Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.5 № 922, 2010, с.56–64

Об эквивалентности K-функционалов и аппроксимационных методов, порожденных обобщенными ядрами Бохнера-Рисса

В.А. Герасименко, Ю.С. Коломойцев

Сумской национальный аграрный университет, Украина
Институт прикладной математики и механики НАН Украины

В работе изучаются средние и семейства операторов, порожденные обобщенными средними Бохнера-Рисса. Доказано, что при условии сходимости средних или семейства операторов, порожденных обобщенными ядрами Бохнера-Рисса, скорость приближения функций этими методами будет эквивалентна K-функционалам или их аналогам в случае $0 < p < 1$.

Герасименко В.О., Коломойцев Ю.С., **Про еквівалентність K-функціоналів та апроксимаційних методів, які породжені узагальненими ядрами Бохнера-Риса.** У роботі вивчаються середні та сімейства операторів, які породжені узагальненими ядрами Бохнера-Риса. Доведено, що при умові збіжності середніх або сімейств операторів, які породжені узагальненими ядрами Бохнера-Риса, швидкість наближення функцій такими методами буде еквівалентна K-функціоналам або їх аналогам у випадку $0 < p < 1$.

V.A. Gerasimenko, Iu.S. Kolomoitsev, **On equivalence of K-functionals and approximation methods generated by generalized Bochner-Riesz kernels.** In the paper the means and families of operators generated by generalized Bochner-Riesz kernels are studied. It is proved that under condition of convergence of means or families of operators generated by generalized Bochner-Riesz kernels the rate of approximation of functions by these methods is equivalent to K-functional or their realization in the case $0 < p < 1$.

2000 Mathematics Subject Classification 42A10, 42A15.

1. Введение

Рассмотрим семейство операторов

$$S_{n,\lambda}^{(r,\alpha)}(f;x) = (2n+1)^{-d} \sum_{k=0}^{2n} f(t_n^k + \lambda) K_n^{(r,\alpha)}(x - t_n^k - \lambda), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

где

$$K_n^{(r,\alpha)}(h) = \sum_{|k| \le n} \left(1 - \frac{|k|^{2r}}{n^{2r}}\right)^{\alpha} \cdot e^{ikh} \tag{2}$$

— обобщенное ядро Бохнера-Рисса.

В формулах (1) и (2) величины x, k и λ являются d-размерными векторами, $|k| = (k_1^2 + \cdots + k_d^2)^{1/2}$, $kh = k_1 h_1 + \cdots + k_d h_d$ и

$$t_n^k = \frac{2\pi k}{2n+1}, \quad k \in \mathbb{Z}^d; \quad \sum_{k=0}^{2n} = \sum_{k_1=0}^{2n} \cdots \sum_{k_d=0}^{2n}.$$

Мы будем также рассматривать обобщенные средние Бохнера-Рисса

$$S_n^{(r,\alpha)}(f;x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} f(x+h) K_n^{(r,\alpha)}(h) dh, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Здесь и далее $\mathbb{T}^d = [0, 2\pi)^d$ обозначает d-мерный тор. При $r = 1$ средние (3) называют средними Бохнера-Рисса. Средние Бохнера-Рисса являются классическим методом тригонометрической аппроксимации, они интенсивно изучались многими математиками (см., напр., [1]). Изучению обобщенных средних Бохнера-Рисса при $r \in \mathbb{N}$ также посвящено целый ряд работ (см., напр., [2]-[5]). В частности, в [2]-[4] показано, что скорость приближения функций обобщенными средними Бохнера-Рисса имеет более высокий порядок в отличие от приближения классическими средними Бохнера-Рисса.

Отметим, что метод суммирования рядов Фурье (3) уже не применим для аппроксимации функций в пространствах L_p с $0 < p < 1$. В отличие от метода (3) приближение семейством операторов (1) имеет смысл для любых $0 < p \le \infty$ (см. [6]).

Далее нам понадобится понятие K-функционала:

$$K_{2r}(f,t)_p = \inf_g (\|f - g\|_p + t^{2r} \|\Delta^r g\|_p), \tag{4}$$

где Δ — оператор Лапласа.

Отметим, что при $0 < p < 1$ K-функционал, определенный по формуле (4), тождественно равен 0 (см. [7]). Однако, как было показано в работе [7], в этом случае K-функционал можно заменить следующим объектом

$$\widetilde{K}_{2r}(f,\delta)_p = \inf_{t \in \mathcal{T}_{1/\delta}} \{\|f - t\|_p + \delta^{2r} \|\Delta^r t\|_p\}, \tag{5}$$

где

$$\mathcal{T}_\sigma = \left\{ t(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_k e^{ikx} \ : \ c_{-k} = \overline{c}_k, \ |k| = (k_1^2 + \dots + k_d^2)^{\frac12} \le \sigma \right\}.$$

Известно (см. [8]), что при $p \in [1,\infty]$ и $r = 1$

$$K_{2r}(f,t)_p \asymp \widetilde{K}_{2r}(f,t)_p, \quad f \in L_p, \quad t > 0. \tag{6}$$

где $\asymp$ — двустороннее неравенство с положительными константами, зависящими только от p и r.

В настоящей статье мы покажем, что соотношение (6) справедливо также при любом $r \ge 2$ (см. доказательство теоремы 4).

В работе [2] была доказана следующая теорема:

Теорема A. *Пусть* $1 \le p \le \infty$, $r \in \mathbb{N}$ *и* $\alpha > \frac{d-1}{2}$. *Тогда*

$$\|f - S_n^{(r,\alpha)}\|_p \asymp K_{2r}(f;1/n)_p, \quad f \in L_p, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Следующее усиление теоремы A для средних Бохнера-Рисса ($r = 1$) было получено в работе [8]:

Теорема B. *Пусть* $1 \le p \le \infty$ *и* $\alpha > 0$. *Если последовательность операторов* $\{S_n^{(1,\alpha)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *сходится в* L_p, *то*

$$\|f - S_n^{(1,\alpha)}(f)\|_p \asymp K_2(f,1/n)_p, \quad f \in L_p, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для семейства операторов (1) справедлива аналогичная теорема (см. [8]):

Теорема C. *Пусть* $0 < p \le \infty$ *и* $\alpha > 0$. *Если семейство операторов* $\{S_{n;\lambda}^{(1,\alpha)}\}_{n\in\mathbb{N};\,\lambda\in\mathbb{R}^d}$ *сходится в* L_p, *то*

$$\int_{\mathbb{T}^d} \|f - S_{n;\lambda}^{(1,\alpha)}(f)\|_p^p \asymp \widetilde{K}_2(f,1/n)_p^p, \quad f \in L_p, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В настоящей статье, используя методы работы [8], мы обобщим теоремы B и C на случай средних и семейств операторов, порожденных обобщенными ядрами Бохнера-Рисса.

2. Обозначения и вспомогательные результаты

Обозначим через $\|\cdot\|_p$ или $\|\cdot\|_{p;\,x}$ p-норму (квазинорму, если $0 < p < 1$) относительно x. p-(квази)норма относительно параметра λ обозначается символом $\|\cdot\|_{p;\,\lambda}$. Далее, $\|\cdot\|_{\overline{p}} := \|\|\cdot\|_{p;\,x}\|_{p;\,\lambda}$.

Норму линейного и ограниченного оператора $\mathcal{L}_n$, отображающего L_p, $1 \le p \le \infty$, в $\mathcal{T}_n$, обозначим через

$$\|\mathcal{L}_n\|_{(p)} = \sup_{\|f\|_p \le 1} \|\mathcal{L}_n(f)\|_p.$$

Пусть $\{\mathcal{L}_{n;\lambda}\}_{n\in\mathbb{N},\lambda\in\mathbb{T}^d}$ — семейство операторов, отображающих $L_p(\mathbb{T}^d)$ с $0 < p \le \infty$ в пространство полиномов $\mathcal{T}_n$, такое, что функция $\mathcal{L}_{n;\lambda}(f;x)$ двух переменных x и λ принадлежит пространству $L_p(\mathbb{T}^{2d})$ для каждой функции $f \in L_p$. Определим норму (усредненную) такого семейства следующим образом

$$\|\{\mathcal{L}_{n;\lambda}\}\|_{(p)} = (2\pi)^{-d/p} \sup_{\|f\|_p \le 1} \|\mathcal{L}_{n;\lambda}(f;x)\|_{\overline{p}}.$$

Последовательность линейных операторов $\{\mathcal{L}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, отображающих L_p, $1 \le p \le \infty$, в пространство $\mathcal{T}_n$, называется сходящейся в L_p, если

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \mathcal{L}_n(f)\|_p = 0$$

для всех $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$.

Аналогично, семейство линейных операторов $\{\mathcal{L}_{n;\,\lambda}\}_{n\in\mathbb{N},\,\lambda\in\mathbb{T}^d}$, отображающее L_p, $0 < p \le \infty$, в пространство $\mathcal{T}_n$, называется сходящимся в L_p, если

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \mathcal{L}_{n;\,\lambda}(f)\|_{\overline{p}} = 0$$

для всех $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$.

Множество тех значений (p, α, r), для которых средние $S_n^{(r,\alpha)}$ сходятся в $L_p(\mathbb{T}^d)$, будем обозначать через $\Omega(d)$. Множество тех значений (p, α, r), для которых сходятся семейства $\{S_{n;\lambda}^{(r,\alpha)}\}$, обозначим через $\Lambda(d)$.

Буквой C будем обозначать положительные константы, зависящие от указанных параметров. Константы C могут быть различными даже в одной строке.

Символ $\asymp$ будет обозначать двустороннее неравенство с положительными константами, зависящими только от p, r и, быть может, от α.

Следующие две теоремы вытекают из теорем 10 и 11 работы [8].

Теорема 1. *Пусть $r \in \mathbb{N}$. Средние $S_n^{(r,\alpha)}$ сходятся в L_p, $1 \le p \le \infty$, тогда и только тогда, когда последовательность их норм $\{\|S_n^{(r,\alpha)}\|_{(p)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ограничена.*

Теорема 2. *Пусть $r \in \mathbb{N}$. Семейство $\{S_{n;\lambda}^{(r,\alpha)}\}$ сходится в L_p, $0 < p \le \infty$, тогда и только тогда, когда последовательность $\{\|S_{n;\lambda}^{(r,\alpha)}\|_{(p)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ограничена.*

Прежде чем сформулировать следующую теорему приведем несколько вспомогательных утверждений, касающихся неравенств для тригонометрических полиномов.

Пусть g — вещественная или комплекснозначная функция, определенная на $\mathbb{R}^d$. Эта функция порождает операторы $\{A_\sigma(g)\}_{\sigma\ge 1}$, определяемые по следующей формуле

$$A_\sigma(g)t(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} g\left(\frac{k}{\sigma}\right)c_k e^{ikx},\quad t(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_k e^{ikx}\in\mathcal{T}.$$

Рассмотрим неравенство

$$\|A_\sigma(\mu)t\|_p\le C(d;p;\mu;\nu)\|A_\sigma(\nu)t\|_p,\quad t\in\mathcal{T}_\sigma,\ \sigma\ge 1. \tag{8}$$

Будем говорить, что (8) верно в L_p, если оно выполняется для всех полиномов $t\in\mathcal{T}_\sigma$ и $\sigma\ge 1$ с некоторой положительной константой, не зависящей от t и σ.

Предположим, что $\nu(\xi)\ne 0$ для $\xi\ne 0$ и определим следующую функцию

$$\mathcal{X}(\xi)=\frac{\mu(\xi)}{\nu(\xi)},\quad \xi\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}.$$

Будем также предполагать, что $\mathcal{X}$ каким-либо образом определена в точке $\xi=0$. Рассмотрим неравенство

$$\|A_\sigma(\mathcal{X})t\|_p\le C(d;p;\mu;\nu)\|t\|_p,\quad t\in\mathcal{T}_\sigma,\ \sigma\ge 1, \tag{9}$$

которое является ассоциированным с неравенством (8). Следующие две леммы доказаны в работе [8].

Лемма 1. *Пусть $\mu(0)=\nu(0)=0$. Если неравенство (9) верно, то неравенство (8) будет также верным независимо от значения $\mathcal{X}(0)$.*

Обозначим через $W_1^k(\mathbb{R}^d)$ пространство Соболева всех интегрируемых функций, чьи производные до k-го порядка включительно принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R}^d)$. Через $W_{1,0}^k(\mathbb{R}^d)$ будем обозначать множество функций из $W_1^k(\mathbb{R}^d)$, имеющих компактный носитель.

Лемма 2. *Пусть $0<p\le\infty$, $k=[d/q]+1$ $(q=\min(1,p))$. Если $\mathcal{X}\in W_{1,0}^k(\mathbb{R}^d)$, то неравенство (9) верно в пространстве L_p.*

Теорема 3. *Пусть $r\in\mathbb{N}$ и $(p,\alpha,r)\in\Omega(d)\cup\Lambda(d)$. Тогда*

$$\|T-S_n^{(r,\alpha)}(T)\|_p\asymp n^{-2r}\|\Delta^r T\|_p,\quad T\in\mathcal{T}_n,\quad n\in\mathbb{N}. \tag{10}$$

В неравенствах (10) оператор $S_n^{(r,\alpha)}$ может быть заменен на $S_{n;\lambda}^{(r,\alpha)}$ с любым $\lambda\in\mathbb{R}^d$ и константами не зависящими от n и T.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При доказательстве теоремы мы повторяем схему доказательства теоремы 13 статьи [8]. Докажем оценку сверху.

Нетрудно проверить, что для любого полинома $T\in\mathcal{T}_n$, $n\in\mathbb{N}$ и $\lambda\in\mathbb{R}^d$

$$S_n^{(r,\alpha)}(T;x)=S_{n;\lambda}^{(r,\alpha)}(T;x),\quad x\in\mathbb{T}^d. \tag{11}$$

Откуда получим, что в неравенстве (10) оператор $S_n^{(r,\alpha)}$ может быть заменен на $S_{n;\lambda}^{(r,\alpha)}$. Кроме того, при $p \ge 1$ справедливо неравенство

$$\|S_n^{(r,\alpha)}(T)\|_p \le c\|T\|_p, \quad T \in \mathcal{T}_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{12}$$

Покажем, что при $0 < p < 1$ неравенство (12) также выполняется. Действительно, из равенства (11) и условий теоремы получим, что для каждого $T \in \mathcal{T}_n$ и $n \in \mathbb{N}$

$$\|S_n^{(r,\alpha)}(T)\|_p = (2\pi)^{-d/p}\|S_{n;\lambda}^{(r,\alpha)}(T)\|_{\overline{p}} \le \|S_{n;\lambda}^{(r,\alpha)}\|_{(p)}\|T\|_p \le c\|T\|_p.$$

Далее, определим следующие функции:

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \in D_1; \\ 0, & \xi \notin D_2, \end{cases} \qquad \varphi_0(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \in D_{1/2}; \\ 0, & \xi \notin D_{3/4}, \end{cases}$$

$$\varphi_1(\xi) = \varphi(\xi) - \varphi_0(\xi),$$

где $D_R = \{\xi \in \mathbb{R}^d : |\xi| < R\}$. Мы будем дополнительно предполагать, что φ и φ_0 являются бесконечно-дифференцируемыми на $\mathbb{R}^d$ и радиальными функциями. Положим также

$$\Psi_{r,\alpha}(\xi) = \begin{cases} |\xi|^{-2r}(1 - \psi_{r,\alpha}(\xi)), & \xi \ne 0; \\ \alpha, & \xi = 0, \end{cases} \qquad \mathcal{X}_{r,\alpha}(\xi) = \Psi_{r,\alpha}(\xi)\varphi(\xi),$$

где

$$\psi_{r,\alpha}(\xi) = (1 - |\xi|^{2r})_+^{\alpha}.$$

Ясно, что

$$\mathcal{X}_{r,\alpha}(\xi) = \Psi_{r,\alpha}(\xi)\varphi_0(\xi) + \Psi_{r,\alpha}(\xi)\varphi_1(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Поскольку функция $y^{-2r}(1-(1-y^{2r})_+^{\alpha})$ (продолженная по непрерывности в 0) является аналитической в интервале $(-1,1)$ мы получим, что функция $\Psi_{r,\alpha}\varphi_0$ является бесконечно дифференцируемой в $\mathbb{R}^d$. Следовательно, функция $|\xi|^{-2r}\varphi_1(\xi)$ также обладает этим свойством.

Используя лемму 2 и (12), находим

$$\begin{aligned} &\|A_n(\mathcal{X}_{r,\alpha})T\|_p^q \le \\ &\quad \le \|A_n(\Psi_{r,\alpha}\varphi_0)T\|_p^q + \|A_n(\Psi_{r,\alpha}\varphi_1)T\|_p^q = \\ &\quad = \|A_n(\Psi_{r,\alpha}\varphi_0)T\|_p^q + \|A_n(|\cdot|^{-2r}\varphi_1(\cdot)) \circ A_n(1 - \psi_{r,\alpha}(\cdot))T\|_p^q \le \\ &\quad \le c(\|T\|_p^q + \|T - S_n^{(r,\alpha)}(T)\|_p^q) \le c\|T\|_p^q, \end{aligned} \tag{13}$$

где $T \in \mathcal{T}_n$ и $q = \min(1,p)$. Возьмем в лемме 1 $\mu(\xi) = (1 - \psi_{r,\alpha}(\xi))\varphi(\xi)$ и $\nu(\xi) = |\xi|^{2r}$. Тогда из неравенства (13) получим, что

$$\|T - S_n^{(r,\alpha)}(T)\|_p \le Cn^{-2r}\|\Delta^r T\|, \quad T \in \mathcal{T}_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, оценка сверху в (10) доказана.

Оценку снизу можно аналогично получить из доказательства теоремы 13 статьи [8]. ■

3. Основные результаты

В настоящем разделе мы обобщим теоремы B и C на случай средних и семейств операторов, порожденных обобщенными ядрами Бохнера-Рисса.

Теорема 4. *Пусть* $1 \le p \le \infty$, $\alpha > 0$ *и* $r \in \mathbb{N}$. *Если последовательность операторов* $\{S_n^{(r,\alpha)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *сходится в* L_p, *то*

$$\|f - S_n^{(r,\alpha)}(f)\|_p \asymp K_{2r}(f, 1/n)_p, \quad f \in L_p, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Докажем сначала, что при $(p, \alpha, r) \in \Omega(d)$ справедливо соотношение

$$\|f - S_n^{(r,\alpha)}(f)\|_p \asymp \widetilde{K}_{2r}(f, 1/n)_p, \quad f \in L_p, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{14}$$

Из теоремы 1 следует, что при $(p, \alpha, r) \in \Omega(d)$ последовательность $\{S_n^{(r,\alpha)}\}$ ограничена в L_p. Используя теорему 3 для функции $f \in L_p$ и произвольного полинома $T \in \mathcal{T}_n$, находим

$$\begin{aligned}\|f - S_n^{(r,\alpha)}\|_p &\le \|f - T\|_p + \|f - S_n^{(r,\alpha)}(f)\|_p + \|S_n^{(r,\alpha)}(f - T)\|_p \le \\ &\le (1 + \|S_n^{(r,\alpha)}\|_{(p)})\|f - T\|_p + Cn^{-2r}\|\Delta^r T\|_p \le \\ &\le C(\|f - T\|_p + n^{-2r}\|\Delta^r T\|_p).\end{aligned}$$

Откуда следует оценка сверху в (14).

Используя оценку снизу в соотношении (10), находим

$$\begin{aligned}\widetilde{K}_{2r}(f, 1/n)_p &\le \|f - S_n^{(r,\alpha)}(f)\|_p + n^{-2r}\|\Delta^r S_n^{(r,\alpha)}(f)\|_p \le \\ &\le \|f - S_n^{(r,\alpha)}(f)\|_p + C\|S_n^{(r,\alpha)}(f - S_n^{(r,\alpha)}(f))\|_p \le \\ &\le C\|f - S_n^{(r,\alpha)}(f)\|_p.\end{aligned} \tag{15}$$

Таким образом, соотношение (14) доказано.

Далее, используя соотношение (14) и теорему A, получим, что при $1 \le p \le \infty$ и всех $r \in \mathbb{N}$

$$K_{2r}(f, t)_p \asymp \widetilde{K}_{2r}(f, t)_p.$$

Из последнего соотношения и эквивалентности (14) вытекает справедливость доказываемой теоремы.

■

Теорема 5. *Пусть* $0 < p \le \infty$, $\alpha > 0$ *и* $r \in \mathbb{N}$. *Если семейство операторов* $\{S_{n;\lambda}^{(r,\alpha)}\}_{n\in\mathbb{N};\,\lambda\in\mathbb{R}^d}$ *сходится в* L_p, *то*

$$\|f - S_{n;\lambda}^{(r,\alpha)}(f)\|_{\overline{p}} \asymp \widetilde{K}_{2r}(f, 1/n)_p, \quad f \in L_p, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $1 \le p \le \infty$ и $(p, \alpha, r) \in \Omega(d) \cup \Lambda(d)$. Тогда справедлива эквивалентность

$$\|f - S_{n;\lambda}^{(r,\alpha)}(f)\|_{\overline{p}} \asymp \|f - S_n^{(r,\alpha)}(f)\|_p. \tag{17}$$

Соотношение (17) при $r = 1$ доказано в работе [8]. При $r \ge 2$ доказательство аналогично случаю $r = 1$. Таким образом, из теоремы 4 и соотношения (17) получим эквивалентность (16) при $p \ge 1$.

Пусть теперь $0 < p < 1$. Используя теорему 3, находим

$$\begin{aligned}\|f - S_{n;\lambda}^{(r,\alpha)}(f)\|_{\overline{p}}^p \le \|f - T\|_{\overline{p}}^p + \|T - S_{n;\lambda}^{(r,\alpha)}(T)\|_{\overline{p}}^p + \|S_{n;\lambda}^{(r,\alpha)}(f - T)\|_{\overline{p}}^p \le \\ \le (2\pi)^d \left(1 + \|\{S_{n;\lambda}^{(r,\alpha)}\}\|_{(p)}^p\right) \|f - T\|_p^p + Cn^{-2rp}\|\Delta^r T\|_p^p \le \\ \le C(\|f - T\|_p^p + n^{-2rp}\|\Delta^r T\|_p^p) \le \\ \le C(\|f - T\|_p + n^{-2r}\|\Delta^r T\|_p)^p\end{aligned}$$

для всех $f \in L_p$ и $T \in \mathcal{T}_n$, $n \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$\|f - S_{n;\lambda}^{(r,\alpha)}(f)\|_{\overline{p}} \le C\widetilde{K}_{2r}(f; 1/n)_p, \quad f \in L_p,\ n \in \mathbb{N}. \tag{18}$$

Докажем теперь оценку снизу в соотношении (16). Заметим, что для всех $f \in L_p$ и $n \in \mathbb{N}$

$$\widetilde{K}_{2r}(f; 1/n)_p \le 2(2\pi)^{-d/p} \max\left\{\|f - S_{n;\lambda}^{(r,\alpha)}(f)\|_{\overline{p}}, n^{-2r}\|\Delta^r S_{n;\lambda}^{(r,\alpha)}(f)\|_{\overline{p}}\right\}. \tag{19}$$

Используя теорему 3 (нижнюю оценку в (10)), получим, что для всех $\beta, \gamma \in \mathbb{R}^d$

$$n^{-2r}\|\Delta^r S_{n;\lambda}^{(r,\alpha)}(f)\|_p \le C\|S_{n;\gamma}^{(r,\alpha)}(f) - S_{n;\beta}^{(r,\alpha)}(S_{n;\gamma}^{(r,\alpha)}(f))\|_p, \tag{20}$$

где константа C не зависит от β, γ и n. Кроме того, справедливо равенство

$$S_{n;\gamma}^{(r,\alpha)} - S_{n;\beta}^{(r,\alpha)} \circ S_{n;\gamma}^{(r,\alpha)} = (S_{n;\gamma}^{(r,\alpha)} - I) + (I - S_{n;\beta}^{(r,\alpha)}) + S_{n;\beta}^{(r,\alpha)} \circ (I - S_{n;\gamma}^{(r,\alpha)}), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{21}$$

где I — тождественный оператор.

Из (20) и (21) получим, что для $f \in L_p$ и всех $\beta, \gamma \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned}n^{-2rp}\|\Delta^r S_{n;\gamma}^{(r,\alpha)}(f)\|_p^p \le & C(\|f - S_{n;\gamma}^{(r,\alpha)}(f)\|_p^p + \|f - S_{n;\beta}^{(r,\alpha)}(f)\|_p^p + \\ & + \|S_{n;\beta}^{(r,\alpha)}(f - S_{n;\gamma}^{(r,\alpha)}(f))\|_p^p.\end{aligned} \tag{22}$$

Интегрируя неравенство (22) по $\mathbb{T}^d$ относительно переменной β, получим, что

$$\begin{aligned}n^{-2rp}\|\Delta^r S_{n;\gamma}^{(r,\alpha)}(f)\|_p^p \le & C((1 + \|\{S_{n;\lambda}^{(r,\alpha)}\}\|_{(p)}^p)\|f - S_{n;\gamma}^{(r,\alpha)}(f)\|_p^p + \\ & + (2\pi)^{-d/p}\|f - S_{n;\lambda}^{(r,\alpha)}(f)\|_{\overline{p}}^p).\end{aligned} \tag{23}$$

Далее, интегрируя обе части неравенства (23) относительно переменной γ по $\mathbb{T}^d$, находим

$$n^{-2rp}\|\Delta^r S_{n;\lambda}^{(r,\alpha)}(f)\|_{\overline{p}}^p \le C\|f - S_{n;\lambda}^{(r,\alpha)}(f)\|_{\overline{p}}^p, \quad f \in L_p, \ n \in \mathbb{N}. \tag{24}$$

Таким образом, из (19) и (24) получим, что

$$\widetilde{K}_{2r}(f, 1/n)_p \le C\|f - S_{n;\,\lambda}^{(r,\alpha)}(f)\|_{\overline{p}} \quad f \in L_p, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема доказана. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Мир, 1974.

2. Trigub R.M., Belinsky E.S. Fourier Analysis and Approximation of Functions. – Kluwer. 2004.

3. Тригуб Р.М. Абсолютная сходимость интегралов Фурье, суммируемость рядов Фурье и приближение полиномами функций на торе // Изв. АН СССР. Сер. матем., – 1980. – **44**, N6. – С. 1378-1409.

4. Тригуб Р.М. Мультипликаторы в пространстве Харди $H_p(D^m)$ при $p \in (0,1]$ и аппроксимативные свойства методов суммирования степнных рядов // Матем. сб. – 1997. – **188**, N4. – С. 145-160.

5. Wang J. Generalized Bochner-riesz means on spaces generated by smooth blocks // Comment. Math. Univ. Carolinae. – 2003. – **44**, N3. – P. 489-505.

6. Руновский К. В., О семействе линейных полиномиальных операторов в пространствах L_p, $0 < p < 1$ // Матем. сб. – 1993. – **184**, N2. – С. 145-160.

7. Ditzian Z., Hristov V., Ivanov K. Moduli of smoothness and K-functional in L_p, $0 < p < 1$ // Constr. Approx. – 1995. – **11**. – С. 67-83.

8. Runovski K., Schmeisser H.-J., On Approximation Methods Generated by Bochner-Riesz Kernels // J Fourier Anal Appl. – 2008. – **14**. – P. 16-38.

9. Burinska Z., Runovski K., Schmeisser H.-J., On the method of approximation by families of linear polynomials operators // J. Anal Appl. – 2000. – **19**. – P. 677-693.

Статья получена: 25.03.2010; окончательный вариант: 29.06.2010; принята: 29.06.2010.