Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.984 № 922, 2010, с.20–31

Об одномерном возмущении самосопряженных операторов с простым спектром

А.Н. Сыровацкий

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, пл. Свободы, 4, 61077, Харьков, Украина

Одна из важнейших задач теории возмущений состоит в изучении спектра возмущенного оператора и описании спектральных проекторов этого оператора. Классическим результатом, который дает решение этой задачи в конечномерном случае для операторов с простым спектром, является теорема Лёвнера. В данной работе получен бесконечномерный аналог этого утверждения для операторов с простым дискретным спектром.

Сировацький О.М. **Об одновимірном збуренні самосполучених операторів з простим спектром.** Одне з найважливіших завдань теорії збурень полягає у вивченні спектру збуреного оператора та описі спектральних проекторів цього оператора. Класичним результатом, який дає рішення цієї задачі в скінченновимірному випадку для операторів з простим спектром, є теорема Льовнера. В роботі отриман нескінченновимірний аналог цього твердження для операторів з простим дискретним спектром.

Syrovatsky A. **About one-dimensional perturbation of the self-adjoint operators with simple spectrum.** One of major tasks of perturbation theory is to study spectrum of the perturbed operator and to describe spectral projectors of it. A classic result which gives the solution of this task in finite-dimensional case for operators with a simple spectrum is the Lowner theorem. In the paper the infinite-dimensional analogue of this statement for operators with a simple discrete spectrum is obtained.

2000 Mathematics Subject Classification 47A55.

1. Предварительные сведения.

Начало спектральной теории возмущений восходит к работам Г.Вейля [1](1909), Ф.Реллиха [2](1936) и К.Фридрихса [3](1939). В частности, Г.Вейлю [1] принадлежит теорема об инвариантности непрерывной части спектра самосопряженного оператора при вполне непрерывном возмущении.

В работах Т. Като [4] и М. Роземблюма [5] показано, что абсолютно непрерывная часть спектра инвариантна при конечномерных возмущениях.

В данной работе изучается спектр самосопряженных операторов при одномерных возмущениях. Решается как прямая, так и обратная задачи, то есть нахождение возмущения по двум спектрам возмущенного и невозмущенного операторов. В конечномерном пространстве для самосопряженного оператора с простым спектром данная задача была решена К. Лёвнером [6]. Обобщению этого результата на бесконечномерный случай и посвящена данная работа. В статье Л.П. Нижника [7] изучались одномерные возмущения неограниченных операторов, были получены формулы для резольвенты возмущенного оператора, однако задача о восстановлении одномерного возмущения по двум спектрам не рассматривалась.

Пусть A – линейный самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H. Рассмотрим одномерное возмущение оператора A

$$Bh = Ah + c < h, \varphi > \varphi, \tag{1}$$

где h и φ из H, а $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, $\|\varphi\| = 1$.

Так как

$$(B - \lambda I)h = (A - \lambda I)h + c < h, \varphi > \varphi \quad (h \in H,\, \lambda \in \mathbb{C}),$$

то, полагая $h = R_\lambda(A)f \quad (R_\lambda(A) = (A-\lambda I)^{-1},\, f \in H)$ и умножая на $R_\lambda(B) = (B - \lambda I)^{-1}$ (где λ не принадлежит спектру A и B), мы получим, что

$$R_\lambda(A)f = R_\lambda(B)f + c < R_\lambda(A)f, \varphi > R_\lambda(B)\varphi. \tag{2}$$

Пусть $f = \varphi$, тогда

$$R_\lambda(B)\varphi = R_\lambda(A)\varphi - c < R_\lambda(A)\varphi, \varphi > R_\lambda(B)\varphi,$$

поэтому

$$R_\lambda(B)\varphi = \frac{1}{1 + c < R_\lambda(A)\varphi, \varphi >} R_\lambda(A)\varphi.$$

Подставляя данное выражение в (2), мы окончательно получим

$$R_\lambda(B)f = R_\lambda(A)f - \frac{< R_\lambda(A)f, \varphi >}{\frac{1}{c} + < R_\lambda(A)\varphi, \varphi >} R_\lambda(A)\varphi, \tag{3}$$

где f - произвольный вектор из H. Итак, мы доказали теорему.

Теорема 1 Пусть A – линейный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H, оператор B – его одномерное возмущение (1). Тогда резольвента оператора B имеет вид (3).

Определение 1 Комплекснозначная функция $f(z)$ называется неванлинновской (класса N [8], стр.120), если $f(z)$ голоморфна в $\mathbb{C}_{\pm} = \{z \in \mathbb{C};\ \pm Imz > 0\}$ и $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$, $\frac{Imf(z)}{Imz} \geqslant 0$ $(Imz \neq 0)$.

Рассмотрим выражение (3) и обозначим через $m(\lambda)$ функцию

$$m(\lambda) = 1/c + < R_\lambda(A)\varphi, \varphi > . \tag{4}$$

Как известно, функция $m(\lambda)$ является неванлинновской (см. [9], стр. 242).

2.Теорема Лёвнера для самосопряженного оператора в конечномерном пространстве.

В данном разделе мы изложим результат Лёвнера [6], при этом метод его доказательства отличается от первоначального и естественным образом переносится на бесконечномерный случай (см. раздел **3**).

Предположим, что A – линейный самосопряженный оператор с простым спектром, действующий в конечномерном пространстве H $(dimH = n < \infty)$. Оператор B – одномерное возмущение вида (1).

Обозначим через $\{\alpha_k\}_1^n$ собственные числа оператора A, которые занумерованы в порядке возрастания $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots < \alpha_n$.

По Теореме 1 резольвента оператора B имеет вид (3). Следовательно, особенностями резольвенты $R_\lambda(B)$ могут быть числа $\{\alpha_k\}_1^n$ и нули выражения $m(\lambda)$ (4), $m(\lambda) = 0$.

Покажем, что числа $\{\alpha_k\}_1^n$ не являются особенностями резольвенты $R_\lambda(B)$ для векторов φ общего положения:

$$< \varphi, h_k > \neq 0,\ \forall h_k :\ Ah_k = \alpha_k h_k\ (k = \overline{1,n}). \tag{5}$$

Лемма 1 Особенностями $R_\lambda(B)$, где B имеет вид (1) и φ удовлетворяет условию (5), могут быть лишь те λ, при которых $m(\lambda) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем в пространстве H ортонормированный базис из собственных векторов оператора A, то есть, базис $\{h_k\}_1^n$ такой, что $Ah_k = \alpha_k h_k$, $k = \overline{1,n}$. Пусть $\{\xi_k\}_1^n$ – координаты вектора φ в этом базисе, то есть $\varphi = \sum_{i=1}^n \xi_i h_i$, причем $\xi_i \neq 0$ для $\forall i :\ i = \overline{1,n}$ в силу условия (5).

Так как $Ah_k = \alpha_k h_k$, то $(A - \lambda I)h_k = (\alpha_k - \lambda)h_k$. Поэтому для $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq \alpha_k$, $k = \overline{1,n}$ имеем: $R_\lambda(A)h_k = \frac{h_k}{\alpha_k - \lambda}$. Следовательно,

$$R_\lambda(A)\varphi = \sum_{k=1}^n \xi_k R_\lambda(A)h_k = \sum_{k=1}^n \frac{\xi_k h_k}{\alpha_k - \lambda}$$

$$m(\lambda) = 1/c + < R_\lambda(A)\varphi, \varphi >= 1/c + \sum_{k=1}^{n} \frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k - \lambda}.$$

Возьмём произвольный вектор g из H, пусть $\{\nu_k\}_1^n$ – его координаты в базисе $\{h_k\}_1^n$. Тогда

$$R_\lambda(A)g = \sum_{k=1}^{n} \frac{\nu_k h_k}{\alpha_k - \lambda} \text{ и } < R_\lambda(A)g, \varphi >= \sum_{k=1}^{n} \frac{\nu_k \overline{\xi_k}}{\alpha_k - \lambda}.$$

Подставляя полученное выражение в формулу (3), мы олучим, что

$$R_\lambda(B)g = \sum_{k=1}^{n} \frac{\nu_k h_k}{\alpha_k - \lambda} - \frac{(\sum_{k=1}^{n} \frac{\nu_k \overline{\xi_k}}{\alpha_k - \lambda})(\sum_{k=1}^{n} \frac{\xi_k h_k}{\alpha_k - \lambda})}{1/c + \sum_{k=1}^{n} \frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k - \lambda}}. \tag{6}$$

Преобразовав выражение (6), мы получим, что коэффициент при $\frac{1}{\alpha_k - \lambda}$ в числителе этой дроби равен

$$\nu_k h_k |\xi_k|^2 \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (\alpha_i - \lambda) - \nu_k \overline{\xi_k} \xi_k h_k \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (\alpha_i - \lambda) \equiv 0.$$

То есть, числитель дроби (6) не имеет особенности в точках α_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$. В этих точках не обращается в нуль и знаменатель дроби. Действительно, если в точках α_k знаменатель дроби равен 0, то $|\xi_k|^2 = 0$, а это не так.

Таким образом, особенностями дроби (4) могут быть лишь те λ, при которых $m(\lambda) = 1/c + < R_\lambda(A)\varphi, \varphi >= 0$, причем числа $\{\alpha_k\}_1^n$, $1 \leqslant k \leqslant n$ не являются нулями этого выражения.

■

Замечание 1 Если вектор φ из (1) не является вектором общего положения, то есть, $\exists h_k : < \varphi, h_k >= 0$, где $Ah_k = \alpha_k h_k$, то из (1) следует, что $Bh_k = Ah_k + c < h_k, \varphi > \varphi = Ah_k = \alpha_k h_k$. Таким образом, собственное значение α_k оператора A является собственным значением оператора B.

Следующая теорема характеризует спектр оператора B вида (1).

Теорема 2 Пусть оператор A – линейный самосопряженный оператор с простым спектром, действующий в конечномерном пространстве; $\{\alpha_i\}_1^n$ – собственные значения оператора A, занумерованные в порядке возрастания; B – оператор вида (1), $< \varphi, h_k > \neq 0$, $k = 1, \ldots, n$. Тогда спектр оператора B – простой и собственные числа $\{\beta_i\}_1^n$ $(\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_n)$ оператора B перемежаются с числами $\alpha_1 \ldots \alpha_n$, то есть, на каждом интервале (α_k, α_{k+1}) существует единственное собственное значение оператора B, причем при $c > 0 :$ $\alpha_1 < \beta_1 < \ldots < \alpha_n < \beta_n$, а при $c < 0 :$ $\beta_1 < \alpha_1 < \ldots < \beta_n < \alpha_n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как было показано выше, числа $\beta_1 \dots \beta_n$ являются нулями функции $m(\lambda)$. Так как $m(\lambda)$ – неванлинновская функция, то $\beta_1 \dots \beta_n$ – вещественные числа. Дальше будем рассматривать функцию $m(\lambda)$ при вещественном аргументе:

$$m(x) = 1/c + \sum_{k=1}^{n} \frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k - x}\,. \tag{7}$$

Рассмотрим интервал (α_k, α_{k+1}). При $x \to \alpha_k + 0$ все слагаемые, кроме $\frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k - x}$, в выражении (7) стремятся к конечному пределу, а $\frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k - x} \to -\infty$.

Следовательно, $\lim_{x \to \alpha_k + 0} m(x) = -\infty$. Аналогично, $\lim_{x \to \alpha_{k+1} - 0} m(x) = +\infty$.

Рассмотрим производную функции $m(x)$ на интервале (α_k, α_{k+1}):

$$m'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{|\xi_k|^2}{(\alpha_k - x)^2} > 0, \qquad \forall x \in (\alpha_k, \alpha_{k+1}).$$

Функция $m(x)$ непрерывна на (α_k, α_{k+1}). Таким образом, функция $m(x)$ монотонно возрастает с $-\infty$ на $+\infty$ и непрерывна на этом интервале. А это значит, что на этом интервале существует единственный корень уравнения $m(x) = 0$. И это справедливо для любого $k:\ 1 \leqslant k \leqslant n-1$.

Так как $\lim_{x \to \infty} m(x) = 1/c$, то при $c > 0:\ \alpha_1 < \beta_1 < \ldots < \alpha_n < \beta_n$, а при $c < 0:\ \beta_1 < \alpha_1 < \ldots < \beta_n < \alpha_n$.

■

Следующая теорема является обратной к теореме **2**.

Теорема 3 (Лёвнера [6]**).** Пусть даны вещественные числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ такие, что $\alpha_1 < \beta_1 < \ldots < \alpha_n < \beta_n$, где $\{\alpha_i\}_1^n$ – собственные значения линейного самосопряженного оператора A, действующего в $n-$мерном пространстве H. Тогда существует оператор P ранга 1: $Ph = c < h, \varphi > \varphi$, где h – произвольный вектор из H, $\varphi \in H$, c – скаляр, $c > 0$, такой, что числа $\{\beta_i\}_1^n$ являются собственными значениями оператора $B = A + P$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем в качестве базиса в пространстве H собственные векторы оператора A. Пусть $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ – координаты искомого вектора φ в этом базисе. Тогда числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ будут корнями уравнения

$$1/c + \sum_{k=1}^{n} \frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k - \lambda} = 0\,.$$

Выражение в левой части уравнения можно преобразовать следующим образом:

$$1/c+\sum_{k=1}^{n}\frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k-\lambda}=\frac{1}{c}\frac{P_n(\lambda)}{\prod_{k=1}^{n}(\alpha_k-\lambda)}\,,$$

где $P_n(\lambda)$ – многочлен степени n. Так как корнями этого выражения являются числа $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$, то $P_n(\lambda)=\prod_{k=1}^{n}(\beta_k-\lambda)$. Значит,

$$1/c+\sum_{k=1}^{n}\frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k-\lambda}=\frac{1}{c}\prod_{k=1}^{n}\frac{\beta_k-\lambda}{\alpha_k-\lambda}=1/c+\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{1}{c}\sigma_k}{\alpha_k-\lambda}\,,$$

где σ_k – некоторые известные положительные числа, определяемые данным равенством.

Приравнивая коэффициенты при $\frac{1}{\alpha_k-\lambda}:\ 1\leqslant k\leqslant n$, получаем систему:

$$\begin{cases}|\xi_1|^2=\frac{1}{c}\sigma_1\\ \quad\ldots\\ |\xi_n|^2=\frac{1}{c}\sigma_n\end{cases}.$$

Выберем произвольное число $c>0$, тогда из этой системы легко найти $\xi_k:\ 1\leqslant k\leqslant n$, правда, неединственным образом.
■

Замечание 2 Для случая $c<0$ и $\beta_1<\alpha_1<\ldots<\beta_n<\alpha_n$ нужно применить теорему к оператору $-B=-A+P$ и к числам $-\alpha_n<-\beta_n<\ldots<-\alpha_1<-\beta_1$.

3. Обобщение теоремы Лёвнера на случай оператора в бесконечномерном пространстве.

Пусть A – линейный самосопряженный полуограниченный снизу оператор, действующий в бесконечномерном гильбертовом сепарабельном пространстве H, спектр которого состоит из счетного числа изолированных точек единичной кратности.

Обозначим через $\{\alpha_k\}_1^\infty$ собственные числа оператора A, которые занумерованы в порядке возрастания, то есть $\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<\ldots$ [9, с. 273].

Пусть оператор B является возмущением оператора A вида (1). Согласно теореме 1 резольвента оператора B имеет вид (3), причем особенности резольвенты $R_\lambda(B)$ могут быть лишь числа $\{\alpha_k\}_1^\infty$ и нули выражения

$$m(\lambda)=1/c+<R_\lambda(A)\varphi,\varphi>=0\,.$$

Как и в случае конечномерного пространства H будем рассматривать вектор общего положения $\varphi\in H$, то есть, φ удовлетворяет условию (5) с $k=1,2,\ldots$. Покажем, что числа $\{\alpha_k\}_1^\infty$ не являются особенностями резольвенты $R_\lambda(B)$.

Лемма 2 Особенностями $R_\lambda(B)$, где B имеет вид (1), могут быть лишь те λ, при которых $m(\lambda)=0$, где $m(\lambda)$ имеет вид (4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем в пространстве H базис из собственных векторов оператора A, то есть базис $\{h_k\}_1^\infty$, такой что $Ah_k=\alpha_k h_k$, $k=\overline{1,\infty}$. Пусть $\{\xi_k\}_1^\infty$ – координаты вектора φ в этом базисе, то есть $\varphi=\sum_{i=1}^\infty \xi_i h_i$, причем $\xi_i\neq 0$, $i=\overline{1,\infty}$. Так как $Ah_k=\alpha_k h_k$, то $(A-\lambda I)h_k=(\alpha_k-\lambda)h_k$. Поэтому для любого λ из $\mathbb{C}$, $\lambda\neq\alpha_k$, $k=\overline{1,\infty}$, имеем: $R_\lambda(A)h_k=\frac{h_k}{\alpha_k-\lambda}$. Следовательно, $R_\lambda(A)\varphi=\sum_{k=1}^\infty \xi_k R_\lambda(A)h_k=\sum_{k=1}^\infty \frac{\xi_k h_k}{\alpha_k-\lambda}$, $<R_\lambda(A)\varphi,\varphi>=\sum_{k=1}^\infty \frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k-\lambda}$. Рассмотрим произвольное натуральное n и произвольный вектор из H вида $g_n=\sum_{k=1}^n \nu_i h_i$; $\nu_i\in\mathbb{C}$ – координаты вектора в базисе $\{h_k\}_1^\infty$. Тогда:

$$R_\lambda(B)g_n=\sum_{k=1}^n \frac{\nu_k}{\alpha_k-\lambda}h_k-\frac{\left(\sum_{k=1}^n \frac{\nu_k\overline{\xi_k}}{\alpha_k-\lambda}\right)\left(\sum_{k=1}^\infty \frac{\xi_k}{\alpha_k-\lambda}h_k\right)}{1/c+\sum_{k=1}^\infty \frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k-\lambda}}\,. \tag{8}$$

Преобразовав выражение (8), получим:

$$\begin{aligned}R_\lambda(B)g_n=&\frac{\left(\sum_{k=1}^n \frac{\nu_k}{\alpha_k-\lambda}h_k\right)\left(\frac{1}{c}\prod_{k=1}^n(\alpha_k-\lambda)+\sum_{k=1}^n \frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k-\lambda}\prod_{i=1}^n(\alpha_i-\lambda)\right)}{\frac{1}{c}\prod_{k=1}^n(\alpha_k-\lambda)+\sum_{k=1}^\infty \frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k-\lambda}\prod_{i=1}^n(\alpha_i-\lambda)}\\
&+\frac{\left(\sum_{k=1}^n \frac{\nu_k}{\alpha_k-\lambda}h_k\right)\left(\sum_{k=n+1}^\infty \frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k-\lambda}\prod_{i=1}^n(\alpha_i-\lambda)\right)}{\frac{1}{c}\prod_{k=1}^n(\alpha_k-\lambda)+\sum_{k=1}^\infty \frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k-\lambda}\prod_{i=1}^n(\alpha_i-\lambda)}\\
&-\frac{\left(\sum_{k=1}^n \frac{\nu_k\overline{\xi_k}}{\alpha_k-\lambda}\prod_{i=1}^n(\alpha_i-\lambda)\right)\sum_{k=1}^n \frac{\xi_k}{\alpha_k-\lambda}h_k}{\frac{1}{c}\prod_{k=1}^n(\alpha_k-\lambda)+\sum_{k=1}^\infty \frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k-\lambda}\prod_{i=1}^n(\alpha_i-\lambda)}\\
&-\frac{\left(\sum_{k=1}^n \frac{\nu_k\overline{\xi_k}}{\alpha_k-\lambda}\prod_{i=1}^n(\alpha_i-\lambda)\right)\sum_{k=n+1}^\infty \frac{\xi_k}{\alpha_k-\lambda}h_k}{\frac{1}{c}\prod_{k=1}^n(\alpha_k-\lambda)+\sum_{k=1}^\infty \frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k-\lambda}\prod_{i=1}^n(\alpha_i-\lambda)}\,.\end{aligned}$$

Коэффициент при $\frac{1}{\alpha_k-\lambda}$ в числителе этой дроби равен нулю, -

$$\nu_k h_k|\xi_k|^2\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^n(\alpha_i-\lambda)-\nu_k\overline{\xi_k}h_k\xi_k\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^n(\alpha_i-\lambda)\equiv 0\,.$$

Таким образом, числитель дроби (8) не имеет особенности в точках α_k, $1\leqslant k\leqslant n$. В этих точках не обращается в нуль и знаменатель дроби. Действительно, если в точках α_k знаменатель дроби равен нулю, то:

$$\sum_{i=1}^n \frac{|\xi_i|^2}{\alpha_i-\alpha_k}\prod_{i=1}^n(\alpha_i-\alpha_k)+\sum_{i=n+1}^\infty \frac{|\xi_i|^2}{\alpha_i-\alpha_k}\prod_{i=1}^n(\alpha_i-\alpha_k)=0\,.$$

Следовательно, $|\xi_k|^2 = 0$, но $\xi_k \neq 0,\ k = \overline{1,\infty}$. Мы получили, что для любого натурального n и $\forall k\,(1 \leqslant k \leqslant n)$, для любого вектора $g_n = \sum_{i=1}^{n} \nu_i h_i$ точка α_k не является особенностью $R_\lambda(B)g_n$. Так как множество векторов g_n плотно в H, то $R_\lambda(B)$ не имеет особенности в точках $\alpha_k,\ k = \overline{1,\infty}$.

Таким образом, особенностями резольвенты $R_\lambda(B)$ могут быть лишь те λ, при которых $m(\lambda) = 1/c + < R_\lambda(A)\varphi, \varphi >= 0$, причем собственные значения $\{\alpha_k\}_1^\infty$ оператора A не являются нулями этого выражения.

■

Докажем аналог теоремы **2**.

Теорема 4 Пусть оператор A – линейный самосопряженный полуограниченный снизу оператор, действующий в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве H, спектр которого прост и состоит из счетного числа изолированных точек, $\{\alpha_i\}_{i=1}^\infty$, занумерованных в порядке возрастания. Пусть оператор B – имеет вид (1). Тогда спектр оператора B состоит из счетного числа изолированных точек, и собственные числа $\{\beta_i\}_{i=1}^\infty$ оператора B будут перемежаться с числами $\{\alpha_i\}_{i=1}^\infty$, то есть на каждом интервале (α_k, α_{k+1}) существует единственное собственное значение оператора B, причем если $c > 0$, то $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \ldots$, а при $c < 0$, соответственно $\beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \alpha_2 < \ldots$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Числа $\{\beta_i\}_{i=1}^\infty$ являются нулями функции $m(\lambda)$. Так как $m(\lambda)$ имеет вид (4), то $m(\beta_i) = 0$, функция $m(\lambda)$ – неванлинновская функция, следовательно $\{\beta_i\}_{i=1}^\infty$ вещественные для любого $i = \overline{1,\infty}$. Поэтому будем рассматривать функцию $m(\lambda)$ при вещественном аргументе

$$m(x) = 1/c + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k - x}$$

Рассмотрим интервал (α_k, α_{k+1}). Покажем, что при $x \to \alpha_k + 0$ ряд $\sum_{i=1}^\infty \frac{|\xi_i|^2}{\alpha_i - x} \to -\infty$, а при $x \to \alpha_{k+1} - 0$ ряд $\sum_{i=1}^\infty \frac{|\xi_i|^2}{\alpha_i - x} \to +\infty$.

Действительно, ряд $\sum_{i=1}^\infty |\xi_i|^2$ – сходится, так как $\sum_{i=1}^\infty |\xi_i|^2 = \|\varphi\|^2$. При $x \to \alpha_k + 0$ существует такое вещественное r, $r > 0$, что для любого $i \neq k$: $|\alpha_i - x| > r$. Следовательно можно записать оценку:

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{\infty} \frac{|\xi_i|^2}{|\alpha_i - x|} < \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{\infty} \frac{|\xi_i|^2}{r} < \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 = \frac{\|\varphi\|^2}{r}\,.$$

Поэтому ряд $\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{\infty} \frac{|\xi_i|^2}{|\alpha_i - x|}$ сходится при $x \to \alpha_k + 0$. Далее

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\xi_i|^2}{\alpha_i - x} = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{\infty} \frac{|\xi_i|^2}{|\alpha_i - x|} + \frac{|\xi_i|^2}{\alpha_k - x}\,. \tag{9}$$

При $x \to \alpha_k + 0$ первое слагаемое выражения (9) имеет конечный предел, а второе слагаемое стремится к $-\infty$. Поэтому при $x \to \alpha_k + 0$ ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\xi_i|^2}{\alpha_i - x} \to -\infty$.

В случае $x \to \alpha_{k+1} - 0$ при помощи аналогичных рассуждений получаем, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\xi_i|^2}{\alpha_i - x} \to +\infty$.

Покажем, что на интервале (α_k, α_{k+1}) функция $m(x)$ монотонно возрастает. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и произвольные 2 точки x_1 и x_2 из интервала (α_k, α_{k+1}) такие, что $x_1 < x_2$. Так как для любого $i = \overline{1, \infty}$: $\frac{|\xi_i|^2}{\alpha_i - x_1} < \frac{|\xi_i|^2}{\alpha_i - x_2}$, то $m(x_1) < m(x_2)$. Кроме того функция $m(x)$ непрерывна на (α_k, α_{k+1}).

Итак, функция $m(x)$ на (α_k, α_{k+1}) монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$ и непрерывна. Поэтому на этом интервале существует единственный корень уравнения $m(x) = 0$. И это справедливо для любого $k : \; k = \overline{1, \infty}$.
■

Следующая теорема позволяет восстановить возмущенный оператор по его спектру и по спектру исходного оператора.

Теорема 5 Пусть даны вещественные числа $\{\beta_i\}_1^{\infty}$ такие, что $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \ldots$, где $\{\alpha_i\}_1^{\infty}$ – собственные значения линейного самосопряженного оператора A, действующего в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве H, $\alpha_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Тогда, если $\{\alpha_i\}_1^{\infty}$ и $\{\beta_i\}_1^{\infty}$ такие, что ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\beta_i - \alpha_i) < \infty, \tag{10}$$

то существует одномерный оператор P такой, что $Ph = c < h, \varphi > \varphi$, где h – произвольный вектор из H, φ – вектор из H, c – вещественный скаляр, $c > 0$, такой, что числа $\{\beta_i\}_1^{\infty}$ являются собственными значениями оператора $B = A + P$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем в качестве базиса в пространстве H собственные векторы оператора A. Пусть $\{\xi_i\}_1^{\infty}$ – координаты искомого вектора φ в этом базисе. Тогда числа $\{\beta_i\}_1^{\infty}$ будут удовлетворять уравнению $m(\beta_i) = 0$, $i = \overline{1, \infty}$. Покажем, что функцию $m(\lambda) = 1/c + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k - \lambda}$ можно представить в виде,

$$m(\lambda) = 1/c + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k - \lambda} = \frac{1}{c} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i - \lambda}{\alpha_i - \lambda}. \tag{11}$$

Прежде всего покажем, что выражение $\prod_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i - \lambda}{\alpha_i - \lambda}$ является голоморфной функцией в $\mathbb{C} \setminus \{\alpha_k\}_1^{\infty}$. Для этого достаточно установить, что произведение $\prod_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i - \lambda}{\alpha_i - \lambda}$ сходится равномерно при любом $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq \alpha_i$, $i = \overline{1, \infty}$.

Так как $\frac{\beta_i - \lambda}{\alpha_i - \lambda} = 1 + \frac{\beta_i - \alpha_i}{\alpha_i - \lambda}$, то сходимость $\prod_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i - \lambda}{\alpha_i - \lambda}$ эквивалентна сходимости ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i - \alpha_i}{\alpha_i - \lambda}$.

При любом $\lambda \neq \alpha_i$, $i = \overline{1,\infty}$, $\exists r(\lambda) = \inf_i |\lambda - \alpha_i| > 0$ (т.к. $\{\alpha_i\}_1^\infty$ не имеют конечных точек сгущения). Следовательно, $\left|\frac{\beta_k-\alpha_k}{\alpha_k-\lambda}\right| < \frac{\beta_k-\alpha_k}{r}$, $k = \overline{1,\infty}$. Поэтому $\left|\sum_{i=1}^\infty \frac{\beta_i-\alpha_i}{\alpha_i-\lambda}\right| < \frac{1}{r}\sum_{i=1}^\infty(\beta_i - \alpha_i) < \infty$ в силу (10).

Представим функцию $m(\lambda)$ в виде:

$$1/c + \sum_{k=1}^\infty \frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k - \lambda} = \Psi(\lambda)\prod_{i=1}^\infty \frac{\beta_i - \lambda}{\alpha_i - \lambda},$$

где $\Psi(\lambda)$ некоторая функция в $\mathbb{C}$.

Устремим $\lambda \to -\infty$. Функция $1/c + \sum_{k=1}^\infty \frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k-\lambda} \to \frac{1}{c}$, произведение $\prod_{i=1}^\infty \frac{\beta_i-\lambda}{\alpha_i-\lambda} \to 1$, поэтому $\Psi(-\infty) = \frac{1}{c}$. Кроме того из этого представления

$$\Psi(\lambda) = \frac{1/c + \sum_{k=1}^\infty \frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k-\lambda}}{\prod_{i=1}^\infty \frac{\beta_i-\lambda}{\alpha_i-\lambda}},$$

поэтому $\Psi(\lambda)$ не имеет особенностей в $\overline{\mathbb{C}}$, так как в точках $\{\alpha_i\}_1^\infty$ и $\{\beta_i\}_1^\infty$ особенности носят устранимый характер. Поэтому $\Psi(\lambda) \equiv \frac{1}{c}$.

Обозначим

$$F(\lambda) = \frac{1}{c}\prod_{i=1}^\infty\left(\frac{\beta_i - \lambda}{\alpha_i - \lambda}\right) - \sum_{k=1}^\infty \frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k - \lambda}\,. \tag{12}$$

Чтобы комплекснозначная голоморфная в $\mathbb{C}$ функция $F(\lambda)$ была константой, достаточно выполнения условия ее ограниченности. Потребуем чтобы функция $F(\lambda)$ в точках $\{\alpha_i\}_1^\infty$ и в ∞ имела устранимые особенности. То есть, $res_{\alpha_k}F(\lambda) = 0$, $k = \overline{1,\infty}$.

$$res_{\alpha_k}F(\lambda) = \lim_{\lambda\to\alpha_k} F(\lambda)(\lambda - \alpha_k) = \lim_{\lambda\to\alpha_k}\left(\left[\frac{1}{c}\prod_{i=1}^\infty \frac{\beta_i - \lambda}{\alpha_i - \lambda} - \sum_{i=1}^\infty \frac{|\xi_i|^2}{\alpha_i - \lambda}\right](\lambda - \alpha_k)\right)$$

$$= \lim_{\lambda\to\alpha_k} -\frac{1}{c}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^\infty \frac{\beta_i - \lambda}{\alpha_i - \lambda}(\beta_k - \lambda) + |\xi_k|^2 = 0,\ k = \overline{1,\infty}$$

В результате мы получаем систему:

$$\begin{cases} |\xi_1|^2 = \frac{1}{c}(\beta_1 - \alpha_1)\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq 1}}^\infty \frac{\beta_i-\alpha_1}{\alpha_i-\alpha_1} \\ |\xi_2|^2 = \frac{1}{c}(\beta_2 - \alpha_2)\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq 2}}^\infty \frac{\beta_i-\alpha_2}{\alpha_i-\alpha_2} \\ \ldots \end{cases}. \tag{13}$$

Вектор φ, координаты которого удовлетворяют системе (13), должен принадлежать пространству H, поэтому необходимо, чтобы выполнялось условие: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2 < \infty$. То есть ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{c}(\beta_k - \alpha_k)\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{\infty}\frac{\beta_i-\alpha_k}{\alpha_i-\alpha_k}$ должен сходиться.

Сходимость $\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{\infty}\frac{\beta_i-\alpha_k}{\alpha_i-\alpha_k}$ эквивалентна сходимости ряда $\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{\infty}\frac{\beta_i-\alpha_i}{\alpha_i-\alpha_k}$. При любых α_i, α_j, $i = \overline{1,\infty}$, $j = \overline{1,\infty}$, $\exists r = \inf\limits_{i,j}|\alpha_i - \alpha_j| > 0$ (т.к. $\{\alpha_i\}_1^{\infty}$ не имеют конечных точек сгущения). Следовательно, $\left|\frac{\beta_i-\alpha_i}{\alpha_i-\alpha_k}\right| < \frac{\beta_i-\alpha_i}{r}$, $i = \overline{1,\infty}$. Поэтому ряд $\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{\infty}\frac{\beta_i-\alpha_i}{\alpha_i-\alpha_k}$ можорируется рядом $\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{\infty}(\beta_i-\alpha_i)$, который сходится в силу (10).

Поэтому

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^2 \leq \frac{M}{c}\sum_{i=1}^{\infty}(\beta_i - \alpha_i) < \infty,$$

где $M = max\{\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{\infty}\frac{\beta_i-\alpha_k}{\alpha_i-\alpha_k},\ k > 0\}$.

Таким образом, при выполнении условия (10) оба слагаемых в (12) имеют смысл и $F(\lambda)$ голоморфна в $\mathbb{C}$, а так как $F(\lambda)$ ограничена на ∞ и $F(-\infty) = \frac{1}{c}$, то $F(\lambda) \equiv \frac{1}{c}$.

Взяв произвольное $c > 0$, найдем $\{\xi_i\}_1^{\infty}$ из системы (13).

Для $c < 0$ рассуждения носят аналогичный характер.

$\blacksquare$

В заключении следует отметить, что задача об исследовании возмущения простого спектра самосопряженного оператора A для случая недискретного спектра требует привлечения дополнительных исследований (см., напр., [10]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Weyl H. Über beschränkte quadratishe Formen, deren Differenz vollstetig ist, Rend. Circolo mat. Palermo, 27, 1909, 373-392.

2. Rellich F. Störumgtheory der Spektralzerlegung. I, Math. Ann., 113 (1936), 600-619.

3. Friedrichs K.O. Über die Spektralzerlegung eines Integral-operators, Math. Ann., 115 (1938), 259-272.

4. Като Т. Теория возмущения линейных операторов.– М.: Мир, 1972. – 740 с.

5. Rozenblum M. Perturbation of the continuous spectrum and unitary equivalence. Pacif. Journ. Math. Vol.7, no. 1 (1957), 997-1010.

6. Löwner K. Über monotone Matrixfunctionen. Mathematische Zeitschrift, 38, 1934, 177-216.

7. Nizhnik L.P. On rank one singular perturbations of selfadjoint operators. Methods of Functional Analysis and Topology, Vol. 7 (2001), no. 3, pp. 54-66.

8. Ахиезер Н.И. Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею.– М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. – 310 с.

9. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Т.1– Х.: Вища школа, 1977. – 316 с.

10. Diaba F., E.Cheremnikh. On rank one perturbation of continuous spectrum which generates prescribed finite point spectrum, Methods of Functional Analysis and Topology, Vol. 14 (2008), no. 1, pp. 20–31.

Статья получена: 16.03.2009; окончательный вариант: 21.06.2010; принята: 29.06.2010.