Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 519.21 № 922, 2010, с.32–42

Восстановление винеровского поля на плоскости по его реализациям на участках двух монотонно неубывающих кривых

Т.В. Нескородева

Донецкий национальный университет, Украина

Целью работы являтся построение зависимостей для наилучшей в среднеквадратическом смысле оценки $\bar{m}_\gamma(u,v)$ винеровского поля $w(u,v)$ по его реализациям на участках двух монотонно неубывающих кривых $w(x,y)$, $(x,y) \in \gamma_1 \bigcup \gamma_2$, $(u,v) \notin \gamma$ и ее ошибки $d_\gamma(u,v)$. Данные зависимости в работе получены для различных вариантов расположения точки (u,v) относительно кривых γ_1 и γ_2.

Нескородєва Т.В. **Відновлення вінерівського поля на площині по його реалізаціях на ділянках двох монотонно неспадаючих кривих.** Метою роботи є побудова залежностей для найкращої у середньоквадратичному значенні оцінки $\bar{m}_\gamma(u,v)$ вінерівського поля $w(u,v)$ по його реалізаціях на ділянках двох монотонно неспадаючих кривих $w(x,y)$, $(x,y) \in \gamma_1 \bigcup \gamma_2$, $(u,v) \notin \gamma$ та її помилки $d_\gamma(u,v)$. Дані залежності в роботі отримані для різних варіантів розташування точки (u,v) відносно кривих γ_1 і γ_2.

T.V. Neskorodeva, **Wiener field restoration on the plane by its realizations on sites of two monotonously not decreasing curves.** The purpose of this paper is to construct dependencies for the best in mean square value of an estimation $\bar{m}_\gamma(u,v)$ Wiener fields $w(u,v)$ on its realizations on sites of two monotonously not decreasing curves $w(x,y)$, $(x,y) \in \gamma_1 \bigcup \gamma_2, (u,v) \notin \gamma$ and its error $d_\gamma(u,v)$. The given dependencies are received in work for various variants of an arrangement of a point (u,v) concerning curves γ_1 and γ_2.

2000Mathematics Subject Classification 60G35.

1. Введение.

Постановка проблемы. В задачах обработки изображений последние интерпретируются как случайные (чаще всего винеровские) поля и как следствие такой интерпретации возникает необходимость решения следующих задач. Пусть (Ω, σ, P) - некоторое вероятностное пространство, на котором задано винеровское поле $w(x, y), \quad x \geq 0, \ y \geq 0$. Предполагается, что мы наблюдаем винеровское поле $w(x, y), \quad (x, y) \in \gamma$ (где γ - некоторая кривая на плоскости) и необходимо восстановить поле в точке $(u, v) \notin \gamma$. Под восстановлением понимается построение наилучшей в среднеквадратическом смысле оценки для $w(u, v)$, основанной на значениях $w(x, y)$ при $(x, \ y) \in \gamma$. Известно, что эта оценка задается формулой $\bar{m}_\gamma(u, v) = M\left\{ w(u, v) \left| F_\gamma \right.\right\}$ и ее ошибка вычисляется по формуле $d_\gamma(u, v) = M\left\{ (w(u, v) - \bar{m}_\gamma(u, v))^2 \left| F_\gamma \right.\right\}$, где $F_\gamma = \sigma\left\{ w(x, y), \ (x, y) \in \gamma \right\}$.

Анализ исследований. В [1] приведено решение задач восстановления винеровского поля на плоскости по его значениям на замкнутой кривой. В [2] решены задачи восстановления по реализациям винеровского поля на участках двух монотонно невозрастающих кривых γ_1 и γ_2. Примеры использования данных моделей при анализе показателей деятельности предприятия, которые представлены двумерными массивами данных описаны в [3,4]. В данных работах предполагается, что имеется система с неполной информацией об объекте. Множество γ соответствует параметрам распределений "наблюдаемых" показателей, переменные (u, v) - параметрам распределений показателей "недоступных наблюдению". Поэтому актуальным является построение явных формул для величин $\bar{m}_\gamma(u, v)$ и $d_\gamma(u, v)$ для разных видов кривых сужения γ.

Постановка задачи. Формализация зависимостей для величин $\bar{m}_\gamma(u, v)$ и $d_\gamma(u, v)$ в случае, когда множество γ имеет вид участков двух монотонно неубывающих кривых γ_1 и γ_2.

2. Определения и обозначения.

Определение. Случайная функция $w(x, y), x \geq 0, y \geq 0$, принимающая значения в пространстве R^1, называется винеровским полем, если выполняются следующие условия:

1) для $\forall (x, y) : (x \geq 0) \wedge (y \geq 0) \wedge ((x = 0) \vee (y = 0)) \Rightarrow w(x, y) = 0$ (с вероятностью $P = 1$);

2) $\forall x \geq 0, y \geq 0, \Delta x \geq 0, \Delta y \geq 0$ приращения $\Delta w = w(x + \Delta x, y + \Delta y) - w(x, y + \Delta y) + w(x, y) - w(x + \Delta x, y)$ винеровского поля по непересекающимся прямоугольникам со сторонами параллельными координатным осям - случайные величины независимые в совокупности;

3) $\forall x \geq 0, y \geq 0, \Delta x \geq 0, \Delta y \geq 0$ приращения винеровского поля Δw имеют нормальное распределение $N(0, \Delta x \Delta y)$:

$$P\{\Delta w < z\} = \frac{1}{2\pi \Delta x \Delta y} \int\limits_{-\infty}^{z} \exp(-t^2/(2\Delta x \Delta y))dt, \quad t \in R^1.$$

Заметим, что корреляционная функция винеровского поля имеет следующий вид:

$$R((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \min(x_1, x_2) \min(y_1, y_2).$$

Предположим, что мы наблюдаем винеровское поле на участках двух монотонных кривых γ_1 и γ_2 (рис.1), которые задаются следующими параметрическими уравнениями:

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = x(\tau), \\ y = y(\tau); \quad \tau \in [0,1] \end{cases} \qquad \gamma_2 : \begin{cases} x = \tilde{x}(\tau), \\ y = \tilde{y}(\tau); \quad \tau \in [0,1], \end{cases}$$

где функции $x(\tau)$, $y(\tau)$, $\tilde{x}(\tau)$, $\tilde{y}(\tau)$ удовлетворяют следующим условиям:

C_1) функции $x(\tau)$, $y(\tau)$, $\tilde{x}(\tau)$, $\tilde{y}(\tau)$ положительные, кусочно-гладкие на отрезке $[0,1]$;

C_2) если $\tau_1 < \tau_2$ то $x(\tau_1) \leq x(\tau_2)$, $y(\tau_1) \leq y(\tau_2)$, $\tilde{x}(\tau_1) \leq \tilde{x}(\tau_2)$, $\tilde{y}(\tau_1) \leq \tilde{y}(\tau_2)$, $x(1) < \tilde{x}(0)$, $\tilde{y}(1) < y(0)$ (выпуклость кривых роли не играет);

C_3) $\quad 1 - B\tilde{B} \neq 0,$

где

$$B = \frac{x(0)}{y(0)} + \int_0^1 \frac{\dot{x}^2(\tau)}{\varphi(\tau)} d\tau, \quad \tilde{B} = \frac{\tilde{y}(0)}{\tilde{x}(0)} + \int_0^1 \frac{\dot{\tilde{y}}^2(\tau)}{\tilde{\varphi}(\tau)} d\tau,$$

$$\varphi(\tau) = x(\tau)\dot{y}(\tau) + y(\tau)\dot{x}(\tau), \quad \tilde{\varphi}(\tau) = \tilde{x}(\tau)\dot{\tilde{y}}(\tau) + \tilde{y}(\tau)\dot{\tilde{x}}(\tau), \quad \tau \in [0,1].$$

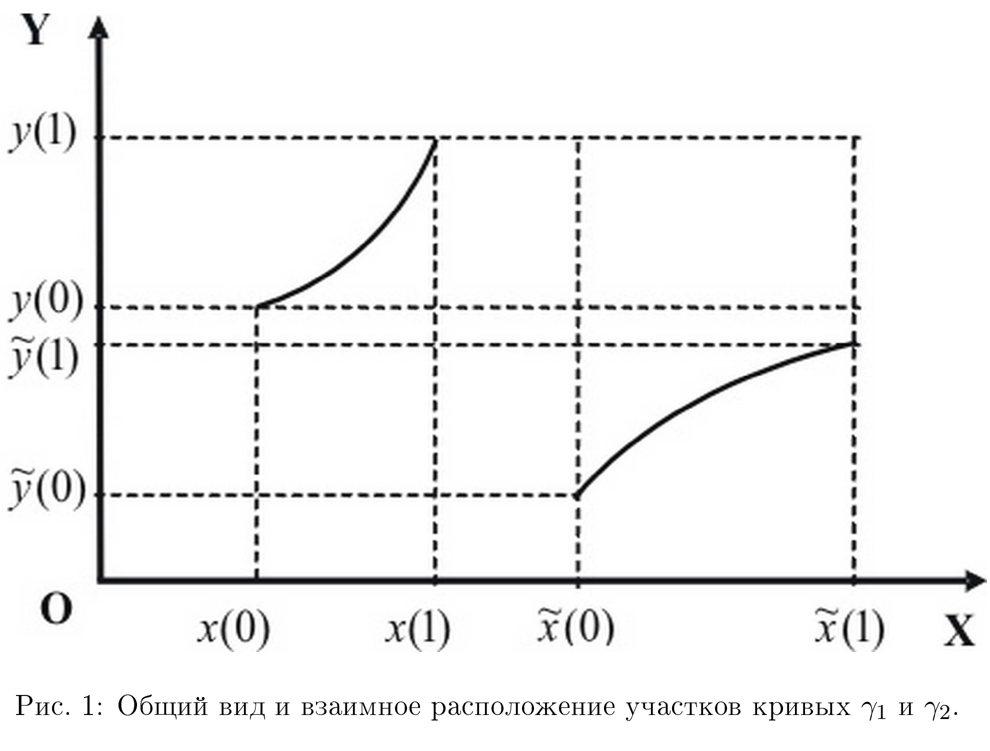

Рис. 1: Общий вид и взаимное расположение участков кривых γ_1 и γ_2.

Рассмотрим следующие случайные процессы:

$$w(\tau) = w(x(\tau), y(\tau)), \quad \tilde{w}(\tau) = w(\tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau)), \quad \tau \in [0,1]. \tag{1}$$

Эти процессы являются гауссовскими с корреляционными функциями

$$R(\tau_1, \tau_2) = \min(x(\tau_1), x(\tau_2)) \min(y(\tau_1), y(\tau_2)),$$

$$\tilde{R}(\tau_1, \tau_2) = \min(\tilde{x}(\tau_1), \tilde{x}(\tau_2)) \min(\tilde{y}(\tau_1), \tilde{y}(\tau_2))$$

соответственно.

В настоящей статье будет рассмотрен случай, когда точка (u, v) принадлежит области ограниченной участками кривых γ_1 и γ_2 и прямыми $y = \tilde{y}(0)$, $y = y(1)$, $x = x(0)$, $x = \tilde{x}(1)$. Эту область можно представить в виде объединения следующих областей (явный вид формул для $\bar{m}(u, v)$ и $d(u, v)$ будет зависеть от того какой из этих областей принадлежит точка (u, v)):

$$D_1 = \{x = x(\tau), y(0) < y < y(\tau), \tau \in (0,1)\},$$

$$D_1' = \{x(1) < x < \tilde{x}(0), y(0) < y \le y(1)\},$$

$$D_1'' = \{x(0) \le x < x(1), \tilde{y}(1) < y \le y(0)\},$$

$$D_1''' = \{x(1) \le x < \tilde{x}(0), \tilde{y}(1) < y \le y(0)\},$$

$$D_2 = \{x = x(\tau),\ \tilde{y}(\tau) < y < \tilde{y}(1),\ \tau \in (0,1)\},$$

$$D_2' = \{x(1) < x \le \tilde{x}(0),\ \tilde{y}(0) \le y < \tilde{y}(1)\},$$

$$D_2'' = \{\tilde{x}(0) \le x < \tilde{x}(1),\ \tilde{y}(1) \le y < y(0)\},$$

$$D_3 = \{\tilde{x}(0) \le x \le \tilde{x}(1),\ y(0) \le y \le y(1)\},$$

$$D_4 = \{x(0) \le x \le x(1),\ \tilde{y}(0) \le y \le \tilde{y}(1)\}.$$

Введем следующие обозначения:

$$\bar{m}_1 = \left[\frac{w(x(0), y(0))}{y(0)} + \int_0^1 \frac{\dot{x}(\tau)}{\varphi(\tau)} dw(\tau) \right],$$

$$\bar{m}_2 = \left[\frac{w(\tilde{x}(0), \tilde{y}(0))}{\tilde{x}(0)} + \int_0^1 \frac{\dot{\tilde{y}}(\tau)}{\tilde{\varphi}(\tau)} d\tilde{w}(\tau) \right]. \tag{2}$$

3. Основные результаты.

Теорема 1. Пусть точка (u, v) принадлежит области $D_1 \bigcup D_1' \bigcup D_1'' \bigcup D_1'''$ тогда (с вероятностью $P = 1$):

$$\bar{m}(u, v) = K_1(u, v)\bar{m}_1 + K_2(u, v)\bar{m}_2 + \alpha w(x(\tau(v)), v) + v \int_{\tau(v)}^{\tau(u)} \frac{\dot{x}(\tau)}{\varphi(\tau)} dw(\tau), \tag{3}$$

$$d(u,v) = uv - (v + K_1(u,v))\,[\alpha x(\tau(v)) + vC] -$$
$$-K_2(u,v)\left[\frac{\tilde{y}(0)}{\tilde{x}(0)}(\tilde{x}(0) - u) + u\tilde{B}\right], \qquad (4)$$

где

$$K_1(u,v) = -\frac{[u - x(\tau(v)) - vC]\tilde{B}}{1 - B\tilde{B}}, \qquad K_2(u,v) = \frac{u - x(\tau(v)) - vC}{1 - B\tilde{B}},$$

$$\tau(v) = \begin{cases} \min\limits_{y(\tau)=v} \tau, \; y(0) \le v \le y(1), \\ 0, \; \tilde{y}(0) < v \le y(0); \end{cases} \quad \tau(u) = \begin{cases} \min\limits_{x(\tau)=u} \tau, \; x(0) \le u \le x(1), \\ 1, \; x(1) < u \le \tilde{x}(1); \end{cases}$$

$$C = \int\limits_{\tau(v)}^{\tau(u)} \frac{\dot{x}^2(\tau)}{\varphi(\tau)} d\tau, \quad \alpha = \begin{cases} 1, \text{ при } y(0) \le v \le y(1); \\ \frac{v}{y(0)}, \text{при } 0 < v < y(0); \end{cases}$$

процессы $w(\tau)$ и $\tilde{w}(\tau)$, $\tau \in [0,1]$ и случайные функции $\bar{m}_1$ и $\bar{m}_2$ - определяются зависимостями (1) - (2).

Теорема 2. Пусть точка (u,v) принадлежит области $D_2 \bigcup D'_2 \bigcup D''_2$ тогда (с вероятностью $P = 1$):

$$\bar{m}(u,v) = \beta w(u, \tilde{y}(\tilde{\tau}(u))) + u \int\limits_{\tilde{\tau}(u)}^{\tilde{\tau}(v)} \frac{\dot{\tilde{y}}(\tau)}{\tilde{\varphi}(\tau)} d\tilde{w}(\tau) + \tilde{\tilde{K}}_1(u,v)\bar{m}_1 + \tilde{\tilde{K}}_2(u,v)\bar{m}_2, \quad (5)$$

$$d(u,v) = uv - \left(u + \tilde{\tilde{K}}_2(u,v)\right)[\beta \tilde{y}(\tilde{\tau}(u)) + u\tilde{C}\,] -$$
$$-\tilde{\tilde{K}}_1(u,v)\left[x(0) - \frac{vx(0)}{y(0)} + vB\right], \qquad (6)$$

где $\beta = \begin{cases} 1, \text{ при } \tilde{x}(0) \le v \le \tilde{x}(1); \\ \frac{u}{\tilde{x}(0)}, \text{при } x(1) < u \le \tilde{x}(0); \end{cases}$,

$$\tilde{\tau}(v) = \begin{cases} \min\limits_{\tilde{y}(\tau)=v} \tau, \; \tilde{y}(0) \le v \le \tilde{y}(1), \\ 1, \; \tilde{y}(1) < v \le y(1); \end{cases} \qquad \tilde{\tau}(u) = \begin{cases} \min\limits_{\tilde{x}(\tau)=u} \tau, \; \tilde{x}(0) \le u \le \tilde{x}(1), \\ 0, \; x(0) \le u < \tilde{x}(0); \end{cases}$$

$$\tilde{\tilde{K}}_1(u,v) = \frac{v - \tilde{y}(\tilde{\tau}(u)) - u\tilde{C}}{1 - B\tilde{B}}, \quad \tilde{\tilde{K}}_2(u,v) = -\tilde{\tilde{K}}_1(u,v)B, \quad \tilde{C} = \int\limits_{\tilde{\tau}(u)}^{\tilde{\tau}(v)} \frac{\dot{\tilde{y}}^2(\tau)}{\tilde{\varphi}(\tau)} d\tau.$$

процессы $w(\tau)$ и $\tilde{w}(\tau)$, $\tau \in [0,1]$ и случайные величины $\bar{m}_1$ и $\bar{m}_2$ - определяются зависимостями (1) - (2).

Теорема 3. Пусть точка (u,v) принадлежит области $D_3 \bigcup D_4$ тогда (с вероятностью $P = 1$):

$$\bar{m}(u,v) = \tilde{K}_1(u,v)\bar{m}_1 + \tilde{K}_2(u,v)\bar{m}_2 +$$

$$+\alpha w(x(\tau(v)),v)+v\int\limits_{\tau(v)}^{1}\frac{\dot{x}(\tau)}{\varphi(\tau)}dw(\tau)+\beta w(u,\tilde{y}(\tilde{\tau}(u)))+u\int\limits_{\tilde{\tau}(u)}^{1}\frac{\dot{\tilde{y}}(\tau)}{\tilde{\varphi}(\tau)}d\tilde{w}(\tau), \quad (7)$$

$$d(u,v)=uv-\left(v+\tilde{K}_1(u,v)\right)[\alpha x(\tau(v))+vC]-(u+\tilde{K}_2(u,v))[\beta\tilde{y}(\tilde{\tau}(u))+\tilde{C}], \quad (8)$$

где

$$\tilde{K}_1(u,v)=\frac{[\alpha x(\tau(v))+vC]\tilde{B}-[\beta\tilde{y}(\tilde{\tau}(u))+u\tilde{C}]}{1-B\tilde{B}},$$

$$\tilde{K}_2(u,v)=\frac{[\beta\tilde{y}(\tilde{\tau}(u))+\tilde{C}]B-[\alpha x(\tau(v))+vC]}{1-B\tilde{B}},$$

процессы $w(\tau)$ и $\tilde{w}(\tau)$, $\tau\in[0,1]$ и случайные функции $\bar{m}_1$ и $\bar{m}_2$ - определяются зависимостями (1)-(2).

4. Доказательство основных результатов.

Доказательство теоремы 1. Пусть $0=\tau^0_{k(n)}<\tau^1_{k(n)}<...<\tau^{k(n)}_{k(n)}=1,\ n\geq 1,$ некоторое разбиение отрезка [0,1] такое, что: $1\leq k(1)<k(2)<...<k(n)<...$; $\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_{1\leq j\leq k(n)}(\tau^j_{k(n)}-\tau^{j-1}_{k(n)})=0$ и для любого $j=\overline{1,k(n)}$ существует $r=\overline{1\,,\,k(n+1)}$ такое, что $\tau^j_{k(n)}=\tau^r_{k(n+1)}$. Введем следующие обозначения: $x_j=x^j_{k(n)},\ y_j=y^j_{k(n)},\ \tilde{x}_j=\tilde{x}^j_{k(n)},\ \tilde{y}_j=\tilde{y}^j_{k(n)},\ w_j=w(x_j,y_j),\ \tilde{w}_j=w(\tilde{x}_j,\tilde{y}_j),\ F_{k(n)}=\sigma\left\{w_j\,,\ \tilde{w}_j,\ j=\overline{0\,,\,k(n)}\right\},\ \bar{m}_{k(n)}(u,v)=M\left\{w(u,v)\,\middle|F_{k(n)}\right\},$ $d(u,v)_{k(n)}=M\left\{\,(w(u,v)-\bar{m}(u,v))^2\,\middle|F_{k(n)}\right\}.$

Далее для упрощения записей переобозначим $k(n)$ через n и для нахождения $\bar{m}_n(u,v)$ и $d_n(u,v)$ воспользуемся теоремой о нормальной корреляции из [5, стр.498]. Для этого найдем решение системы:

$$cov(\bar{w},\bar{w})\bar{\beta}=cov(w(u,v),\bar{w}), \quad (9)$$

где $\bar{w}=(w,\tilde{w}),\ w=(w_0,\ w_1,....,w_j,...,w_n),\ \tilde{w}=(\tilde{w}_0,\ \tilde{w}_1,....,\tilde{w}_j,...,\tilde{w}_n),$ $\bar{\beta}-$ неизвестный вектор, имеющий следующую структуру: $\bar{\beta}=(\beta,\tilde{\beta}),\ \beta=(\beta_0,\ \beta_1,....,\beta_j,...,\beta_n),\ \tilde{\beta}=(\tilde{\beta}_0,\ \tilde{\beta}_1,....,\tilde{\beta}_j,...,\tilde{\beta}_n).$

Матрица $cov(\bar{w},\bar{w})$ имеет следующую структуру:

$$cov(\bar{w},\bar{w})=\begin{pmatrix} cov(w,w) & cov(w,\tilde{w}) \\ cov(\tilde{w},w) & cov(\tilde{w},\tilde{w}) \end{pmatrix},$$

где

$$cov(w,w)=\begin{pmatrix} x_0y_0 & x_0y_0 & x_0y_0 & \dots & x_0y_0 \\ x_0y_0 & x_1y_1 & x_1y_1 & \dots & x_1y_1 \\ x_0y_0 & x_1y_1 & x_2y_2 & \dots & x_2y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_0y_0 & x_1y_1 & x_2y_2 & \dots & x_ny_n \end{pmatrix},$$

$$cov(\tilde{w},\tilde{w}) = \begin{pmatrix} \tilde{x}_0\tilde{y}_0 & \tilde{x}_0\tilde{y}_0 & \tilde{x}_0\tilde{y}_0 & \dots & \tilde{x}_0\tilde{y}_0 \\ \tilde{x}_0\tilde{y}_0 & \tilde{x}_1\tilde{y}_1 & \tilde{x}_1\tilde{y}_1 & \dots & \tilde{x}_1\tilde{y}_1 \\ \tilde{x}_0\tilde{y}_0 & \tilde{x}_1\tilde{y}_1 & \tilde{x}_2\tilde{y}_2 & \dots & \tilde{x}_2\tilde{y}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{x}_0\tilde{y}_0 & \tilde{x}_1\tilde{y}_1 & \tilde{x}_2\tilde{y}_2 & \dots & \tilde{x}_n\tilde{y}_n \end{pmatrix},$$

$$cov(w,\tilde{w}) = \begin{pmatrix} x_0\tilde{y}_0 & x_0\tilde{y}_1 & x_0\tilde{y}_2 & \dots & x_0\tilde{y}_n \\ x_1\tilde{y}_0 & x_1\tilde{y}_1 & x_1\tilde{y}_2 & \dots & x_1\tilde{y}_n \\ x_2\tilde{y}_0 & x_2\tilde{y}_1 & x_2\tilde{y}_2 & \dots & x_2\tilde{y}_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n\tilde{y}_0 & x_n\tilde{y}_1 & x_n\tilde{y}_2 & \dots & x_n\tilde{y}_n \end{pmatrix},$$

$$cov(\tilde{w},w) = cov^T(w,\tilde{w}).$$

Определим координаты вектора $cov(w(u,v),\bar{w})$. Рассмотрим сначала случай, когда точка $(u,v)\in D_1$ и уравнение $x(\tau)=u$ имеет единственное решение. Не умаляя общности можно считать, что для любого $n\ge 1$ существуют τ_q^n и τ_p^n такие, что $\tau(u)=\tau_q^n$ и $\tau(v)=\tau_p^n$ $(p<q)$. Учитывая эти обозначения и условие C_2, запишем координаты вектора $cov(w(u,v),\bar{w})$: $cov(w(u,v),\tilde{w}_j) = u\tilde{y}_j$, $j=\overline{0,n}$,

$$cov(w(u,v),w_j) = \begin{cases} x_jy_j, \ j=\overline{0,p-1}, \\ x_jv, \ j=\overline{p,q}, \\ uv, \ j=\overline{q+1,n}; \end{cases}$$

Далее, пронумеруем уравнения системы (9) по следующему правилу: первые n уравнений будут иметь индекс $(1,j)$, $j=\overline{0,n}$, следующие - $(2,j)$, $j=\overline{0,n}$. Чтобы найти решение системы (9) сделаем над ее уравнениями следующие преобразования. Из уравнений с индексами (k,j), $k=\overline{1,2}$, $j=\overline{0,n}$ вычтем уравнения с индексами $(k,j-1)$; $k=\overline{1,2}$, $j=\overline{1,n}$ соответственно. В результате этих преобразований система (9) примет вид:

$$cov'(\bar{w},\bar{w})\bar{\beta} = cov'(w(u,v),\bar{w}), \tag{10}$$

где $cov'(\bar{w},\bar{w}) = \begin{pmatrix} cov'(w,w) & cov'(w,\tilde{w}) \\ cov'(\tilde{w},w) & cov'(\tilde{w},\tilde{w}) \end{pmatrix}$,

$$cov'(w,w) = \begin{pmatrix} x_0y_0 & x_0y_0 & x_0y_0 & \dots & x_0y_0 \\ 0 & \varphi_1 & \varphi_1 & \dots & \varphi_1 \\ 0 & 0 & \varphi_2 & \dots & \varphi_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \varphi_n \end{pmatrix},$$

$$cov'(\tilde{w},\tilde{w}) = \begin{pmatrix} \tilde{x}_0\tilde{y}_0 & \tilde{x}_0\tilde{y}_0 & \tilde{x}_0\tilde{y}_0 & \dots & \tilde{x}_0\tilde{y}_0 \\ 0 & \tilde{\varphi}_1 & \tilde{\varphi}_1 & \dots & \tilde{\varphi}_1 \\ 0 & 0 & \tilde{\varphi}_2 & \dots & \tilde{\varphi}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \tilde{\varphi}_n \end{pmatrix},$$

$$cov'(w,\tilde{w}) = \begin{pmatrix} x_0\tilde{y}_0 & x_0\tilde{y}_1 & x_0\tilde{y}_2 & \dots & x_0\tilde{y}_n \\ \Delta x_1\tilde{y}_0 & \Delta x_1\tilde{y}_1 & \Delta x_1\tilde{y}_2 & \dots & \Delta x_1\tilde{y}_n \\ \Delta x_2\tilde{y}_0 & \Delta x_2\tilde{y}_1 & \Delta x_2\tilde{y}_2 & \dots & \Delta x_2\tilde{y}_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta x_n\tilde{y}_0 & \Delta x_n\tilde{y}_1 & \Delta x_n\tilde{y}_2 & \dots & \Delta x_n\tilde{y}_n \end{pmatrix},$$

$$cov'(\tilde{w},w) = \begin{pmatrix} x_0\tilde{y}_0 & x_1\tilde{y}_0 & x_2\tilde{y}_0 & \dots & x_n\tilde{y}_0 \\ x_0\Delta\tilde{y}_1 & x_1\Delta\tilde{y}_1 & x_2\Delta\tilde{y}_1 & \dots & x_n\Delta\tilde{y}_1 \\ x_0\Delta\tilde{y}_2 & x_1\Delta\tilde{y}_2 & x_2\Delta\tilde{y}_2 & \dots & x_n\Delta\tilde{y}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_0\Delta\tilde{y}_n & x_1\Delta\tilde{y}_n & x_2\Delta\tilde{y}_n & \dots & x_n\Delta\tilde{y}_n \end{pmatrix},$$

$$cov'(w(u,v),w_j) = \begin{cases} x_0y_0, \ j=0, \\ \varphi_j, \ j=\overline{1,p}, \\ \Delta x_j v, j=\overline{p+1,q}, \\ 0, \ j=\overline{q+1,n}; \end{cases} \quad cov'(w(u,v),\tilde{w}_j) = \begin{cases} u\tilde{y}_0, \ j=0, \\ u\Delta\tilde{y}_j, j=\overline{1,n}; \end{cases}$$

где $\varphi_j = x_jy_j - x_{j-1}y_{j-1}$, $\tilde{\varphi}_j = \tilde{x}_j\tilde{y}_j - \tilde{x}_{j-1}\tilde{y}_{j-1}$, $j=\overline{1,n}$.

Далее, полученные уравнения системы (10) с индексами $(1,j)$, $j=\overline{1,n}$ разделим на $\Delta x_j \neq 0$, $j=\overline{1,n}$, уравнение с индексом $(1,0)$ - на x_0. Уравнения с индексами $(2,j)$, $j=\overline{1,n}$ разделим на $\Delta\tilde{y}_j \neq 0$, $j=\overline{1,n}$, уравнение с индексом $(2,0)$ - на $\tilde{y}_0$. И затем из полученных уравнений с индексами (k,j), $k=\overline{1,2}$, $j=\overline{0,n}$ вычтем уравнения с индексами $(k,j+1)$, $k=\overline{1,2}$, $j=\overline{0,n-1}$ соответственно (случай, когда $x(\tau)\equiv const$ или $\tilde{y}(\tau)\equiv const$ на некотором отрезке $[\tau',\tau'']\subseteq[0,1]$, будет рассмотрен ниже). В результате этих преобразований система (10) примет вид:

$$cov''(\bar{w},\bar{w})\bar{\beta} = cov''(w(u,v),\bar{w}), \tag{11}$$

где $cov''(\bar{w},\bar{w}) = \begin{pmatrix} cov''(w,w) & cov''(w,\tilde{w}) \\ cov''(\tilde{w},w) & cov''(\tilde{w},\tilde{w}) \end{pmatrix}$,

$$cov''(w,w) = \begin{pmatrix} y_0 & A_0 & A_0 & \dots & A_0 \\ 0 & \varphi_1\Delta x_1^{-1} & A_1 & \dots & A_1 \\ 0 & 0 & \varphi_2\Delta x_2^{-1} & \dots & A_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \varphi_n\Delta x_n^{-1} \end{pmatrix},$$

$$cov''(\tilde{w},\tilde{w}) = \begin{pmatrix} \tilde{x}_0 & \tilde{A}_0 & \tilde{A}_0 & \dots & \tilde{A}_0 \\ 0 & \tilde{\varphi}_1\Delta\tilde{y}_1^{-1} & \tilde{A}_1 & \dots & \tilde{A}_1 \\ 0 & 0 & \tilde{\varphi}_2\Delta y_2^{-1} & \dots & \tilde{A}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \tilde{\varphi}_n\Delta\tilde{y}_n^{-1} \end{pmatrix},$$

$$cov''(w,\tilde{w}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{y}_0 & \tilde{y}_1 & \tilde{y}_2 & \dots & \tilde{y}_n \end{pmatrix},$$

$$cov''(\tilde{w}, w) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix},$$

$$cov''(w(u,v), w_j) = \begin{cases} A_j, \ j = \overline{0, p-1}, \\ \varphi_p \Delta x_p^{-1} - v, j = p, \\ v, \ j = q, \\ 0, j = \overline{p+1, n} \ j \neq q; \end{cases}$$

$$cov''(w(u,v), \tilde{w}_j) = \begin{cases} 0, j = \overline{0, n-1}, \\ u, j = n; \end{cases}$$

где $A_0 = y_0 - \varphi_1 \Delta x_1^{-1}$, $\tilde{A}_0 = \tilde{x}_0 - \tilde{\varphi}_1 \Delta \tilde{y}_1^{-1}$,

$$A_j = \varphi_j \Delta x_j^{-1} - \varphi_{j+1} \Delta x_{j+1}^{-1}, \quad \tilde{A}_j = \tilde{\varphi}_j \Delta \tilde{y}_j^{-1} - \tilde{\varphi}_{j+1} \Delta \tilde{y}_{j+1}^{-1}, \quad j = \overline{1, n-1}.$$

Учитывая условие C_3 и предположение, что $x(\tau) \not\equiv const$ или $\tilde{y}(\tau) \not\equiv const$ на отрезке $[0,1]$, для коэффициентов β_j получим следующие равенства:

$$\beta_0 = \left(\frac{1}{y_0} - \frac{\Delta x_1}{\varphi_1} \right) \frac{\varphi_n}{\Delta x_n} \beta_n, \ \beta_j = S_j \frac{\varphi_n}{\Delta x_n} \beta_n, \ j = \overline{1, p-1}, \ j = \overline{q+1, n-1}, \quad (12)$$

$$\beta_p = 1 - \frac{v \Delta x_{p+1}}{\varphi_{p+1}} + S_p \frac{\varphi_n}{\Delta x_n} \beta_n, \quad \beta_j = S_j \left(v + \frac{\varphi_n}{\Delta x_n} \beta_n \right), \ j = \overline{p+1, q-1}, \quad (13)$$

$$\beta_q = \frac{v \Delta x_q}{\varphi_q} + S_q \frac{\varphi_n}{\Delta x_n} \beta_n, \quad \tilde{\beta}_0 = \left(\frac{1}{\tilde{x}_0} - \frac{\Delta \tilde{y}_1}{\tilde{\varphi}_1} \right) \frac{\tilde{\varphi}_n}{\Delta \tilde{y}_n} \tilde{\beta}_n, \quad (14)$$

$$\tilde{\beta}_j = \tilde{S}_j \frac{\tilde{\varphi}_n}{\Delta \tilde{y}_n} \tilde{\beta}_n, \ j = \overline{1, n-1}, \quad (15)$$

где $S_j = \frac{\Delta x_j}{\varphi_j} - \frac{\Delta x_{j+1}}{\varphi_{j+1}}$, $\tilde{S}_j = \frac{\Delta \tilde{y}_j}{\tilde{\varphi}_j} - \frac{\Delta \tilde{y}_{j+1}}{\tilde{\varphi}_{j+1}}$, $j = \overline{1, n-1}$.

Подставляя полученные равенства в уравнения системы (11) с индексами (k, n), $k = 1, 2$ получим единственное решение (в силу условия C_3) для величин $\frac{\varphi_n}{\Delta x_n} \beta_n$ и $\frac{\tilde{\varphi}_n}{\Delta \tilde{y}_n} \tilde{\beta}_n$:

$$\begin{cases} \frac{\varphi_n}{\Delta x_n} \beta_n = -\frac{(u - x_p - vC')\tilde{B}'}{1 - B'\tilde{B}'}; \\ \frac{\tilde{\varphi}_n}{\Delta \tilde{y}_n} \tilde{\beta}_n = \frac{u - x_p - vC'}{1 - B'\tilde{B}'}. \end{cases} \quad (16)$$

где $\tilde{B}' = \frac{\tilde{y}_0}{\tilde{x}_0} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta \tilde{y}_j^2}{\tilde{\varphi}_j}$, $B' = \frac{x_0}{y_0} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta x_j^2}{\varphi_j}$, $C' = \sum_{j=p+1}^{q} \frac{\Delta x_j^2}{\varphi_j}$.

Таким образом,

$$\bar{m}_n(u,v) = \sum_{j=0}^{n} \beta_j w_j + \sum_{j=0}^{n} \tilde{\beta}_j \tilde{w}_j, \quad (17)$$

где коэффициенты β_j, $\tilde{\beta}_j$, $j = \overline{0, n}$ определяются равенствами (12) - (15).

Рассмотрим первую сумму в равенстве (17).

$$\sum_{j=0}^{n}\beta_j w_j=\frac{\varphi_n}{\Delta x_n}\beta_n\left(\frac{w_0}{y_0}-\frac{\Delta x_1}{\varphi_1}w_0+\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{\Delta x_j}{\varphi_j}-\frac{\Delta x_{j+1}}{\varphi_{j+1}}\right)w_j+\frac{\Delta x_n}{\varphi_n}w_n\right)+$$

$$+1-\frac{v\Delta x_{p+1}}{\varphi_{p+1}}w_p+\sum_{j=p+1}^{q-1}\left(\frac{\Delta x_j}{\varphi_j}-\frac{\Delta x_{j+1}}{\varphi_{j+1}}\right)w_j+\frac{v\Delta x_q}{\varphi_q}w_q=$$

$$=-\frac{(u-x_p-vC')\tilde{B}'}{1-B'\tilde{B}'}\left(\frac{w_0}{y_0}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\Delta x_j}{\varphi_j}\Delta w_j\right)+w_p+v\sum_{j=p+1}^{q}\frac{\Delta x_j}{\varphi_j}\Delta w_j. \qquad (18)$$

Делая аналогичные преобразования со второй суммой в равенстве (17) получим:

$$\sum_{j=0}^{n}\tilde{\beta}_j\tilde{w}_j=\frac{u-x_p-vC'}{1-B'\tilde{B}'}\left(\frac{\tilde{w}_0}{\tilde{x}_0}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\Delta\tilde{y}_j}{\tilde{\varphi}_j}\Delta\tilde{w}_j\right). \qquad (19)$$

Далее, в силу условия C_1 для функций $x(\tau)$, $y(\tau)$, $\tilde{x}(\tau)$, $\tilde{y}(\tau)$ на отрезке [0,1] по теореме о среднем имеем:

$$\Delta x_j=\dot{x}(\xi_j)\Delta\tau_j,\quad \xi_j\in[\tau_{j-1},\tau_j],\quad \Delta y_j=\dot{y}(\eta_j)\Delta\tau_j,\quad \eta_j\in[\tau_{j-1},\tau_j],$$

$$\Delta\tilde{x}_j=\dot{\tilde{x}}(\sigma_j)\Delta\tau_j,\quad \sigma_j\in[\tau_{j-1},\tau_j],\quad \Delta y_j=\dot{\tilde{y}}(\zeta_j)\Delta\tau_j,\quad \zeta_j\in[\tau_{j-1},\tau_j],$$

$$\varphi_j=(x_j\dot{y}(\eta_j)+y_{j-1}\dot{x}(\xi_j))\Delta\tau_j=\varphi'_j\Delta\tau_j,\ \tilde{\varphi}_j=(\tilde{x}_j\dot{\tilde{y}}(\zeta_j)+\tilde{y}_{j-1}\dot{\tilde{x}}(\sigma_j))\Delta\tau_j=\tilde{\varphi}'{}_j\Delta\tau_j,$$

$$\tilde{B}'=\frac{\tilde{y}_0}{\tilde{x}_0}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\dot{\tilde{y}}^2(\zeta_j)\Delta\tau_j}{\tilde{\varphi}'_j},\quad B'=\frac{x_0}{y_0}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\dot{x}^2(\xi_j)\Delta\tau_j}{\varphi'_j},\quad C'=\sum_{j=p+1}^{q}\frac{\dot{x}^2(\xi_j)\Delta\tau_j}{\varphi'_j}.$$

Подставляя последние равенства в (18) и (19) и сокращая каждое слагаемое на $\Delta\tau_j$, $j=\overline{1,n}$ получим:

$$\bar{m}_n(u,v)=-\frac{(u-x_p-vC')\tilde{B}'}{1-B'\tilde{B}'}\left(\frac{w_0}{y_0}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\dot{x}(\xi_j)}{\varphi'_j}\Delta w_j\right)+$$

$$+w_p+v\sum_{j=p+1}^{q}\frac{\dot{x}(\xi_j)}{\varphi'_j}\Delta w_j+\frac{u-x_p-vC'}{1-B'\tilde{B}'}\left(\frac{\tilde{w}_0}{\tilde{x}_0}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\dot{\tilde{y}}(\zeta_j)}{\tilde{\varphi}'_j}\Delta\tilde{w}_j\right).$$

Переходя в последнем равенстве к $l.i.m.$ при $n\to\infty$ получим выражение, стоящее в правой части (3). Далее, учитывая, что $k(n)$ переобозначали через n и учитывая определение разбиения отрезка [0,1] имеем: $F_{k(1)}\subseteq F_{k(2)}\subseteq \dots F_{k(n)}\subseteq \dots F$, где $F=\sigma\left\{\bigcup_{k(n)=1}^{\infty}F_{k(n)},\ n=1,2,\dots\right\}$. Следовательно, согласно теореме Леви из [5] получим: $\bar{m}_{k(n)}(u,v)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\bar{m}(u,v)$ (с вероятностью $P=1$).

Так как $M\left\{(w(u,v)-\bar{m}_{k(n)}(u,v))^2\,|F\right\} \le M\left\{(w(u,v)-\bar{m}_{k(1)}(u,v))^2\,|F\right\}$, $n=1,2...$, то следовательно $l.i.m.\,\bar{m}_{k(n)}(u,v)=\bar{m}(u,v)$, что и доказывает равенство (3). Равенство (4) доказывается аналогично.

Таким образом, утверждение теоремы 1 доказано в случае, когда не существует отрезка $[\tau',\tau''] \subseteq [0,1]$ на котором $x(\tau) \equiv const$ или $\tilde{y}(\tau) \equiv const$ и уравнение $x(\tau)=u$ имеет единственное решение. Если $x(\tau) \equiv const$ или $\tilde{y}(\tau) \equiv const$ на отрезке $[\tau',\tau''] \subseteq [0,1]$, то не сложно показать, что формулы (3) и (4) остаются верными в том же виде. Если точка $(u,v) \in D_1' \bigcup D_1'' \bigcup D_1'''$ то изменятся только координаты вектора $cov(w(u,v),w)$. Учитывая это и повторяя рассуждения, сделанные в первом случае утверждение теоремы 1 докажем полностью. Для доказательства теорем 2 – 4 необходимо повторить все этапы доказательства теоремы 1, учитывая, что изменятся только координаты вектора $cov(w(u,v),\bar{w})$.

Выводы. Получены явные зависимости (3) - (8) для величин $\bar{m}_\gamma(u,v)$ и $d_\gamma(u,v)$ в случае, когда множество γ имеет вид участков двух монотонно неубывающих кривых γ_1 и γ_2 для различных вариантов взаимного расположения точки восстановления (u,v) относительно кривой наблюдений γ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Земляк Т.В. О восстановлении винеровского поля на плоскости по его значениям на замкнутых кривых // Укр. мат. журнал. - К. - 1999. - т. 51. - № 6. - С. 744 - 752.

2. Земляк Т.В. Восстановление винеровского поля на плоскости по его значениям на участках двух монотонно невозрастающих кривых // Вісник Харківського національного університету. - Харків. - 2000. - № 475. - С. 378-387.

3. Нескородева Т.В. Математическое обеспечение автоматизированной системы принятия решений в аудите // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. - Харків. - 2006. № 4 (16). - С. 71 - 75.

4. Криводубский О.А. Математическое обеспечение для интеллектуальной системы принятия решений в аудите / О.А. Криводубский, Т.В. Нескородева // Штучний інтелект. - Донецьк.- 2007. - № 1. - С. 159 - 164.

5. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов. - М.: Наука, 1974. - 696 с.

Статья получена: 07.08.2009 ; окончательный вариант: 18.03.2010; принята: 20.03.2010.