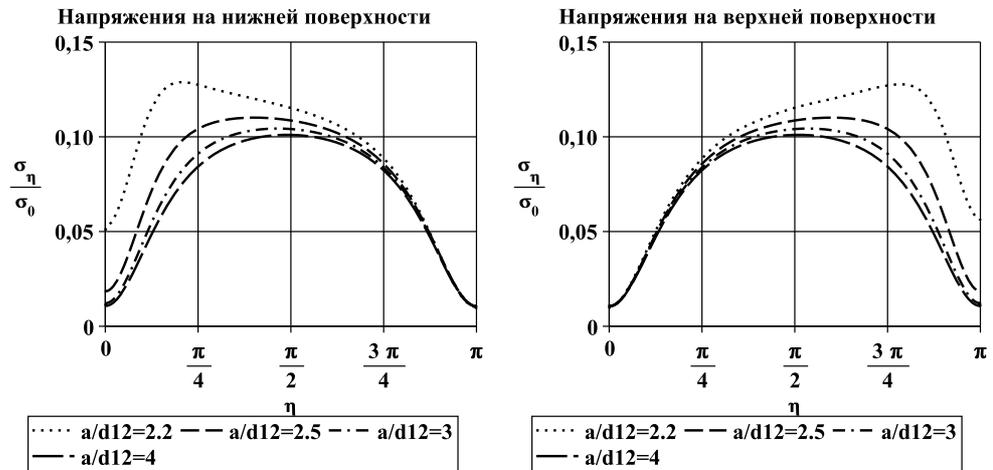


Рис. 4: Напряжения σ_η на поверхности включений в зависимости от изменения межосевого расстояния для модели «А» при одноосном растяжении

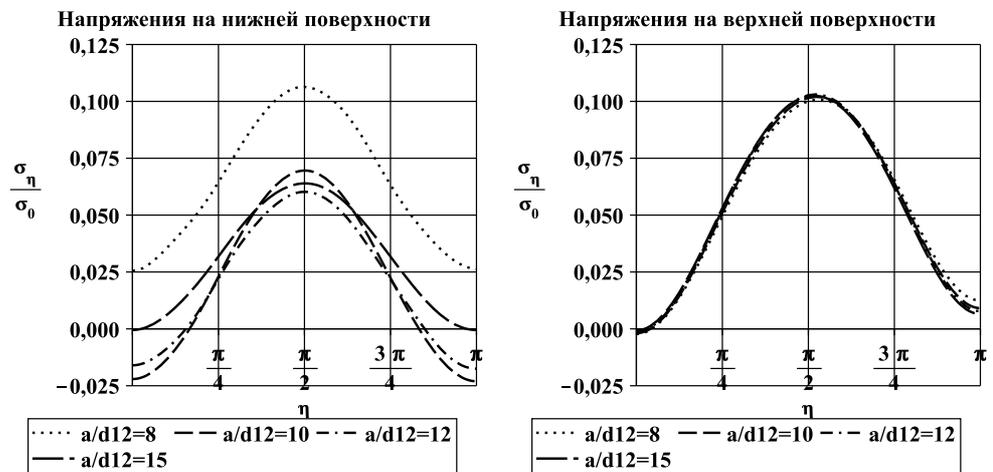


Рис. 5: Напряжения σ_η на поверхности включений в зависимости от изменения межосевого расстояния для модели «Б» при одноосном растяжении

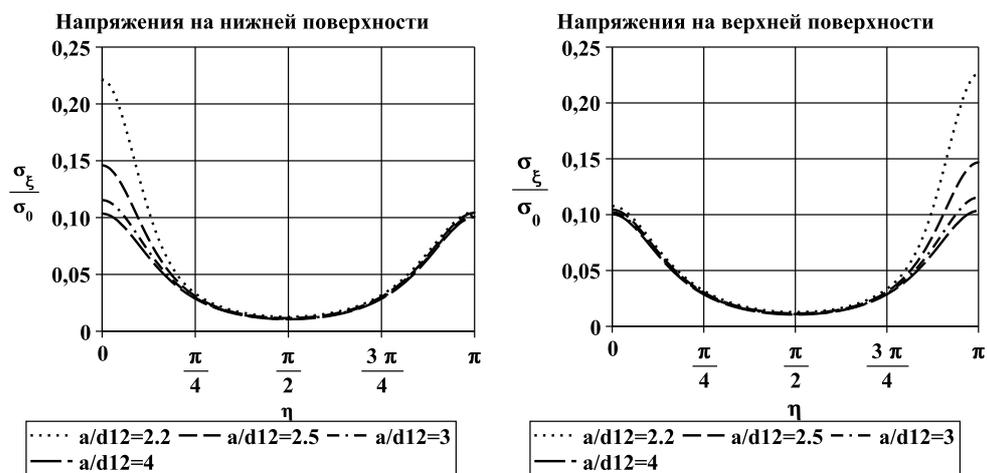


Рис. 6: Напряжения σ_ξ на поверхности включений в зависимости от изменения межосевого расстояния для модели «А» при одноосном растяжении

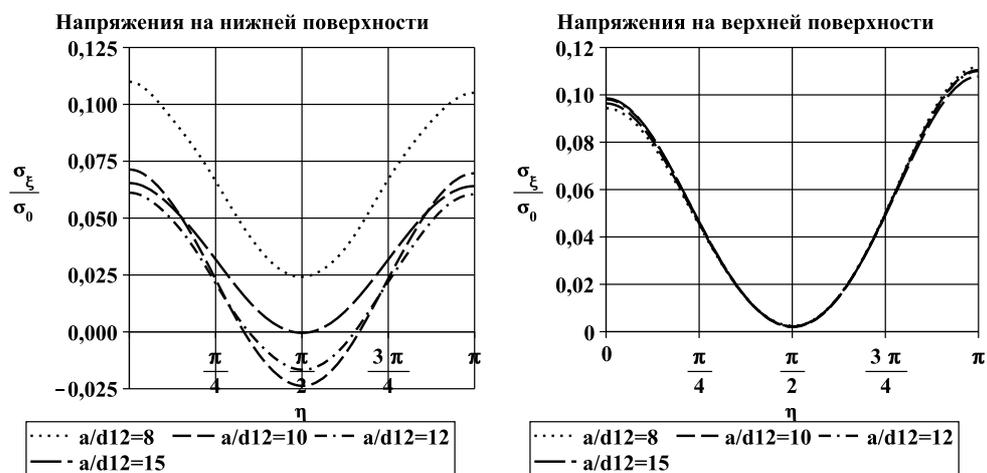


Рис. 7: Напряжения σ_ξ на поверхности включений в зависимости от изменения межосевого расстояния для модели «Б» при одноосном растяжении

композиционной среды.

Следует отметить, что распределение напряжений на поверхности включений и на оси между ними существенно зависит от отношения модулей Юнга материалов включений и матрицы. Чем больше это отношение, тем выше уровень концентрации напряжений между включениями и меньше напряжения на поверхности включений. И наоборот, уменьшение этого отношения приводит к выравниванию величин напряжений на поверхностях включений и на оси между ними (здесь нами рассматриваются композиционные среды с более жесткими включениями). Коэффициенты Пуассона материалов включений и матрицы существенного влияния на НДС в окрестности включений не оказывают.

Для верификации результатов расчетов и громоздких формул на рис. 10 приведено сравнение решений ОМФ и МКЭ. Совпадение двух кривых на рисунке достаточно хорошее. Решение ОМФ выгодно отличается тем, что оно является аналитическим физически точным решением поставленной задачи.

Методом конечных элементов решена трехмерная контактная задача в пакете ANSYS Release 11.0. Для этого рассмотрена четвертая часть массивного тела в форме прямоугольного параллелепипеда с двумя сфероидальными включениями. На соответствующие поверхности наложены граничные условия симметрии. Границы тела находятся на расстоянии 10-и характерных размеров от поверхности включений (за характерный размер принята удвоенная большая полуось сфероида). Конечноэлементная сетка в окрестности границы раздела фаз представлена на рис. 9. При построении конечноэлементной сетки использованы элементы типа SOLID95. При постановке контактной задачи использованы элементы типов TARGE170 и CONTA174; тип контакта поверхность-поверхность, контакт идеальный, без проскальзывания («bonded»). Разбиение конечноэлементной сетки автоматическое с использованием опции smart size. Форма конечных элементов – тетраэдр.

Можно ли моделировать композиционный материал лишь двумя включениями? Для ответа на этот вопрос обобщенным методом Фурье решена задача для ряда сфероидальных включений, расположенных вдоль оси z . Постановка этой задачи практически ничем не отличается от рассмотренной в данной статье. В формуле (3) надо изменять j не от 1 до 2, а от $-\infty$ до $+\infty$. В этом случае получим периодическую задачу для бесконечного количества сфероидальных включений, расположенных в упругом пространстве вдоль оси z . При численной реализации такой задачи оставляем конечное число включений (в данном случае от 4-х до 10-и). Следует отметить, что мы учитываем все без исключения взаимовлияния включений друг на друга. Это достигается с использованием теорем сложения (18) – (19). Предметом исследования явились напряжения σ_z между средними включениями. На рис. 11 приведен сравнительный график напряжений σ_z между средними включениями для 2-х, 4-х, 6-и, 8-и и 10-и включений. Как видно из графика кривые для 8-и и 10-и включений практически

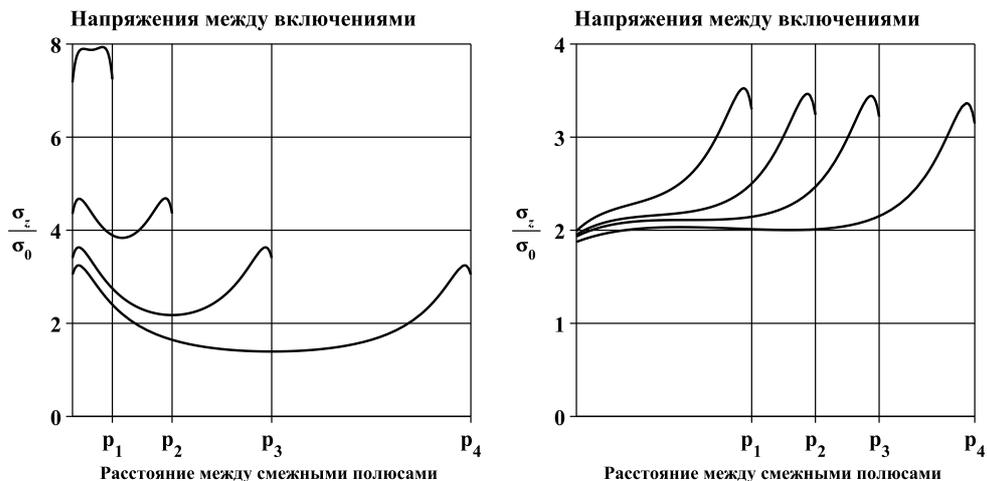


Рис. 8: Напряжения σ_z на оси между включениями в зависимости от изменения межосевого расстояния для моделей «А» и «Б» при одноосном растяжении

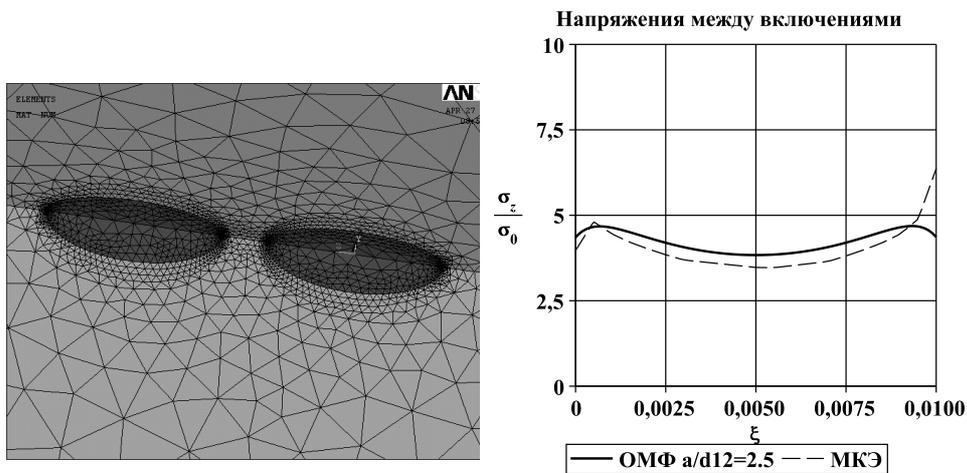


Рис. 9: Конечноэлементная модель Рис. 10: Напряжения σ_z на оси между включениями в сравнении с решением методом конечных элементов для модели «А» при одноосном растяжении

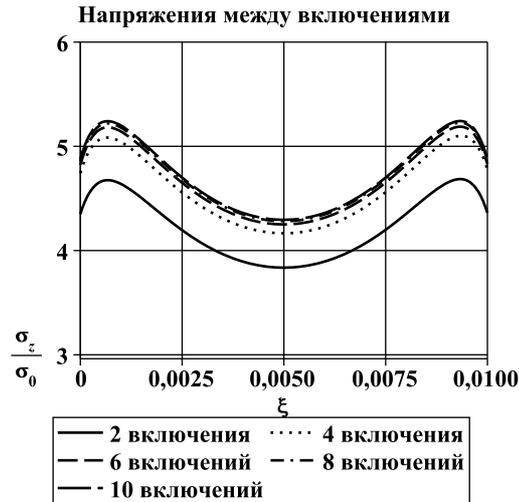


Рис. 11: Напряжения σ_z на оси между средними включениями для 2-х, 4-х, 6-и, 8-и и 10-и включений для модели «А» при одноосном растяжении

сливаются. Дальнейшее добавление включений не должно привести к увеличению уровня напряжений. Таким образом, можно сделать вывод, что по крайней мере в первом приближении можно моделировать локальное НДС композиционной среды, учитывая всего два включения.

Выводы

В статье впервые получено аналитическое асимптотически точное решение осесимметричной задачи теории упругости для изотропного пространства с двумя сфероидальными включениями. На основе этой задачи предложена локальная математическая модель зернистого композиционного материала. Подробно исследовано локальное НДС на поверхности включений и на оси между ними в зависимости от геометрических параметров включений. Независимо выполнена верификация громоздких выкладок и полученных на их основе результатов при помощи решения задачи методом конечных элементов.

Рассматриваемый в статье подход к решению задачи распространен на периодическую задачу для бесконечного количества сфероидальных включений, расположенных в упругом пространстве вдоль оси z .

Результаты расчетов, приведенные в статье, могут быть использованы в дальнейшем при определении упругих интегральных характеристик композиционных материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Головчан В. Т. Анизотропия физико-механических свойств композитных материалов.– К.: Наук. думка, 1987. – 304 с.
2. Куц В. И. Напряженное состояние и эффективные упругие модули среды, нормированной периодически расположенными сфероидальными включениями // Прикладная механика. – 1995. – **31**, №3. – С. 32 – 39.
3. Структурные механизмы формирования механических свойств зернистых полимерных композитов / отв. ред. А. И. Мошев. – Екатеринбург: УрО РАН, 1997. – 507 с.
4. F. Bouyge. A Micromechanically Based Couple-Stress Model of An Elastic Two-Phase Composite / Bouyge F., Jasuik I., Ostoja-Starzewski M. // International Journal of Solids and Structures. – Elsevier Science Publishing Company, 2001. – **38**, №10 – 13. – P. 1721 – 1735.
5. J. H. Huang. Elastic Fields in Polycrystalline or Composite Materials with Slip Inclusions // International Journal of Engineering Science. – Elsevier Science Publishing Company, 1995. – **33**, №9. – P. 1303 – 1313.
6. Подильчук Ю. Н. Пространственные задачи теории упругости и пластичности. – **1**: Граничные задачи статики упругого тела – К.: Наук. думка, 1984. – 303 с.
7. Николаев А. Г. Напряженное состояние трансверсально-изотропного пространства с двумя сфероидальными полостями / А. Г. Николаев, Ю. А. Щербакова // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: Сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского «ХАИ». – **4 (51)**. – Х.: НАКУ, 2007. – С. 49 – 54.
8. Николаев А. Г. Математическая модель напряженно-деформированного состояния пористого материала / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского «ХАИ». – **2 (58)**. – Х., 2009. – С.48 – 58.
9. Николаев А. Г. Обоснование метода Фурье в основных краевых задачах теории упругости для некоторых пространственных канонических областей // Доповіді НАН України. – 1998, **2**. – С. 78 – 83.
10. Николаев А. Г. Теоремы сложения решений уравнений Ламе – Х.: Харьк. авиац. ин-т, 1993. – 109 с. – Деп. в ГНТБ Украины 21.06.93, № 1178 – Ук 93.

Статья получена: 23.03.2010; окончательный вариант: 22.10.2010;
принята: 22.10.2010.

© Николаев А.Г., Танчик Е.А., 2010