Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517 № 922, 2010, с.43–55

Аналитические функции в плоскости без точки нуль

Л.Д. Радченко

Харьковский национальный университет имени В.Н.Каразина,
пл. Свободы, 4, 61077, Харьков, Украина
liudmyla.radchenko@gmail.com

Мы изучаем мероморфные функции $f(z)$ в $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$, для которых семейство $\{f(\lambda z)\}_{\lambda\in\mathbb{C}^*}$ нормальное. Такие функции (при дополнительном ограничении — наличие полюса или устранимой особенности в нуле) изучал А. Островский. Мы обобщили некоторые теоремы Островского, а также доказали новые свойства нормальных функций в $\mathbb{C}^*$.

Радченко Л.Д., **Аналітичні функції у площині з вилученим початком координат**. Ми вивчаємо мероморфні функції $f(z)$ у $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$, для яких сімейство $\{f(\lambda z)\}_{\lambda\in\mathbb{C}^*}$ нормальне. Такі функції (при додатковому обмеженні — наявність полюса або переборної особливості у нулі) вивчав А. Островський. Ми узагальнили деякі теореми Островського, а також довели нові властивості нормальних функцій у $\mathbb{C}^*$.

L.D. Radchenko, **Analytic functions in a punctured plane**. We study meromorphic functions $f(z)$ in $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$, for which the family $\{f(\lambda z)\}_{\lambda\in\mathbb{C}^*}$ is normal. Such functions (with additional restriction, namely, presence of a pole or removable singularity in zero) were studied by A. Ostrovsky. We have generalized some him theorems and also have proved new properties of normal functions in $\mathbb{C}^*$.

2000 Mathematics Subject Classification 30D45.

1 Введение

В работе изучается специальный класс мероморфных функций, так называемые нормальные функции. Это такие мероморфные функции $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{C}}$, что семейство $\{(f \circ \psi)(z)\}$, где ψ пробегает группу всех конформных изоморфизмов области Ω, является нормальным. Другими словами, из любой последовательности функций этого семейства можно выбрать равномерно сходящуюся на компактах в области Ω подпоследовательность, при этом в $\overline{\mathbb{C}}$ рассматривается сферическая метрика.

Если в Ω введена метрика, инвариантная относительно всех конформных изоморфизмов, то нормальные мероморфные функции можно описать как голоморфные и равномерно непрерывные отображения из Ω в $\overline{\mathbb{C}}$.

Класс нормальных мероморфных функций находит применение в различных разделах комплексного анализа и, в частности, в теории Неванлинны ([1], [3], [4], [5], [6], [7], [10]). Так, в работах [2], [5] и [6] изучались свойства нормальных функций в комплексной плоскости. В работе [6] было введено понятие нормальной функции первой категории. В работе [5] был доказан критерий принадлежности мероморфной функции этому классу, в работе [2] было получено полное описание нормальных функций первой категории в терминах ее нулей и полюсов, а также найдены необходимое и достаточное условие того, что произведение двух нормальных функций первой категории является функцией того же класса.

Нормальные мероморфные функции в единичном круге изучались, в частности, в работе [3]. При этом были описаны некоторые свойства этих функций и получен критерий нормальности мероморфной функции в терминах ее сферической производной.

Различные обобщения класса нормальных функций, а также его подклассы рассматривались в работе [8].

В данной работе мы изучаем нормальные мероморфные функции в $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Такие функции (при дополнительном ограничении — наличие полюса или устранимой особенности в нуле) полностью описал А. Островский (см. [9]). Как отметил без доказательства А. Еременко (см. [1]), некоторая модификация конструкции Островского позволяет описать все нормальные функции в $\mathbb{C}^*$.

В нашей работе в качестве метрики в $\mathbb{C}^*$ мы используем метрику $ds = \dfrac{|dz|}{|z|}$, инвариантную относительно системы конформных изоморфизмов $\{z \to \lambda z\}_{\lambda\in\mathbb{C}^*}$. Через $d(z,w)$ обозначаем расстояние в этой метрике. $B(z,r)$ — круг с центром в точке z радиуса r в этой метрике. В образе, т.е. в замкнутой комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, всегда рассматривается сферическая метрика

$$\rho_S = \frac{|Z-W|}{\sqrt{1+|Z|^2}\sqrt{1+|W|^2}}.$$

На множестве мероморфных функций в Ω всегда, если не оговорено противное, рассматривается равномерная сходимость на компактах в Ω. При проверке нормальности мероморфной функции в $\mathbb{C}^*$ можно ограничиться автоморфизмами $\lambda_n \to 0$ или $\lambda_n \to \infty$, т.к. если $\lambda_n \to \lambda_0 \neq 0, \infty$, то всегда $f(\lambda_n z) \to f(\lambda_0 z)$. Условимся также говорить, что мероморфная функция в $\mathbb{C}^*$ имеет несущественную особенность в нуле (бесконечности), если она имеет устранимую особенность или полюс в нуле (соответственно на бесконечности). Поскольку преобразование $z \to \dfrac{1}{z}$ сохраняет нормальность и меняет местами особенности в нуле и бесконечности, то при изучении характера особенностей в этих точках достаточно ограничиться особенностью в нуле. Отметим также, что суперпозиция дробно-линейного отображения и нормального есть голоморфное равномерно непрерывное отображение из $\mathbb{C}^*$ в $\overline{\mathbb{C}}$ и поэтому также нормальна.

Перейдем к точным формулировкам полученных нами результатов.

Теорема 1. *Если нормальная функция в $\mathbb{C}^*$ в некотором круге с выколотым центром $\{z : 0<|z|<\varepsilon\}$ выпускает хотя бы одно значение, то она имеет в нуле несущественную особенность (т.е. полюс или устранимую особенность).*

Аналогичное утверждение верно и для окрестности бесконечности.

Следствие. *Если f нормальная функция в $\mathbb{C}^*$ и $f(z) \neq a$ при $0<|z|<\varepsilon$, $f(z) \neq b$ при $\dfrac{1}{\varepsilon'}<|z|<\infty$, где a, b возможно одинаковые точки из $\overline{\mathbb{C}}$, то $f(z)$ — рациональна.*

В дальнейших теоремах предполагается, что $f(z)$ нормальная функция в $\mathbb{C}^*$ с нулями $\{a_n\}$ и полюсами $\{b_n\}$, причем $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ являются мультимножествами, т.е. каждая точка может иметь конечную кратность, совпадающую с кратностью соответствующего нуля или полюса.

Следующие три теоремы описывают свойства нормальных функций в $\mathbb{C}^*$. Они были доказаны А. Островским [9] для нормальных функций в $\mathbb{C}^*$, имеющих в нуле несущественную особенность и сформулированы без доказательства в общем случае А. Ереенко [1]. В нашей работе будет приведено полное доказательство указанных теорем.

Теорема 2. *Величина $|card\{k : a_k \in \Gamma(r_1, r_2)\} - card\{k : b_k \in \Gamma(r_1, r_2)\}|$ ограничена равномерно по $0 < r_1 < r_2 < \infty$.*

Теорема 3. *Величина $card\{k : a_k \in \overline{\Gamma(r, 2r)}\} + card\{k : b_k \in \overline{\Gamma(r, 2r)}\}$ ограничена для всех $r > 0$.*

Этот результат может быть также сформулирован в следующем виде.

Теорема 3*. *Для любого множества $E \subset \mathbb{C}^*$, ограниченного в метрике $\frac{|dz|}{|z|}$, величина $card\{k : a_k \in E\} + card\{k : b_k \in E\}$ ограничена константой, зависящей от диаметра E в этой метрике.*

Теорема 4. *Величина $\inf_{k,l}\left|\dfrac{a_k}{b_l} - 1\right|$ строго положительна.*

Или, в терминах метрики d:

Теорема 4*. *Величина $\inf_{k,l} d(a_k, b_l)$ строго положительна.*

Отметим также следующий простой результат.

Теорема 5. *Пусть f — нормальная функция и для некоторой последовательности $\lambda_n \in \mathbb{C}^*$ $\lambda_n \to 0$ (или $\lambda_n \to \infty$) функции $f(\lambda_n z)$ сходятся к функции $g(z)$. Тогда $g(z)$ также нормальная функция.*

Далее мы показываем, что при некоторых условиях на множество предельных функций можно получить дополнительную информацию о распределении значений нормальной функции.

Теорема 6. *Пусть среди предельных функций семейства* $\{f(\lambda z)\}$ *при* $\lambda \to 0$ *и* $\lambda \to \infty$ *нет тождественной бесконечности. Тогда для любого* $\delta > 0$ *существует* C_δ *такое, что при* $z \notin \cup_n B(b_n, \delta)$ *выполнено неравенство* $|f(z)| \leqslant C_\delta$.

Применяя эту теорему к функции $\dfrac{1}{f}$, получаем следующее утверждение.

Теорема 6*. *Пусть среди предельных функций семейства* $\{f(\lambda z)\}$ *при* $\lambda \to 0$ *и* $\lambda \to \infty$ *нет тождественного нуля. Тогда для любого* $\delta > 0$ *существует* C_δ *такое, что при* $z \notin \cup_n B(a_n, \delta)$ *выполнено неравенство* $|f(z)| \geqslant \dfrac{1}{C_\delta}$.

Следуя [6], введем следующее определение.

Функцию $f\colon \mathbb{C}^* \to \overline{\mathbb{C}}$ назовем нормальной первой категории, если среди предельных функций семейства $\{f(\lambda z)\}_{\lambda \in \mathbb{C}^*}$ нет констант. В противном случае назовем эту функцию нормальной второй категории.

Следующий результат удобно формулировать для A-точек функции f, т.е. корней уравнения $f(z) - A = 0$ (или в случае $A \equiv \infty$ уравнения $\dfrac{1}{f(z)} = 0$).

Теорема 7. *Если* f *– нормальная первой категории, то для всех* $A \in \overline{\mathbb{C}}$ *существует константа* K *такая, что для всех* $r > 0$ *в кольце* $\{r < |z| < Kr\}$ *есть* A*-точка* $f(z)$.

Следующий критерий является аналогом теоремы 1 из работы [5] для нормальных в $\mathbb{C}^*$ функций.

Теорема 8. *Для того, чтобы мероморфная функция* f *в* $\mathbb{C}^*$ *являлась нормальной первой категории необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\delta > 0$ *выполнялись утверждения теорем 6 и 6*, а ее нули и полюсы удовлетворяли теоремам 2, 3, 4 и 7.*

Произведение нормальных функций, вообще говоря, может и не быть нормальной функцией. Пусть, например, $f_1(z) = z$, $f_2(z)$ — любая нормальная функция, у которой есть корни $\alpha_n \to \infty$ и полюсы $\beta_n \to \infty$ (построить такую функцию можно, используя представление А. Островского из [9], [1]). Не ограничивая общности, считаем, что $f_2(\alpha_n z) \to g(z)$ при $n \to \infty$. Очевидно, $g(z) \not\equiv 0$. С другой стороны, если произведение $f_1(\alpha_n z) f_2(\alpha_n z)$ имеет предел $h(z)$ при $n \to \infty$, то $h(1) = 0$. В то же время, для любого $z \in \mathbb{C}$ такого, что $g(z) \neq 0$, имеем $h(z) = \infty$. Значит, $h(z)$ не может быть мероморфной функцией. Тем не менее, для нормальных функций первой категории справедливо следующее утверждение.

Теорема 9. *Пусть* f_1, f_2 *– нормальные функции первой категории. Тогда для того, чтобы их произведение* $f_1 f_2$ *было нормальным, необходимо и достаточно, чтобы расстояние между нулями и полюсами этого произведения было равномерно отграничено от нуля. Аналогичное утверждение верно для функции* $\dfrac{f_1}{f_2}$.

Полное описание нормальных функций в виде бесконечных произведений по нулям и полюсам, данное А. Еременко в [1] без доказательства, будет с полным доказательством приведено во второй части работы.

Метрика $\frac{|dz|}{|z|}$ в $\mathbb{C}^*$

Рассмотрим в $\mathbb{C}^*$ метрику $ds = \dfrac{|dz|}{|z|}$, так что $ds^2 = \dfrac{du^2 + dv^2}{u^2 + v^2}$. Длина кривой $(u_1 = u_1(t), u_2 = u_2(t))$, $t \in (t_0, t_1)$, в этой метрике вычисляется по формуле

$$l(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt}} dt,$$

где g_{ij} — элементы матрицы $\begin{pmatrix} \frac{1}{u^2+v^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{u^2+v^2} \end{pmatrix}$ первой фундаментальной формы.

Можно показать, что окружности с центром в начале координат и лучи, исходящие из него, в этой метрике являются геодезическими линиями.

Обозначим через $d(a, b)$ — расстояние между точками a и b в этой метрике. Если точки a, b расположены на одной окружности с центром в нуле, то $d(a, b) = |\arg a - \arg b|$, при этом $\arg a, \arg b$ такие, что $|\arg a - \arg b| < 2\pi$. Если же они расположены на одном луче, то $d(a, b) = \left|\ln \dfrac{|b|}{|a|}\right|$. Заметим, что для произвольных точек $a, b \in \mathbb{C}^*$

$$\max\left\{\left|\ln \frac{|b|}{|a|}\right|, |\arg a - \arg b|\right\} < d(a, b) < \left|\ln \frac{|b|}{|a|}\right| + |\arg a - \arg b| \qquad (1)$$

Обозначим через $\Gamma(r, R)$ — открытое кольцо $\{z \in \mathbb{C} : r<|z|<R\}$, через C без индексов — любые, вообще говоря, произвольные, постоянные, зависящие только от функции f или ее нулей и полюсов. Для $\varepsilon < \dfrac{\pi}{2}$ положим $C(a, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C}^* : \arg a - \varepsilon < \arg z < \arg a + \varepsilon; |a|e^{-\varepsilon} < |z| < |a|e^{\varepsilon}\}$. Из (1) следует, что $B(a, \varepsilon) \subset C(a, \varepsilon) \subset B(a, 2\varepsilon)$. В силу неравенства треугольника, диаметр множества $C(a, \varepsilon)$ в метрике $\dfrac{|dz|}{|z|}$ не превосходит 4ε. Значит, диаметр $B(a, \varepsilon)$ в этой метрике также не превосходит 4ε.

Отметим, что диаметры множеств не меняются при отображениях $\{z \to \lambda z\}$.

Далее, из неравенства (1), неравенства

$$\max\left\{\left|\ln \frac{|z|}{|w|}\right|, |\arg z - \arg w|\right\} < \left|Ln \frac{z}{w}\right| < \left|\ln \frac{|z|}{|w|}\right| + |\arg z - \arg w|$$

и неравенства

$$\frac{1}{2}\left|\frac{z}{w} - 1\right| \leqslant \left|Ln(1 + \frac{z}{w} - 1)\right| \leqslant \left|\frac{z}{w} - 1\right|,$$

которое справедливо при $\left|\dfrac{z}{w}-1\right| < \dfrac{1}{2}$, следует, что окрестность любой точки z в метрике $d(z,w)$ порождается множествами вида $\left\{w : \left|\dfrac{z}{w}-1\right| < \delta\right\}$, $\delta\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$. Отсюда, в частности, следует, что теоремы 4 и 4^* эквивалентны.

Эквивалентность теорем 3 и 3^* следует из того, что любое ограниченное в метрике $\frac{|dz|}{|z|}$ множество можно вложить в кольцо вида $\Gamma(r,ar)$, где $|\ln a|\leqslant diamE$. Следовательно, его можно покрыть конечными числом колец вида $\Gamma(r,2r)$.

Доказательства сформулированных теорем

Определение. *Функция $f\colon \mathbb{C}^* \to \overline{\mathbb{C}}$ называется нормальной, если семейство функций $\{f(\lambda z)\}_{\lambda\in\mathbb{C}^*}$ — нормально, т.е. из любой последовательности функций этого семейства можно выбрать равномерно сходящуюся на компактах в $\mathbb{C}^*$ подпоследовательность, при этом в $\overline{\mathbb{C}}$ рассматривается сферическая метрика.*

Заметим, что в сферической метрике расстояние между точками сохраняется при замене Z, W на $\frac{1}{Z}$ и $\frac{1}{W}$ и что для любого $R<\infty$ и любых точек $Z, W, |Z|<R, |W|<R$ имеем: $c|Z-W|\leqslant\rho(Z,W)\leqslant C|Z-W|$ с некоторыми константами c и C, зависящими от R.

Отметим некоторые простые факты, касающиеся мероморфных и нормальных функций.

Предложение 1. *Дробно-линейное отображение сохраняет нормальность функции.*

Следует из того, что дробно-линейное отображение есть гомеоморфизм сферы Римана на себя. ■

Предложение 2. *Функции $f(z)$ и $f(\frac{1}{z})$ нормальны одновременно.*

Предложение 3. *Если f_n – непрерывные отображения из произвольной области $\Omega\subset\mathbb{C}^*$ в $\overline{\mathbb{C}}$, то следующие условия эквивалентны:*

(1) f_n равномерно сходится на компактных подмножествах Ω;

(2) $\forall z_0\in\Omega$ существует окрестность $U_{z_0}=\{z : |z-z_0|<\delta\}$ такая, что в ней либо функции $f_n(z)$, либо $f_n^{-1}(z)$ сходятся равномерно как отображения из U_{z_0} в $\mathbb{C}$ с Евклидовой метрикой в $\mathbb{C}$.

Это следует из связи между сферическим и Евклидовым расстояниями. ■

Предложение 4. *Пусть f_n – мероморфные функции в некоторой области $\Omega\subset\mathbb{C}^*$, $\rho(f_n(z),f(z))\to 0$ на компактных подмножествах Ω. Тогда функция f мероморфна.*

Предложение 5. *Пусть f_n – мероморфные функции в некоторой области $\Omega\subset\mathbb{C}^*$, $\rho(f_n(z),f_m(z))\to 0$ на компактных подмножествах Ω. Тогда существует мероморфная функция f в Ω (возможно $f\equiv\infty$), что $\rho(f_n(z),f(z))\to 0$ на компактных подмножествах Ω.*

Предложение 6. *Пусть f_n – последовательность мероморфных функций в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{C}^*$, и в окрестности каждой точки из нее можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность. Тогда существует подпоследоательность, равномерно сходящаяся на компактах в Ω.*

Достаточно, применяя диагональный процесс, получить подпоследовательность, сходящуюся в окрестности каждой точки из $\mathbb{C}^*$, и воспользоваться предложением 3. ■

Теперь мы можем доказать теорему 5.

Доказательство теоремы 5. Выберем последовательность $\{\mu_m\} \subset \mathbb{C}^*$ и покажем, что для некоторой ее подпоследовательности $\mu_{m'}$ функции $g(\mu_{m'}z)$ сходятся равномерно на компактах относительно сферической метрики. Достаточно проверить сходимость для фиксированного компакта $K \subset \mathbb{C}^*$, а потом воспользоваться диагональным процессом. По условию, для каждого фиксированного m, $\rho(f(\lambda_n\mu_m z), g(\mu_m z)) \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно по $z \in K$. Выберем подпоследовательность $n(m)$ так, что $\rho(f(\lambda_{n(m)}\mu_m z), g(\mu_m z)) \leqslant \leqslant \frac{1}{n}$ при $z \in K$. Тогда $\rho(f(\lambda_{n(m)}\mu_m z), g(\mu_m z)) \to 0$ при $m \to \infty$ равномерно на K. Далее, из последовательности $\lambda_{n(m)}\mu_m$ выберем такую подпоследовательность, чтобы $f(\lambda_{n(m')}\mu_{m'}z)$ сходилась к некоторой функции $h(z)$ равномерно на K. Из неравенства
$\rho(g(\mu_{m'}z), h(z)) \leqslant \rho(g(\mu_{m'}z), f(\lambda_{n(m')}\mu_{m'}z)) + \rho(f(\lambda_{n(m')}\mu_{m'}z), h(z))$, следует, что подпоследовательность $g(\mu_{m'}z)$ сходится к функции $g(z)$ равномерно по $z \in K$. ■

Предложение 7. *Пусть f_n — мероморфные функции в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{C}^*$, причем $f_n \to f$ равномерно на компактах в Ω. Тогда если L — замкнутая стягиваемая в точку кривая в Ω, $f|_L \neq 0$ и $f|_L \neq \infty$, то существует N, такое что для всех $n > N$ верно: $p_n \equiv p$, $q_n \equiv q$, где p_n и q_n — количество нулей и полюсов функций $f_n(z)$, p и q — количество нулей и полюсов функции $f(z)$ внутри области, ограниченной кривой L.*

Это верно и в случае, когда L является границей кольца в Ω.

Доказательство. По теореме Гурвица, нули и, соответственно, полюсы допредельных функций стремятся к нулям и, соответственно, полюсам предельной. Отсюда следует, что для всех нулей и полюсов f и выбранного $\widetilde{\varepsilon}$ можно найти такой номер N, начиная с которго нули и полюсы допредельных функций будут лежать в окрестности радиуса $\widetilde{\varepsilon}$, а, следовательно,и внутри L, если ε достаточно мало. Ввиду того, что у функции f внутри L конечное число нулей и полюсов, номер N можно взять один для всех нулей и полюсов. Мы получили, что, начиная с некоторого номера, все нули и полюсы допредельных функций, стремящиеся к нулям и полюсам, лежащим внутри L, предельной функции, также лежат внутри L. Таким образом, начиная с этого номера, $p_n \equiv p, q_n \equiv q$. ■

Теперь мы можем доказать теорему 1.

Доказательство теоремы 1. Пусть $f(z)$ не принимает в выколотой окрестности нуля значение A. Переходя при необходимости к функции

$\dfrac{1}{f(z)-A}$, можно считать $A=\infty$, т.е. $f(z)$ голоморфна в этой окрестности. Пусть среди предельных функций последовательности вида $f(p_n z)$, $p_n\to 0$, есть функция $g(z)\not\equiv\infty$. Если $g(z)$ имеет полюса, то выбирая замкнутый контур $L\subset\mathbb{C}^*$, на котором $g(z)\neq 0$ и $g(z)\neq\infty$, приходим в противоречие с предложением 7.

Пусть $\sup_{|z|=1}|g(z)| = M$. Так как $f(p_n z)\to g(z)$ равномерно на окружности $|z|=1$, то при достаточно больших n имеем $|f(p_n z)|\leqslant M+1$ при $|z|=1$. Отсюда по принципу максимума модуля получаем, что $|f(z)|\leqslant M+1$ в выколотой окрестности нуля, т. е. в точке $z=0$ имеет устранимую особенность. Значит $g(z)$ является голоморфной функцией в $\mathbb{C}^*$

Если же все предельные функции равны бесконечности, то $f(z)\to\infty$ при $z\to 0$. Значит, у функции $f(z)$ в нуле полюс. ■

Доказательство теоремы 2. Предположим противное. Пусть для всех n, можно найти такие числа $r_{1n}<r_{2n}<\infty$, что $|card\{k: r_{1n}<|a_k|<r_{2n}\}-$ $-\,card\{k: r_{1n}<|b_k|<r_{2n}\}|>n$. Не ограничивая общности можно считать, что у $f(z)$ нет ни нулей, ни полюсов на окружностях радиусов r_{1n} и r_{2n}. Также можно считать, что

$$card\{k: r_{1n}<|a_k|<r_{2n}\}-card\{k: r_{1n}<|b_k|<r_{2n}\}>n. \tag{2}$$

В противном случае заменим f на $\dfrac{1}{f}$.

Предположим, что для любого n есть полюсы, меньшие r_{1n} и нули, большие r_{2n}. Пусть далее a_{1n} —нуль с наименьшим модулем из всех, больших r_{1n}, b_{1n} — полюс с наибольшим модулем из всех, меньших r_{1n}, a_{2n} — нуль с наибольшим модулем из всех, меньших r_{2n}, b_{2n} — полюс с наименьшим модулем из всех, больших r_{2n}. Соединим a_{in} с b_{in} для $i=1,2$, кривой: по радиусу, а затем — по меньшей дуге окружности. Когда z пробегает по каждой из этих кривых, $|f(z)|$ изменяется от 0 до $+\infty$. Следовательно, можно найти такие точки z_{1n} и z_{2n} на этих кривых, что $|f(z_{1n})|=1$ и $|f(z_{2n})|=1$. Легко видеть, что при переходе от r_{in} к z_{in} разность в формуле (2) может только увеличиться.

Ввиду нормальности функции $f(z)$, из последовательностей $f(|z_{1n}|z)$ и $f(|z_{2n}|z)$ можно выделить подпоследовательности, равномерно сходящиеся на каждом компакте в $\mathbb{C}^*$ к предельным функциям $g_1(z)$ и $g_2(z)$ соответственно. Очевидно, что $|g_1(1)|=1$ и $|g_2(1)|=1$. Следовательно, $g_i\not\equiv 0$ и $g_i\not\equiv\infty$.

Пусть $g_1(z)\neq 0,\infty$ и $g_2(z)\neq 0,\infty$ при $|z|=1$. Так как $f(|z_{jn}|z)\to g_j(z)$, то и $f'(|z_{jn}|z)\to g_j'(z)$, $\dfrac{f'(|z_{jn}|z)}{f(|z_{jn}|z)}\to\dfrac{g_j'(z)}{g_j(z)}$, $j=1,2$. Далее, согласно принципу аргумента,

$$
\begin{aligned}
&card\{k:|z_{1n}|<|a_k|<|z_{2n}|\} - card\{k:|z_{1n}|<|b_k|<|z_{2n}|\} = \\
&\qquad = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=|z_{2n}|}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=|z_{1n}|}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \\
&\qquad\qquad = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\frac{f'(|z_{2n}|z)}{f(|z_{2n}|z)}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\frac{f'(|z_{1n}|z)}{f(|z_{1n}|z)}\,dz.
\end{aligned}
$$

Устремляя n к бесконечности получим, что последняя разность бесконечно возрастает и стремится к разности $\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\dfrac{g_2'(z)}{g_2(z)}\,dz - \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\dfrac{g_1'(z)}{g_1(z)}\,dz$, которая ограничена. Мы пришли к противоречию.

Если у $g_1(z)$ и $g_2(z)$ есть нули или полюсы при $|z| = 1$, то выберем $\rho_1' < 1 < \rho_1$ и $\rho_2 < 1 < \rho_2'$ — числа такие, что на окружностях $|z| = \rho_i$ и $|z| = \rho_i'$ у функций $g_i(z)$ нет ни нулей, ни полюсов. Разности количества нулей и полюсов этих функций в кольцах $\{\rho_1'<|z|<\rho_1\}$, $\{\rho_2<|z|<\rho_2'\}$ ограничены. В силу предложения 7 разности количества нулей и полюсов для функций $f(|z_{in}|z)$ также ограничены в этих кольцах. Следовательно, эти разности ограничены и для функции $f(z)$ в кольцах $\{|z_{1n}|\rho_1'<|z|<|z_{1n}|\rho_1\}$, $\{|z_{2n}|\rho_2<|z|<|z_{2n}|\rho_2'\}$. Значит, разности количества нулей и полюсов в кольце $\{|z_{1n}|\rho_1<|z|<|z_{2n}|\rho_2\}$ функции $f(z)$ бесконечно возрастает. Таким образом, этот случай сводится к первому.

Пусть теперь $f(z)$ не имеет полюсов при $|z| < r_{1n}$. В силу теоремы 1, функция f имеет в нуле несущественную особенность, т.е. данная теорема сводится к утверждению ограниченности разности количества нулей и полюсов, содержащихся в круге произвольного радиуса. Доказательство этого факта повторяет вышеизложенное, необходимо лишь опустить r_{1n} и проводить рассуждения для кругов $|z| < r_{2n}$, а не для колец $r_{1n} < |z| < r_{2n}$.

Случай, когда $f(z)$ не имеет нулей при $|z| > r_{2n}$ сводится к предыдущему заменой $\dfrac{1}{f(1/z)}$. ■

Доказательство теоремы 3. Покажем, что $card\{k : r \leqslant |a_k| \leqslant 2r\}$ — ограничено для всех r. Предположим противное. Пусть для всех n, существует r_n такое, что $card\{k : r_n \leqslant |a_k| \leqslant 2r_n\} > n$. Найдем подпоследовательность r_{n_k} такую, что $f(r_{n_k}z) \to f_0(z)$ в $\{z : 1 \leqslant |z| \leqslant 2\}$. В силу равенства теоремы 2, величина $card\{l : r_{n_k} \leqslant |a_l| \leqslant 2r_{n_k}\} - card\{l : r_{n_k} \leqslant |b_l| \leqslant 2r_{n_k}\}$ не превосходит некоторой константы C. Следовательно, при достаточно больших n_k функция $f(r_{n_k}z)$ имеет нули и полюса в $\{z : 1 \leqslant |z| \leqslant 2\}$. Значит, $f_0 \not\equiv 0$, $f_0 \not\equiv \infty$ и поэтому имеет конечное число нулей и полюсов в этом кольце. Выбирая числа $\rho_1 < 1$ и $\rho_2 > 2$ такие, что $f_0(z) \neq 0, \infty$ при $\{\rho_1 \leqslant |z| < 1\}$, $\{2 < |z| \leqslant \rho_2\}$, получим противоречие с предложением 7. ■

Доказательство теоремы 4. Если утверждение теоремы неверно, то существует (k_n, l_n) — последовательности индексов такие, что $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{k_n}}{b_{l_n}} = 1$. Рассмотрим $f(a_{k_n} z)$. Найдем подпоследовательность $f(a_{k'_n} z)$ сходящуюся равномерно на компактных подмножествах в $\mathbb{C}^*$ к предельной функции g. Из того, что $f(a_{k_{n'}}) = 0$ следует, что $g(1) = 0$. В некоторой окрестности точки 1 имеем $|g(z)| < 1$. Рассмотрим последовательность $z_n = \dfrac{b_{l_n}}{a_{k_n}}$. Так как $z_n \to 1$ и $f(a_{k_n} z)$ сходится равномерно к $g(z)$ в некоторой окрестности единицы, то функция $f(a_n z_n) = f(b_n)$ ограничена, что невозможно, т.к. b_n полюсы функции f. ■

Следствие. *Пусть $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ — нули и полюсы некоторой нормальной функции. Введем меру $|\mu|(E) = card\{k : a_k \in E\} + card\{k : b_k \in E\}$. Тогда для любого множества $E \subset \mathbb{C}^*$ имеем:*

$$|\mu|(E) \leqslant C_0 S(E), \tag{3}$$

где $S(E)$ — количество замкнутых колец вида $\Gamma(r, 2r)$, покрывающих E. Более того, для всех $r > 0$ и $a > 1$:

$$|\mu|(\Gamma(r, ar)) < C(\ln a + 1), \tag{4}$$

при всех $\gamma \leqslant 0$:

$$\int\limits_{r<|\omega|<ar} |\omega|^\gamma \, d|\mu|(\omega) < Cr^\gamma(\ln a + 1). \tag{5}$$

при всех $\gamma > 0$:

$$\int\limits_{r<|\omega|<ar} |\omega|^\gamma \, d|\mu|(\omega) < Cr^\gamma a^\gamma(\ln a + 1). \tag{6}$$

Доказательство. (3) очевидно следует из теоремы 3. Количество замкнутых колец вида $\Gamma(r, 2r)$, покрывающих кольцо $\Gamma(r, ar)$ равно $[\log_2 a]+1$, т.е. (4) вытекает из (3). Теперь из неравенств (4) и $r < |\omega| < ar$ получаем (5) и (6). ■

Доказательство теорем 6 и 6*. Предположим, что утверждение теоремы 6* не верно. Рассмотрим последовательность (ω_k) такую, что $\omega_k \notin \cup_n B(a_n, \delta)$ для всех k и $f(\omega_k) \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда существует подпоследовательность $\omega_{k'}$, что $f(z\omega_{k'}) \to f_0(z)$ равномерно на компактах в $\mathbb{C}^*$. Очевидно, что $f_0(1) = 0$ и по условию $f_0 \not\equiv 0$. Используя предложение 7, а также тот факт, что при умножении на $\omega_{k'}$ диаметр множеств $B(a_n, \delta)$ не меняется, приходим к противоречию. Аналогично доказывается утверждение теоремы 6. ■

Доказательство теоремы 7. Докажем наличие полюса в каждом кольце. Случай с произвольной A-точкой сводится к рассматриваемому заменой $\dfrac{1}{f(z) - A}$. Предположим противное. Пусть $\Gamma(r_n, K_n r_n)$, $K_n \to \infty$

— последовательность колец, не содержащих полюсов функции f. Тогда в кольцах $\Gamma(\frac{r'_n}{\sqrt{K_n}}, \sqrt{K_n}r'_n)$, где $r'_n = r_n\sqrt{K_n}$, также нет полюсов функции f. Из теоремы 6 следует, что $|f(r'_n z)| < C_\delta$ для $\frac{e^\delta}{\sqrt{K_n}} < |z| < \sqrt{K_n}e^{-\delta}$, $n = 1, 2, \ldots$. Следовательно, если $f(r'_n z) \to g(z)$ равномерно на компактах в $\mathbb{C}^*$, то $|g(z)| < C_\delta$ для $0 < |z| < \infty$. Значит, $g(z) \equiv const$, что противоречит условию. ■

Доказательство теоремы 8. Необходимость следует из теорем 2, 3, 4, 6, 6* и 7. Покажем, что эти условия являются достаточными. Пусть нули и полюсы функции f удовлетворяет утверждениям теорем 2, 3, 4 и 7, а сама функция удовлетворяет утверждениям теорем 6 и 6*. Зафиксируем δ_0 из теоремы 4. Тогда каждое множество $B(\omega, \delta_0/2)$ не содержит одновременно и нулей, и полюсов f. Если оно не содержит полюсов f, тогда выполнено неравенство теоремы 6, т.е. $|f(z)| < C$ для всех $z \in B(\omega, \delta_0/3)$. Аналогично, если оно не содержит нулей f, то $|f(z)| > 1/C$ для всех $z \in B(\omega, \delta_0/3)$. Следовательно, для любой последовательности (ω_k) и произвольного $z_0 \in \mathbb{C}^*$, существует подпоследовательность $(\omega_{k'})$ такая, что $|f(z\omega_{k'})| < C$ или $|1/f(z\omega_{k'})| < C$ для всех k' и всех $z \in B(z_0, \delta_0/3)$. В любом случае есть подпоследовательность $(\omega_{k''}) \subset (\omega_{k'})$ и мероморфная функция $g(z)$ в множестве $B(z_0, \delta_0/3)$ такие, что последовательность функций $f(z\omega_{k''})$ равномерно сходится к ней в данном множестве.

По предложению 6 найдется последовательность $f(z\omega_{k''})$, которая сходится в $\mathbb{C}^*$ к функции $g(z)$.

Так как функции $f(z\omega_{k''})$ имеют хотя бы один нуль и полюс в кольце $\Gamma(1, A_0)$, то по предложению 7, $g(z) \not\equiv const$, $g(z) \not\equiv \infty$, и функция f является нормальной первой категории. ■

Для доказательства теоремы 9 понадобится следующая лемма.

Предложение 8. *Пусть $c_n \in \mathbb{C}^*$ — точки такие, что в каждом открытом кольце $\Gamma(\frac{r}{2}, 2r)$ содержится не более C точек. Тогда если $\delta \leqslant \delta_0$, то диаметр каждого связного множества вида $\cup_{k=1}^N B(c_k, \delta)$ не превосходит $8C_1\delta$.*

Доказательство. Так как $diam(B(c, \delta)) \leqslant 4\delta$, то диаметр (в метрике $\frac{|dz|}{|z|}$) каждого связного множества вида $\cup_{k=1}^N B(c_k, \delta)$ не превосходит $4N\delta$.

Очевидно, что для каждого фиксированного натурального числа N при достаточно малых $\delta \leqslant \delta_0$, связное множество вида $\cup_{j=1}^N B(c_n, \delta)$ вложено в $\overline{\Gamma(\frac{|a|}{2}, 2|a|)}$, где a некоторая точка из набора $c_1, c_2, \ldots, c_N$. По условию $N < C$. Таким образом, диаметр каждой связной компоненты в объединении $\cup_n B(c_n, \delta)$ будет не больше $4C\delta$ для любого $\delta \leqslant \delta_0$. ■

Доказательство теоремы 9. Рассмотрим последовательность $(\omega_k) \subset \mathbb{C}^*$. Тогда существуют нормальные функции g_1, g_2 и подпоследовательность $(\omega_{k'})$ такие, что $\rho_S(f_1(z\omega_{k'}), g_1(z)) \to 0$, $\rho_S(f_2(z\omega_{k'}), g_2(z)) \to 0$, при $k' \to \infty$, равномерно на компактах в $\mathbb{C}^*$. Пусть U — объединение множеств $B(b_j, \delta)$ по всем полюсам b_j функций g_1 и g_2. Покажем, что равномерно на компактах в $\mathbb{C}^*\backslash U$ выполнено:

1) $|f_1(z\omega_{k'}) - g_1(z)| \to 0$;

2) $|f_2(z\omega_{k'}) - g_2(z)| \to 0$;

3) $|(f_1 f_2)(z\omega_{k'}) - (g_1 g_2)(z)| \to 0$ при $k \to \infty$.

Так как функции f_1, f_2 нормальные первой категории, то для них справедливы утверждения теорем 6 и 6*. Из теоремы 6 и предложения 3 следуют утверждения 1) и 2). Утверждение 3) получается из-за того, что функции $f_i(z\omega_{k'})$ равномерно ограничены на компактах в $\mathbb{C}^*\backslash U$.

Используя предложение 8 и теорему 3, получаем, что диаметр в метрике $\dfrac{|dz|}{|z|}$ каждой связной компоненты A множества U не превосходит C. Значит для достаточно малого δ, он не превосходит расстояния в между нулями и полюсами функции $f_1 f_2$. Следовательно, A не содержит одновременно нулей и полюсов функции $(f_1 f_2)(z\omega_{k'})$.

Пусть A не содержит полюсов функции $(f_1 f_2)(z\omega_{k'})$. Тогда по принципу максимума модуля из 1), 2) и 3) получим, что последовательность функций $(f_1 f_2)(z\omega_{k''})$ равномерно сходится на множестве A к голоморфной функции $f^*(z)$ для некоторой подпоследовательности $(\omega_{k''}) \subset (\omega_{k'})$. Так как $f^*(z) = (g_1 g_2)(z)$ на ∂A, то 3) верно во всем множестве A.

Пусть A не содержит нулей функции $(f_1 f_2)(z\omega_{k'})$, тогда аналогично утверждениям 1), 2), 3) получим, что $|\frac{1}{f_1(z\omega_{k'})} - \frac{1}{g_1(z)}| \to 0$, $|\frac{1}{f_2(z\omega_{k'})} - \frac{1}{g_2(z)}| \to 0$ при $k \to \infty$. Так же получаем, что $|\frac{1}{(f_1 f_2)}(z\omega_{k'}) - \frac{1}{(g_1 g_2)}(z)| \to 0$, при $k' \to \infty$ на множестве A и $\rho_S((f_1 f_2)(z\omega_{k''}), g_1 g_2(z)) \to 0$, при $k'' \to \infty$ равномерно на компактах в $\mathbb{C}^*$.

Наконец, если f_2 — нормальна, то $\dfrac{1}{f_2}$ — нормальна, что доказывает последнее утверждение теоремы. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Eremenko. Normal holomorphic curves from parabolic regions to projective spaces. // Preprint. Purdue University. — 1999.

2. S.Ju. Favorov. Sunyer-i-Balaguer's Almost Elliptic Functions and Yosida's Normal Functions. // Journal d'Analyse Mathematique, v.104. — 2008. — p. 307—340.

3. A.J. Lohwater, Ch.Pommerenke. On normal meromorphic functions // Ann.Acad.Sci.Fenn.,Ser. A1, no.550. — 1973. — p. 1—12.

4. D. Minda. Yosida functions. // Lectures in Complex Analysis (ed:Chuang Chi-Tai) Proc.Symp.Compl.Anal., World Sci. — London 1988. — p. 197-213.

5. H. Yoshida. Almost periodic meromorphic functions. // Mathematica Montisnigri, v.1. — 1993. — p. 121—143.

6. K. Yosida. On a class of meromorphic functions. // Proc.Phis.—Math. Soc., Japan, v.16. — 1934. — p. 227—235.

7. L. Zalcman. A heuristic Principle in Function Theory // Amer.Math.Monthly, 82. — 1975. — p. 812—817.

8. К.О. Курбанов. Об одной классификации мероморфных функций, определенных в конечной плоскости // Математические заметки т. 15, no 6. — 1974. — с. 865—874.

9. П. Монтель. Нормальные семейства аналитических функций. — М.: Объединенное научно-техническое издательство НКТП СССР, главная редакция общетехнической литературы и номографии. — 1936. — 239с.

10. У.К. Хейман. Мероморфные функции. — М.: изд. "МИР". — 1966. — 287р.

Статья получена: 17.02.2010; окончательный вариант: 15.09.2010; принята: 21.09.2010.