Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.948 № 875, 2009, с.25–47

О векторных полиномиальных последовательностях

С.М. Загороднюк

Харьковский национальный университет имени В.Н.Каразина, пл. Свободы, 4, 61077, Харьков, Украина
Sergey.M.Zagorodnyuk@univer.kharkov.ua

В работе определяются и изучаются N-мерные (векторные) полиномиальные последовательности ($N \in \mathbb{N}$). Введено понятие оператора N-мерной полиномиальной последовательности и изучаются свойства этого оператора. Получено спектральное представление для векторной полиномиальной последовательности. Устанавливается изоморфизм А.Н. Колмогорова между пространством значений одномерной полиномиальной последовательности и пространством $L^2(F)$, где F - некоторая спектральная функция последовательности. Аналогичный результат при некоторых ограничениях справедлив и для векторных полиномиальных последовательностей.

Загороднюк С.М., **Про векторні поліноміальні послідовності**. У роботі визначаються та досліджуються N-мірні (векторні) поліноміальні послідовності ($N \in \mathbb{N}$). Введено поняття оператора N-мірної поліноміальної послідовності та вивчаються властивості цього оператору. Одержано спектральний розклад для векторної поліноміальної послідовності. Встановлюється ізоморфізм А.Н. Колмогорова між простором значень одномірної поліноміальної послідовності та простором $L^2(F)$, де F - деяка спектральна функція послідовності. Аналогічний результат за деяких обмежень справедливий і для векторних поліноміальних послідовностей.

S.M. Zagorodnyuk, **On vector polynomial sequences**.
In this work N-dimensional (vector) polynomial sequences are defined and studied ($N \in \mathbb{N}$). A notion of an operator of a N-dimensional polynomial sequence is introduced and properties of this operator are studied. A spectral representation for a vector polynomial sequence is obtained. A.N. Kolmogorov's isomorphism between the space of values of a one-dimensional polynomial sequence and a space $L^2(F)$ is established, where F is a spectral function of the sequence. Under some restrictions, an analogous result is true for vector polynomial sequences as well.
2000 Mathematics Subject Classification: 42C05, 33C45, 60G12.

1. Введение

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}_{n\in T}$ в некотором гильбертовом пространстве H, где T - некоторое счетное множество индексов. Функцию

$K_{n,m} := (x_n, x_m)$, называют корреляционной функцией последовательности $\{x_n\}_{n\in T}$ (здесь $(\cdot,\cdot)$ обозначает скалярное произведение в H). В том случае, когда множество T является множеством целых чисел и корреляционная функция зависит от разности аргументов, последовательность называют стационарной. В этом случае корреляционная функция и последовательность допускают спектральные представления:

$$K_{n,m} = \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d(F_\theta x_0, x_0), \qquad n, m \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

$$x_n = U^n x_0 = \int_0^{2\pi} e^{in\theta} dF_\theta x_0, \qquad n \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

где $\{F_\theta\}_{\theta\in[0,2\pi]}$ - ортогональное разложение единицы некоторого унитарного оператора U в H.

К. Карунен изучал последовательности вида

$$x_n = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(\lambda) dZ_\lambda,\ n \in \mathbb{Z}, \tag{3}$$

где φ_n - некоторые комплекснозначные функции на $\mathbb{R}$, Z - некоторая мера на $\mathbb{R}$, а интеграл понимался в том или ином смысле [1]. Он показал, что (3) эквивалентно спектральному представлению корреляционной функции следующего вида:

$$K_{n,m} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(\lambda)\overline{\varphi_m(\lambda)} dF_\lambda,\ n, m \in \mathbb{Z}, \tag{4}$$

где F - неотрицательная мера на $\mathbb{R}$.

Разложение вида (3) удобно тем, что случайный процесс представляется в виде интеграла по случайной мере (в частном случае, суммы), где подинтегральные функции (соответственно слагаемые) неслучайны. В практическом применении легко вычислить корреляционную функцию такой последовательности.

Нас будут интересовать последовательности, для которых функции φ_n в представлении (3) являются ортогональными многочленами. Именно, последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ называется полиномиальной, если она допускает представление

$$x_n = p_n(A)x_0 = \int_{\mathbb{R}} p_n(\lambda) dE_\lambda x_0, \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{5}$$

где A - некоторый самосопряженный оператор в H, $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ является непрерывным слева ортогональным разложением единицы оператора A, а $\{p_n(\lambda)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ - система ортогональных многочленов на вещественной оси.

Напомним, что набор вещественных многочленов $\{p_n(\lambda)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, $\deg p_n = n$ и p_n имеет положительный старший коэффициент, называется системой ортогональных многочленов на вещественной оси относительно $\sigma(x)$, если выполняются соотношения:

$$\int_{\mathbb{R}} p_n(\lambda)p_m(\lambda)d\sigma(\lambda) = 0, \qquad n,m \in \mathbb{Z}_+ : \ n \neq m, \tag{6}$$

где $\sigma(\lambda)$ - неубывающая функция ограниченной вариации на $\mathbb{R}$.

Полная предистория возникновения последовательностей вида (5) описана в статье [2], см. также ссылки в ней. В работе [3] мы получили для полиномиальных последовательностей разложение Вольда. Примеры полиномиальных последовательностей мы укажем ниже.

В данной работе мы введем понятие векторной (или многомерной) полиномиальной последовательности. Для таких последовательностей можно получить аналоги известных результатов Ю.А. Розанова о многомерных стационарных последовательностях [4],[5]. Вводится понятие спектральной матрицы-функции векторной полиномиальной последовательности. В отличие от случая стационарной последовательности, для полиномиальной последо-вательности спектральная функция не обязательно единственна. Вводится оператор векторной полиномиальной последовательности и изучаются его свойства. Устанавливается изоморфизм А.Н. Колмогорова между пространством значений одномерной полиномиальной последовательности и пространством $L^2(F)$, где F - некоторая спектральная функция последовательности. Аналогичный результат справедлив и для векторных полиномиальных последовательностей при некоторых ограничениях.

Обозначения. Как обычно, мы обозначаем $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ множества комплексных, вещественных, целых и натуральных чисел, соответственно, а также $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Множество комплексных многочленов будем обозначать $\mathbb{P}$. Пространство n-мерных комплексных векторов $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, будет обозначаться $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Если $a \in \mathbb{C}^n$, то a^* обозначает комплексно сопряженный вектор.

Посредством $(\cdot,\cdot)_H$, $||\cdot||_H$ мы обозначаем скалярное произведение и норму в некотором гильбертовом пространстве H. Если это не приводит к недоразумению, индекс H мы не пишем. Посредством $\mathrm{Lin}\, M$ и $\mathrm{span}\, M$ обозначены линейная оболочка и замкнутая линейная оболочка элементов множества M в H, соответственно. $\overline{M}$ означает замыкание множества $M \subseteq H$ в метрике H. Если L - подпространство H, то P^H_L обозначает оператор ортогонального проектирования в H на подпространство L. Для линейного оператора A в H мы обозначаем $D(A)$ его область определения, и посредством A^* обозначается сопряженный оператор, если он существует. Посредством $\overline{A}$ обозначается замыкание оператора A, если оно существует. Если для A существует обратный оператор, то мы обозначаем его A^{-1}. Если A ограничен, то $\|A\|$ обозначает его норму. Посредством E_H обозначается единичный оператор в H, т.е. $E_H x = x$, $x \in H$. Встречающиеся в работе гильбертовы пространства предполагаются сепарабельными.

Пусть $M(x)$ является непрерывной слева неубывающей матрицей-функцией

$M(x) = (m_{k,l}(x))_{k,l=1}^N$ на $\mathbb{R}$, $M(-\infty) = 0$, и $\tau_M(x) := \sum_{k=1}^N m_{k,k}(x)$; $\Psi(x) = (dm_{k,l}/d\tau_M)_{k,l=1}^N$. Посредством $L^2(M)$ мы обозначаем множество (классов эквивалентности) векторных функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^N$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_N)$, таких, что (см., например, [6])

$$\|f\|^2_{L^2(M)} := \int_{\mathbb{R}} f(x)\Psi(x)f^*(x)d\tau_M(x) < \infty.$$

Пространство $L^2(M)$ является гильбертовым пространством относительно скалярного произведения

$$(f,g)_{L^2(M)} := \int_{\mathbb{R}} f(x)\Psi(x)g^*(x)d\tau_M(x), \qquad f,g \in L^2(M).$$

Под финитными функциями мы будем понимать функции, принимающие отличные от нулевого вектора значения лишь на ограниченном подмножестве $\mathbb{R}$.

2. Спектральная функция последовательности. Изоморфизм А.Н. Колмогорова.

Рассмотрим полиномиальную последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ в некотором гильбертовом пространстве H, допускающую представление (5) с ортогональными многочленами (6). Введем следующие обозначения:

$$H_x = \mathrm{span}\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}, \quad L_x = \mathrm{Lin}\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}. \tag{7}$$

Подпространство H_x будем называть *пространством значений полиномиальной последовательности* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$. Ортогональные многочлены $\{p_n(\lambda)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ удовлетворяют следующему разностному соотношению (см. [7]):

$$\frac{1}{a_n}\left(c_{n-1}p_{n-1}(\lambda) - b_n p_n(\lambda) + c_n p_{n+1}(\lambda)\right) = \lambda p_n(\lambda), \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{8}$$

где $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$, $c_n > 0$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$, являются некоторыми числовыми последовательностями, а $c_{-1} = 0$, $p_{-1} = 0$.
В частности, для многочленов Чебышева 1-го рода $T_n(\lambda) = \cos(n \arccos \lambda)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\lambda \in [-1, 1]$, выполнено соотношение (8) с $a_n = 1$, $b_n = 0$, $c_n = \frac{1}{2}$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$.

Если записать соотношение (8) с операторным аргументом, применить к вектору x_0 и учесть соотношение (5), мы придём к следующему равенству:

$$Ax_n = \frac{1}{a_n}\left(c_{n-1}x_{n-1} - b_n x_n + c_n x_{n+1}\right), \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{9}$$

где A - самосопряженный оператор из (5).

Заметим, что для одной и той же полиномиальной последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ существуют и другие самосопряженные операторы, для которых имеет место представление вида (5) (например, можно взять любое самосопряженное расширение A). Однако, в силу соотношения (9) все эти операторы совпадают на L_x. Оператор, который задан на L_x равенствами (9) будем обозначать A_x и называть *оператором полиномиальной последовательности* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$. Оператор последовательности является симметрическим оператором в пространстве значений последовательности и является частью всех самосопряженных операторов, для которых имеет место представление вида (5).
Из соотношения (9) следует, что

$$A_x L_x \subseteq L_x, \tag{10}$$

и значит определен оператор $p(A_x)$, где $p(x) \in \mathbb{P}$. Более того, при этом выполняется $p(A_x) = p(A)$, поскольку на L_x операторы A_x и A совпадают. В частности, отсюда следует, что

$$x_n = p_n(A_x)x_0, \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{11}$$

Пусть $\widetilde{A}$ является некоторым самосопряженным расширением A_x в гильбертовом пространстве $\widetilde{H} \supseteq H_x$. Тогда $p(A_x) = p(\widetilde{A})$, $p \in \mathbb{P}$, поскольку операторы A_x и $\widetilde{A}$ совпадают на L_x. Значит

$$x_n = p_n(A_x)x_0 = p_n(\widetilde{A})x_0, \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{12}$$

Следовательно, всевозможные самосопряженные расширения оператора последовательности A_x описывают все самосопряженные операторы для которых имеет место представление вида (5).

Определение 1 *Пусть A_x является оператором некоторой полиномиальной последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ в гильбертовом пространстве H. Пусть $\widetilde{A}$ является самосопряженным расширением A_x в гильбертовом пространстве $\widetilde{H} \supseteq H_x$. Функцию*

$$F(\lambda) = (P^{\widetilde{H}}_{H_x}\widetilde{E}_\lambda x_0, x_0)_H,$$

где $\{\widetilde{E}_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ является непрерывным слева ортогональным разложением единицы оператора $\widetilde{A}$, будем называть **спектральной функцией полиномиальной последовательности** $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$.

Из данного определения видно, что спектральная функция полиномиальной последовательности не обязана, вообще говоря, быть единственной. Множество спектральных функций полиномиальной последовательности порождается множеством спектральных функций симметрического оператора A_x (см. [8]). Заметим, что для корреляционной функции полиномиальной последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ выполнено соотношение

$$K_{n,m} = (p_n(\widetilde{A})x_0, p_m(\widetilde{A})x_0)_{\widetilde{H}} = \int_{\mathbb{R}} p_n(\lambda)p_m(\lambda)d(\widetilde{E}_\lambda x_0, x_0)_{\widetilde{H}} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} p_n(\lambda) p_m(\lambda) dF(\lambda). \qquad (13)$$

Ниже будет доказано, что дефектные числа оператора последовательности совпадают и значит он допускает самосопряженные расширения в H_x.

Теорема 1 *Пусть задана полиномиальная последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ в некотором гильбертовом пространстве H, и A_x является оператором последовательности. Пусть $\widehat{A}$ - некоторое самосопряженное расширение оператора A_x, действующее в пространстве значений последовательности H_x, и $F(x)$ - соответствующая ему спектральная функция последовательности. Для произвольного элемента x из H_x существует и единственна функция $\varphi_x \in L^2(F)$ такая, что*

$$x = \varphi_x(\widehat{A})x_0 = \int_{\mathbb{R}} \varphi_x(\lambda) d\widehat{E}_\lambda x_0, \qquad (14)$$

где $\{\widehat{E}_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ является непрерывным слева ортогональным разложением единицы оператора $\widehat{A}$.
Отображение $x \to \varphi_x$ является изометрическим отображением пространства значений последовательности H_x на всё пространство $L^2(F)$.

Данная теорема следует из более общей теоремы для векторных полиномиальных последовательностей с вещественной корреляционной функцией, которая будет доказана ниже. Ввиду важности одномерного случая мы привели здесь данную формулировку. Кроме того, в одномерном случае формула типа (14) имеет место для всех $x \in H_x$, чего уже нельзя сказать в многомерном случае.

Формулу (14) будем называть *спектральным представлением элементов пространства значений* полиномиальной последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$. Функцию φ_x в (14) назовём *спектральной характеристикой* элемента x из пространства значений последовательности.
В случае стационарной последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ в гильбертовом пространстве H, изоморфизм между пространством значений последовательности и пространством $L^2(F)$, где F - спектральная функция последовательности, был установлен А.Н. Колмогоровым, а затем распространен на случай векторных стационарных последовательностей Ю.А. Розановым.

Приведем некоторые примеры полиномиальных последовательностей.
Пример 1 *(Белый шум).* Рассмотрим вероятностное пространство $H = L_2(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ случайных величин $\xi(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$ с конечным вторым моментом и нулевым математическим ожиданием (здесь Ω есть пространство элементарных событий, $\mathfrak{A}$ есть σ-алгебра событий и P обозначает вероятность). Рассмотрим последовательность $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ ортонормированных случайных величин (белый шум). В этом случае корреляционная функция равна

$$K_{n,m} = \delta_{n,m}, \qquad n, m \in \mathbb{Z}_+. \qquad (15)$$

Последовательность в гильбертовом пространстве, удовлетворяющую соотношению (15), называют фундаментальной. В работе [3] было показано, что произвольная фундаментальная последовательность является полиномиальной с произвольным выбором системы ортогональных многочленов $\{p_n(\lambda)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ (см. представление (5)), если только для этой системы многочленов параметры a_n в рекуррентном соотношении (8) постоянны: $a_n = a > 0,\ n \in \mathbb{N}$. В частности, последнее условие всегда выполнено для ортонормированных многочленов. Таким образом, белый шум является полиномиальной последовательностью для произвольной системы ортонормированных многочленов в (5).

Пример 2 *(Вещественная часть некоторых почти периодических последовательностей).* Рассмотрим вероятностное пространство $H = L_2(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ (см. предыдущий пример). Пусть ζ_m, $m = 1, 2, ..., p$, - набор вещественных ортогональных случайных величин из H. Выберем произвольные точки λ_m, $m = 1, 2, ..., p$, на отрезке $[0, \pi]$. Рассмотрим последовательность

$$\xi_n = \sum_{m=1}^{p} \exp(in\lambda_m)\zeta_m, \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{16}$$

Последовательность вида (16) является почти периодической стационарной последовательностью. Примером почти периодического явления может служить вибрация самолета с несколькими моторами, работающими в асинхронном режиме [9].

Рассмотрим вещественную часть последовательности $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. В виду вещественности случайных величин ζ_m записываем

$$\operatorname{Re}\xi_n = \sum_{m=1}^{p} \cos(n\lambda_m)\zeta_m, \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{17}$$

Поскольку $\operatorname{Re}\xi_{-n} = \operatorname{Re}\xi_n$, достаточно рассматривать лишь неотрицательные значения индекса n. Положим

$$y_m = \cos\lambda_m, \qquad m = 1, 2, ..., p.$$

Тогда

$$x_n := \operatorname{Re}\xi_n = \sum_{m=1}^{p} \cos(n \arccos y_m)\zeta_m = \sum_{m=1}^{p} T_n(y_m)\zeta_m, \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{18}$$

где T_n - многочлены Чебышева первого рода.

В силу рекуррентного соотношения (8) для многочленов Чебышева первого рода легко проверяется, что корреляционная функция $K_{n,m} = (x_n, x_m)$ $(n, m \in \mathbb{Z}_+)$ удовлетворяет соотношению

$$K_{n-1,m} + K_{n+1,m} = K_{n,m-1} + K_{n,m+1}, \qquad n, m \in \mathbb{Z}_+, \tag{19}$$

где $K_{-1,m} = K_{n,-1} = 0$. Применяя теорему 1 из [2] заключаем, что последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ является полиномиальной в некотором гильбертовом пространстве $\widetilde{H} \supseteq H$. Ниже будет доказано, что индексы дефекта оператора полиномиальной последовательности всегда равны. Значит существует самосопряженное расширение этого оператора внутри H. Согласно сказанному перед определением 1 это означает, что последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ является полиномиальной в пространстве H.

Пример 3. Рассмотрим пространство $H = L^2([0,1])$ (классов эквивалентности) комплексных измеримых относительно меры Лебега на $[0,1]$ функций $f(t)$, $t \in [0,1]$, таких, что

$$\|f\|^2 = \int_0^1 |f(t)|^2 dt < \infty.$$

В пространстве H рассмотрим оператор второй производной

$$A = \frac{d^2}{dt^2}, \tag{20}$$

определенный на множестве D_A бесконечно дифференцируемых функций из H таких, что

$$f(0) = f'(0) = f(1) = f'(1) = 0.$$

Легко проверяется, что оператор A является симметрическим.

Рассмотрим произвольную систему ортогональных многочленов $\{p_n(\lambda)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, $\deg p_n = n$ и p_n имеет положительный старший коэффициент. Для данной системы выполняется соотношение (8) с некоторым набором коэффициентов a_n, b_n, c_n.

Выберем и зафиксируем произвольную функцию $x_0 = x_0(t) \in D_A$. Мы определим следующую последовательность в H:

$$x_{n+1} = \frac{1}{c_n}\left(a_n A x_n - c_{n-1}x_{n-1} + b_n x_n\right), \qquad n = 0,1,2,..., \tag{21}$$

где $x_{-1} = 0$, $c_{-1} = 0$. Пусть $\widetilde{A} \supseteq A$ является самосопряженным расширением оператора A в некотором гильбертовом пространстве $\widetilde{H} \supseteq H$. Используя равенство (8), из соотношения (21) по индукции заключаем, что

$$x_n = p_n(A)x_0 = p_n(\widetilde{A})x_0, \qquad n = 0,1,2,.... \tag{22}$$

Последнее равенство показывает, что последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ является полиномиальной в $\widetilde{H}$. Соотношение (21) эквивалентно соотношению

$$\frac{d^2}{dt^2}x_n(t) = \frac{1}{a_n}\left(c_{n-1}x_{n-1}(t) - b_n x_n(t) + c_n x_{n+1}(t)\right), \qquad n = 0,1,2,..., \tag{23}$$

где $x_{-1}(t) = 0$, $c_{-1} = 0$. Значит функции $x_n(t)$ являются решением части бесконечной цепочки, описывающей бесконечный одномерный гармонический

кристалл (см., например, [10]). Напомним, что цепочка Тода описывает бесконечный одномерный гармонический кристалл.
Наоборот, произвольное решение полубесконечной цепочки (23), как легко заключить по индукции, допускает представление (22) и значит является полиномиальной последовательностью.
Заметим также, что уравнения (23) при $n = 0, 1, 2, ..., N$; $N \in \mathbb{N}$, описывают колебания нагруженной струны, содержащей N точечных масс, см. [11].

3. Векторные полиномиальные последовательности. Спектральное представление. Спектральная матрица-функция.

Напомним следующее определение [3].

Определение 2 *Две полиномиальные последовательности* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *и* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *в гильбертовом пространстве* H*, отвечающие одной и той же системе многочленов* $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ *в представлении (5), называются* **полиномиально связанными***, если их взаимная корреляционная функция* $R_{n,m} := (x_n, u_m)_H$ *удовлетворяет соотношению*

$$\frac{1}{a_n}\left(c_{n-1}R_{n-1,m} - b_n R_{n,m} + c_n R_{n+1,m}\right) =$$

$$= \frac{1}{a_m}\left(c_{m-1}R_{n,m-1} - b_m R_{n,m} + c_m R_{n,m+1}\right), \qquad n, m \in \mathbb{Z}_+, \tag{24}$$

где $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}, \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *из рекуррентного соотношения (8),* $c_{-1} = 0$, $R_{-1,m} = R_{n,-1} = 0$ $(n, m \in \mathbb{Z}_+)$.

Определим векторные (многомерные) полиномиальные последовательности следующим образом.

Определение 3 *Набор из* N *полиномиальных последовательностей*

$$\{x_n^1\}_{n\in\mathbb{Z}_+}, \{x_n^2\}_{n\in\mathbb{Z}_+}, ..., \{x_n^N\}_{n\in\mathbb{Z}_+}, \tag{25}$$

в гильбертовом пространстве H $(N \in \mathbb{N})$*, полиномиально связанных между собой, будем называть* N*-мерной (многомерной, векторной) полиномиальной последовательностью и изображать в виде вектор-столбца*

$$\vec{x}_n = (x_n^k)_{k=1}^N.$$

Пусть задана некоторая N-мерная полиномиальная последовательность $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ в гильбертовом пространстве H. Введем следующие обозначения:

$$H_{\vec{x}} = \mathrm{span}\{x_n^r\}_{n\in\mathbb{Z}_+, 1\le r\le N}, \quad L_{\vec{x}} = \mathrm{Lin}\{x_n^r\}_{n\in\mathbb{Z}_+, 1\le r\le N}. \tag{26}$$

Подпространство $H_{\vec{x}}$ будем называть *пространством значений N-мерной полиномиальной последовательности* $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$. Определим следующие элементы:

$$x_n^{j\,\prime} = \frac{1}{a_n}\left(c_{n-1}x_{n-1}^j - b_n x_n^j + c_n x_{n+1}^j\right), \qquad n\in\mathbb{Z}_+,\ 1\le j\le N, \tag{27}$$

где $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}, \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ из соотношения (24) для полиномиально связанных последовательностей $\{x_n^j\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$. Условия полиномиальной связанности последовательностей $\{x_n^j\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, $1\le j\le N$, эквивалентны равенствам

$$(x_n^{j\,\prime}, x_m^k)_H = (x_n^j, x_m^{k\,\prime})_H, \qquad n,m\in\mathbb{Z}_+,\ 1\le j,k\le N. \tag{28}$$

Выберем произвольный элемент $x\in L_{\vec{x}}$. Пусть x допускает представления

$$x = \sum_{j=1}^N\sum_{k=0}^\infty \alpha_{j,k}x_k^j, \qquad x = \sum_{j=1}^N\sum_{k=0}^\infty \beta_{j,k}x_k^j, \qquad \alpha_{j,k},\beta_{j,k}\in\mathbb{C}, \tag{29}$$

где лишь конечное число коэффициентов $\alpha_{j,k},\beta_{j,k}$ отлично от нуля. Используя соотношение (28) мы можем записать

$$\left(\sum_{j=1}^N\sum_{k=0}^\infty \alpha_{j,k}x_k^{j\,\prime}, x_l^s\right)_H = \sum_{j=1}^N\sum_{k=0}^\infty \alpha_{j,k}(x_k^{j\,\prime}, x_l^s)_H = \sum_{j=1}^N\sum_{k=0}^\infty \alpha_{j,k}(x_k^j, x_l^{s\prime})_H =$$
$$= (x, x_l^{s\prime})_H, \qquad l\in\mathbb{Z}_+,\ 1\le s\le N.$$

Аналогичным образом получаем

$$\left(\sum_{j=1}^N\sum_{k=0}^\infty \beta_{j,k}x_k^{j\,\prime}, x_l^s\right)_H = (x, x_l^{s\prime})_H, \qquad l\in\mathbb{Z}_+,\ 1\le s\le N.$$

В силу того, что $\mathrm{span}\{x_n^r\}_{n\in\mathbb{Z}_+,1\le r\le N} = H_{\vec{x}}$, мы получаем

$$\sum_{j=1}^N\sum_{k=0}^\infty \alpha_{j,k}x_k^{j\,\prime} = \sum_{j=1}^N\sum_{k=0}^\infty \beta_{j,k}x_k^{j\,\prime}. \tag{30}$$

Суммы здесь и далее являются конечными. Определим оператор

$$A_{\vec{x}}x = \sum_{j=1}^N\sum_{k=0}^\infty \alpha_{j,k}x_k^{j\,\prime}, \qquad x\in L_{\vec{x}},\ x = \sum_{j=1}^N\sum_{k=0}^\infty \alpha_{j,k}x_k^j,\ \alpha_{j,k}\in\mathbb{C}. \tag{31}$$

В силу сказанного выше, это определение не зависит от выбора представления элемента x и является корректным. Оператор $A_{\vec{x}}$ является линейным оператором в пространстве значений последовательности $H_{\vec{x}}$ с плотной

областью определения $L_{\vec{x}}$. Оператор $A_{\vec{x}}$ будем называть *оператором N-мерной полиномиальной последовательности* $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$.
Выберем произвольные $x, y \in L_{\vec{x}}$,

$$x = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{j,k}x_k^j, \quad y = \sum_{s=1}^{N}\sum_{l=0}^{\infty}\gamma_{s,l}x_l^s, \qquad \alpha_{j,k}, \gamma_{s,l} \in \mathbb{C}.$$

Тогда

$$(A_{\vec{x}}x, y)_H = \sum_{j,s=1}^{N}\sum_{k,l=0}^{\infty}\alpha_{j,k}\overline{\gamma_{s,l}}(A_{\vec{x}}x_k^j, x_l^s)_H = \sum_{j,s=1}^{N}\sum_{k,l=0}^{\infty}\alpha_{j,k}\overline{\gamma_{s,l}}({x_k^j}', x_l^s)_H =$$

$$= \sum_{j,s=1}^{N}\sum_{k,l=0}^{\infty}\alpha_{j,k}\overline{\gamma_{s,l}}(x_k^j, {x_l^s}')_H = \sum_{j,s=1}^{N}\sum_{k,l=0}^{\infty}\alpha_{j,k}\overline{\gamma_{s,l}}(x_k^j, A_{\vec{x}}x_l^s)_H = (x, A_{\vec{x}}y)_H,$$

и значит оператор последовательности является симметрическим оператором.
Из определения оператора N-мерной полиномиальной последовательности следует, что

$$A_{\vec{x}}L_{\vec{x}} \subseteq L_{\vec{x}}. \tag{32}$$

Значит определены все степени оператора $A_{\vec{x}}$ на $L_{\vec{x}}$, и $p(A_{\vec{x}})$, $p \in \mathbb{P}$.
Пусть полиномиальная последовательность $\{x_n^r\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ имеет представление

$$x_n^r = p_n(A_r)x_0^r, \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{33}$$

где A_r - самосопряженный оператор в H, $1 \le r \le N$. Если записать соотношение (8) с операторным аргументом A_r, применить к вектору x_0^r и учесть соотношение (33), мы получим равенство:

$$A_r x_n^r = \frac{1}{a_n}\left(c_{n-1}x_{n-1}^r - b_n x_n^r + c_n x_{n+1}^r\right) = {x_n^r}' = A_{\vec{x}}x_n^r, \qquad n \in \mathbb{Z}_+,\ 1 \le r \le N. \tag{34}$$

Обозначим

$$L_{x^r} = \mathrm{Lin}\{x_n^r\}_{n\in\mathbb{Z}_+}, \qquad 1 \le r \le N. \tag{35}$$

Из (34) следует, что

$$A_{x^r}x = A_r x = A_{\vec{x}}x, \qquad x \in L_{x^r}, \qquad 1 \le r \le N, \tag{36}$$

где A_{x^r} является оператором полиномиальной последовательности $\{x_n^r\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$.
В частности, последнее соотношение показывает, что оператор N-мерной полиномиальной последовательности $A_{\vec{x}}$ является симметрическим расширением всех операторов A_{x^r} полиномиальных последовательностей $\{x_n^r\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ $(1 \le r \le N)$:

$$A_{\vec{x}} \supseteq A_{x^r}, \qquad 1 \le r \le N. \tag{37}$$

Из соотношения (36), с учетом (10), по индукции получаем, что

$$A_{x^r}^j x = A_{\vec{x}}^j x, \qquad x \in L_{x^r},\ j \in \mathbb{Z}_+,\ 1 \le r \le N. \tag{38}$$

Учитывая соотношение (11) получаем

$$x_n^r = p_n(A_{x^r})x_0^r = p_n(A_{\vec{x}})x_0^r, \qquad n \in \mathbb{Z}_+,\ 1 \le r \le N. \tag{39}$$

Пусть $\widetilde{A}$ есть некоторое самосопряженное расширение $A_{\vec{x}}$ в гильбертовом пространстве $\widetilde{H} \supseteq H_{\vec{x}}$. Из соотношения (32) по индукции заключаем, что

$$\widetilde{A}^n x = A_{\vec{x}}^n x, \qquad x \in L_{\vec{x}} = D(A_{\vec{x}}), \qquad n \in \mathbb{Z}_+,$$

и значит $p(\widetilde{A})x = p(A_{\vec{x}})x,\ x \in L_{\vec{x}},\ p \in \mathbb{P}$. Следовательно, справедливы равенства

$$x_n^r = p_n(A_{\vec{x}})x_0^r = p_n(\widetilde{A})x_0^r, \qquad n \in \mathbb{Z}_+,\ 1 \le r \le N. \tag{40}$$

Таким образом, для векторной полиномиальной последовательности всегда найдется самосопряженный оператор $\widetilde{A}$, реализующий *согласованное спектральное представление* вида (40). Под согласованностью понимается то обстоятель-ство, что оператор $\widetilde{A}$ от r не зависит (в отличии от представлений (33)).

Наоборот, пусть $\widehat{A}$ есть некоторый самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\widehat{H}$, такой, что

$$x_n^r = p_n(\widehat{A})x_0^r, \qquad n \in \mathbb{Z}_+,\ 1 \le r \le N. \tag{41}$$

Записывая соотношение (8) с операторным аргументом $\widehat{A}$, и применяя к вектору x_0^r мы получим равенство:

$$\widehat{A}x_n^r = \frac{1}{a_n}\left(c_{n-1}x_{n-1}^r - b_n x_n^r + c_n x_{n+1}^r\right) = x_n^{r\,\prime} = A_{\vec{x}}x_n^r, \qquad n \in \mathbb{Z}_+,\ 1 \le r \le N. \tag{42}$$

Значит

$$\widehat{A} \supseteq A_{\vec{x}}. \tag{43}$$

Следовательно, всевозможные самосопряженные расширения оператора последовательности $A_{\vec{x}}$ дают все самосопряженные операторы $\widehat{A}$, для которых имеет место согласованное спектральное представление вида (41).

Согласованное представление (41) для компонент N-мерной полиномиальной последовательности $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ приводит к следующему *спектральному разложению N-мерной полиномиальной последовательности*:

$$\vec{x}_n = p_n(\widehat{A})\vec{x}_0 = \int_{\mathbb{R}} p_n(\lambda)\,d\begin{pmatrix} \widehat{E}_\lambda x_0^1 \\ \widehat{E}_\lambda x_0^2 \\ \vdots \\ \widehat{E}_\lambda x_0^r \end{pmatrix}, \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{44}$$

где $\{\widehat{E}_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ является непрерывным слева ортогональным разложением единицы оператора $\widehat{A}$, и понимается, что оператор $p_n(\widehat{A})$ действует на каждую компоненту вектора $\vec{x}_0$.

Определение 4 *Пусть $A_{\vec{x}}$ является оператором некоторой N-мерной полиномиальной последовательности $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ в гильбертовом пространстве H. Пусть $\widetilde{A}$ является самосопряженным расширением $A_{\vec{x}}$ в гильбертовом пространстве $\widetilde{H}\supseteq H_x$. Матрицу-функцию*

$$F(\lambda)=(F_{j,k}(\lambda))_{j,k=1}^N=\left((P_{H_{\vec{x}}}^{\widetilde{H}}\widetilde{E}_\lambda x_0^j,x_0^k)_H\right)_{j,k=1}^N,$$

где $\{\widetilde{E}_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ является непрерывным слева ортогональным разло-жением единицы оператора $\widetilde{A}$, будем называть **спектральной матрицей-функцией N-мерной полиномиальной последовательности** $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$.

Заметим, что для взаимной корреляционной функции компонент векторной полиномиальной последовательности $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ выполнено соотношение

$$K_{n,m}^{r,s}:=(x_n^r,x_m^s)_H=(p_n(\widetilde{A})x_0^r,p_m(\widetilde{A})x_0^s)_{\widetilde{H}}=\int_{\mathbb{R}}p_n(\lambda)p_m(\lambda)d(\widetilde{E}_\lambda x_0^r,x_0^s)_{\widetilde{H}}=$$

$$=\int_{\mathbb{R}}p_n(\lambda)p_m(\lambda)dF_{r,s}(\lambda),\qquad n,m\in\mathbb{Z}_+,\ 1\le r,s\le N. \tag{45}$$

Функцию

$$K_{n,m}=(K_{n,m}^{r,s})_{r,s=1}^N,\qquad n,m\in\mathbb{Z}_+,$$

будем называть **матричной корреляционной функцией N-мерной полиномиальной последовательности** $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$. Из (45) следует, что матричная корреляционная функция допускает спектральное представление:

$$K_{n,m}=\int_{\mathbb{R}}p_n(\lambda)p_m(\lambda)dF(\lambda),\qquad n,m\in\mathbb{Z}_+, \tag{46}$$

где F - спектральная матрица-функция последовательности.

Теорема 2 *Пусть задана N-мерная полиномиальная последовательность $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ в гильбертовом пространстве H, и $A_{\vec{x}}$ является оператором последовательности. Индекс дефекта симметрического оператора $A_{\vec{x}}$ равен (j,k), где $0\le j,k\le N$.*

В том случае, когда матричная корреляционная функция последовательности $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ вещественна (т.е. элементы матрицы-функции являются вещественнозначными функциями), дефектные числа оператора $A_{\vec{x}}$ совпадают. В частности, для одномерной полиномиальной последовательности индекс дефекта оператора последовательности равен $(0,0)$ или $(1,1)$.

Доказательство. Обозначим

$$v_n^r = A_{\vec{x}}^n x_0^r, \qquad n \in \mathbb{Z}_+,\ 1 \leq r \leq N. \tag{47}$$

Обозначим $S = \mathrm{Lin}\{v_n^r\}_{n\in\mathbb{Z}_+, 1\leq r\leq N}$. Проверим, что $S = L_{\vec{x}}$. Действительно, из соотношения (39) следует, что $x_n^r \in S$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq r \leq N$; и значит $L_{\vec{x}} \subseteq S$. Обратно, в силу того, что многочлены $\{p_n\}_0^\infty$ образуют линейный базис в пространстве $\mathbb{P}$, мы можем записать

$$v_n^r = A_{\vec{x}}^n x_0^r = \sum_{s=0}^n \xi_s p_s(A_{\vec{x}}) x_0^r = \sum_{s=0}^n \xi_s x_s^r \in L_{\vec{x}}, \qquad \xi_s \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{Z}_+,\ 1 \leq r \leq N,$$

и $S \subseteq L_{\vec{x}}$.

Выберем произвольный элемент $y \in L_{\vec{x}}$, $y = \sum_{r=1}^N \sum_{n=0}^\infty f_{r,n} v_n^r$, $f_{r,n} \in \mathbb{C}$, где лишь конечное число $f_{r,n}$ отлично от нуля. Выберем произвольное невещественное число z и рассмотрим систему уравнений:

$$-zd_{r,0} = f_{r,0}, \tag{48}$$

$$d_{r,k-1} - zd_{r,k} = f_{r,k}, \qquad k \in \mathbb{N},\ 1 \leq r \leq N, \tag{49}$$

относительно неизвестных $\{d_{r,k}\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$.
Предположим, что $f_{r,k} = 0$, при $k > M$, $1 \leq r \leq N$, для некоторого $M \in \mathbb{N}$. Положим

$$d_{r,k} = 0, \qquad k \geq M;$$

$$d_{r,k-1} = f_{r,k} + zd_{r,k}, \qquad k = M, M-1, ..., 1. \tag{50}$$

Для таким образом выбранных чисел $\{d_{r,k}\}_{k\in\mathbb{Z}_+, 1\leq r\leq N}$, уравнения (49) будут выполнены. Однако уравнения (48) могут и не выполняться. Пусть $w := \sum_{r=1}^N \sum_{k=0}^\infty d_{r,k} v_k^r$, $w \in L_{\vec{x}}$. Заметим, что

$$(A_{\vec{x}} - zE_{H_{\vec{x}}})w = \sum_{r=1}^N \sum_{k=0}^\infty (d_{r,k-1} - zd_{r,k}) v_k^r, \qquad d_{r,-1} := 0,$$

и

$$(A_{\vec{x}} - zE_{H_{\vec{x}}})w - y = \sum_{r=1}^N \sum_{k=0}^\infty (d_{r,k-1} - zd_{r,k} - f_{r,k}) v_k^r = \sum_{r=1}^N (-zd_{r,0} - f_{r,0}) v_0^r =$$

$$= \sum_{r=1}^N (-zd_{r,0} - f_{r,0}) x_0^r;$$

$$y = (A_{\vec{x}} - zE_{H_{\vec{x}}})w + \sum_{r=1}^N (zd_{r,0} + f_{r,0}) x_0^r, \qquad w \in L_{\vec{x}}. \tag{51}$$

Пусть $H_z := \overline{(A_{\vec{x}} - zE_{H_{\vec{x}}})L_{\vec{x}}} = (\overline{A_{\vec{x}}} - zE_{H_{\vec{x}}})D(\overline{A_{\vec{x}}})$. Положим

$$y_0^r := x_0^r - P_{H_z}^{H_{\vec{x}}} x_0^r, \qquad 1 \le r \le N.$$

Обозначим $H_0 := \mathrm{span}\{y_0^r\}_{r=1}^N$. Из (51) следует, что $L_{\vec{x}} \subseteq H_z \oplus H_0$; $H_{\vec{x}} \subseteq H_z \oplus H_0$, и значит $H_{\vec{x}} = H_z \oplus H_0$. Таким образом, H_0 является дефектным подпространством оператора $\overline{A_{\vec{x}}}$, отвечающим невещественному z. Из определения H_0 видно, что его размерность не превышает N.
Следовательно, дефектные числа оператора $A_{\vec{x}}$ могут принимать лишь значения от 0 до N.

Покажем теперь, что в случае вещественности матричной корреляционной функции дефектные числа оператора $A_{\vec{x}}$ равны.
Для произвольного $x \in L_{\vec{x}}$, $x = \sum_{r=1}^N \sum_{k=0}^\infty f_{r,k} x_k^r$, $f_{r,k} \in \mathbb{C}$, мы полагаем

$$Jx := \sum_{r=1}^N \sum_{k=0}^\infty \overline{f_{r,k}} x_k^r. \tag{52}$$

Если существует другое представление $x = \sum_{r=1}^N \sum_{k=0}^\infty d_{r,k} x_k^r$, $d_{r,k} \in \mathbb{C}$, тогда

$$\left\| \sum_{r=1}^N \sum_{k=0}^\infty \overline{f_{r,k}} x_k^r - \sum_{r=1}^N \sum_{k=0}^\infty \overline{d_{r,k}} x_k^r \right\|_H^2 = \left\| \sum_{r=1}^N \sum_{k=0}^\infty \overline{(f_{r,k} - d_{r,k})} x_k^r \right\|_H^2 =$$

$$= \sum_{r,s=1}^N \sum_{k,n=0}^\infty \overline{(f_{r,k} - d_{r,k})}(f_{s,n} - d_{s,n})(x_k^r, x_n^s)_H =$$

$$= \sum_{r,s=1}^N \sum_{k,n=0}^\infty \overline{(f_{r,k} - d_{r,k})}(f_{s,n} - d_{s,n}) K_{k,n}^{r,s} =$$

$$= \sum_{r,s=1}^N \sum_{k,n=0}^\infty \overline{(f_{r,k} - d_{r,k})}(f_{s,n} - d_{s,n}) K_{n,k}^{s,r} =$$

$$= \left(\sum_{s=1}^N \sum_{n=0}^\infty (f_{s,n} - d_{s,n}) x_n^s, \sum_{r=1}^N \sum_{k=0}^\infty (f_{r,k} - d_{r,k}) x_k^r \right)_H =$$

$$= \left\| \sum_{r=1}^N \sum_{k=0}^\infty f_{r,k} x_k^r - \sum_{r=1}^N \sum_{k=0}^\infty d_{r,k} x_k^r \right\|_H^2 = 0,$$

где мы воспользовались вещественностью корреляционной функции. Таким образом, J является корректно заданным антилинейным оператором в $H_{\vec{x}}$ с областью определения $L_{\vec{x}}$. Заметим, что

$$J^2 u = u, \qquad u \in L_{\vec{x}}. \tag{53}$$

Для произвольных $u,v \in L_{\vec{x}}$, $u = \sum_{r=1}^{N}\sum_{k=0}^{\infty} f_{r,k}x_k^r$, $v = \sum_{s=1}^{N}\sum_{n=0}^{\infty} d_{s,n}x_n^s$, $f_{r,k}, d_{s,n} \in \mathbb{C}$, можно записать

$$(Ju,Jv)_H = \left(\sum_{r=1}^{N}\sum_{k=0}^{\infty} \overline{f_{r,k}}x_k^r, \sum_{s=1}^{N}\sum_{n=0}^{\infty} \overline{d_{s,n}}x_n^s \right)_H = \sum_{r,s=1}^{N}\sum_{k,n=0}^{\infty} \overline{f_{r,k}}d_{s,n}(x_k^r, x_n^s)_H =$$

$$= \sum_{r,s=1}^{N}\sum_{k,n=0}^{\infty} \overline{f_{r,k}}d_{s,n}K_{k,n}^{r,s} = \sum_{r,s=1}^{N}\sum_{k,n=0}^{\infty} \overline{f_{r,k}}d_{s,n}K_{n,k}^{s,r} =$$

$$= \left(\sum_{s=1}^{N}\sum_{n=0}^{\infty} d_{s,n}x_n^s, \sum_{r=1}^{N}\sum_{k=0}^{\infty} f_{r,k}x_k^r \right)_H = (v,u)_H;$$

$$(Ju,Jv)_H = (v,u)_H, \qquad u,v \in L_{\vec{x}}. \tag{54}$$

В частности, это означает, что $\|Ju\| = \|u\|$, $u \in L_{\vec{x}}$. По непрерывности продолжим J до ограниченного оператора во всем $H_{\vec{x}}$. Нетрудно проверить, что J будет антилинейным и удовлетворять свойствам (53),(54) во всем $H_{\vec{x}}$. Такой оператор называют оператором сопряжения (см [12]).
Для произвольного элемента $u \in L_{\vec{x}}$, $u = \sum_{r=1}^{N}\sum_{k=0}^{\infty} f_{r,k}x_k^r$, $f_{r,k} \in \mathbb{C}$, можно записать

$$A_{\vec{x}}Ju = A_{\vec{x}}\sum_{r=1}^{N}\sum_{k=0}^{\infty} \overline{f_{r,k}}x_k^r = \sum_{r=1}^{N}\sum_{k=0}^{\infty} \overline{f_{r,k}}\frac{1}{a_k}\left(c_{k-1}x_{k-1}^r - b_kx_k^r + c_kx_{k+1}^r\right),$$

$$JA_{\vec{x}}u = J\sum_{r=1}^{N}\sum_{k=0}^{\infty} f_{r,k}\frac{1}{a_k}\left(c_{k-1}x_{k-1}^r - b_kx_k^r + c_kx_{k+1}^r\right) =$$

$$= \sum_{r=1}^{N}\sum_{k=0}^{\infty} \overline{f_{r,k}}J\frac{1}{a_k}\left(c_{k-1}x_{k-1}^r - b_kx_k^r + c_kx_{k+1}^r\right) =$$

$$= \sum_{r=1}^{N}\sum_{k=0}^{\infty} \overline{f_{r,k}}\frac{1}{a_k}\left(c_{k-1}x_{k-1}^r - b_kx_k^r + c_kx_{k+1}^r\right),$$

где мы воспользовались соотношением (9) и вещественностью коэффициентов a_k, b_k, c_k. Значит операторы $A_{\vec{x}}$ и J коммутируют. В этом случае оператор $A_{\vec{x}}$ называют вещественным относительно оператора сопряжения J ([12]). Нетрудно проверить, что и $\overline{A_{\vec{x}}}$ будет вещественным относительно J (симметрическим) оператором. Следовательно, дефектные числа оператора $\overline{A_{\vec{x}}}$ равны (см. [12, Theorem 9.14]).

Осталось заметить, что для одномерной полиномиальной последовательности корреляционная функция всегда вещественна, что следует из (13). $\square$

4. Изоморфизм А.Н. Колмогорова для векторных полиномиальных последовательностей.

Рассмотрим некоторую N-мерную полиномиальную последовательность $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ в гильбертовом пространстве H. Пусть $A_{\vec{x}}$ является оператором последовательности в пространстве значений последовательности $H_{\vec{x}}$. Будем предполагать в этом параграфе, что матричная корреляционная функция последовательности $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ является вещественной. В этом случае найдется самосопряженное расширение $\widehat{A}$ оператора $A_{\vec{x}}$ в пространстве $H_{\vec{x}}$, поскольку дефектные числа $A_{\vec{x}}$ равны согласно теоремы 2. Рассмотрим соответствующую спектральную матрицу-функцию:

$$F(\lambda) = (F_{j,k}(\lambda))_{j,k=1}^N = \left((\widehat{E}_\lambda x_0^j, x_0^k)_H \right)_{j,k=1}^N,$$

где $\{\widehat{E}_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ является непрерывным слева ортогональным разложением единицы оператора $\widehat{A}$.

Будем обозначать $\mathbf{I} = \{\Delta = [a,b) : \ -\infty < a < b < +\infty\}$ множество конечных полуоткрытых интервалов вещественной оси, и

$$\widehat{E}(\Delta) = \widehat{E}_b - \widehat{E}_a, \qquad \Delta = [a,b) \in \mathbf{I};$$

$$F_{j,k}(\Delta) = F_{j,k}(b) - F_{j,k}(a), \qquad \Delta = [a,b) \in \mathbf{I},\ 1 \le j,k \le N.$$

Рассмотрим также множество

$$L_\Delta = \mathrm{Lin}\left\{ \widehat{E}(\Delta)x_0^r,\ 1 \le r \le N,\ \Delta \in \mathbf{I} \right\} = \left\{ \sum_{r=1}^N \sum_{k=0}^\infty \alpha_{r,k} E(\Delta_{r,k}) x_0^r,\ \alpha_{r,k} \in \mathbb{C} \right\},$$

где суммы понимаются конечными.
Заметим, что $\overline{L_\Delta} = H_{\vec{x}}$. Действительно, предположим, что найдется ненулевой элемент $u \in H_{\vec{x}}$, такой, что

$$(u, \widehat{E}(\Delta)x_0^r)_H = 0, \qquad 1 \le r \le N,\ \Delta \in \mathbf{I}. \tag{55}$$

Мы можем записать

$$(u, \widehat{A}^n x_0^r)_H = \int_{\mathbb{R}} \lambda^n d(\widehat{E}_\lambda u, x_0^r)_H = \int_{\mathbb{R}} \lambda^n d(u, \widehat{E}_\lambda x_0^r)_H = 0, \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Последнее равенство означает, что $u \perp S$, где S определяется равенством (47). Поскольку $S = L_{\vec{x}}$, мы получаем $u = 0$.

Выберем произвольные элементы $x, y \in L_\Delta$,

$$x = \sum_{r=1}^N \sum_{\Delta \in I_r} \alpha_r(\Delta) \widehat{E}(\Delta) x_0^r, \qquad \alpha_r(\Delta) \in \mathbb{C}, \tag{56}$$

$$y=\sum_{s=1}^{N}\sum_{\Delta\in J_s}\beta_s(\Delta)\widehat{E}(\Delta)x_0^s,\qquad \beta_s(\Delta)\in\mathbb{C},\tag{57}$$

где I_r, J_s - некоторые конечные множества интервалов из $\mathbf{I}$. Далее, запишем равенство

$$(x,y)_H=\sum_{r,s=1}^{N}\sum_{\Delta\in I_r}\sum_{\Delta'\in J_s}\alpha_r(\Delta)\overline{\beta_s(\Delta')}\left(\widehat{E}(\Delta)x_0^r,\widehat{E}(\Delta')x_0^s\right)_H=$$

$$=\sum_{r,s=1}^{N}\sum_{\Delta\in I_r}\sum_{\Delta'\in J_s}\alpha_r(\Delta)\overline{\beta_s(\Delta')}\left(\widehat{E}(\Delta\cap\Delta')x_0^r,x_0^s\right)_H=$$

$$=\sum_{r,s=1}^{N}\sum_{\Delta\in I_r}\sum_{\Delta'\in J_s}\alpha_r(\Delta)\overline{\beta_s(\Delta')}F_{r,s}(\Delta\cap\Delta').\tag{58}$$

Рассмотрим функции

$$f_x(t)=\sum_{r=1}^{N}\sum_{\Delta\in I_r}\alpha_r(\Delta)\chi_\Delta(t)\vec{e}_r,\tag{59}$$

$$f_y(t)=\sum_{s=1}^{N}\sum_{\Delta\in J_s}\beta_s(\Delta)\chi_\Delta(t)\vec{e}_s,\tag{60}$$

где

$$\vec{e}_r:=(\delta_{1,r},\delta_{2,r},...,\delta_{N,r}),\qquad 1\le r\le N,$$

а χ_Δ является характеристической функцией интервала Δ. Очевидно, что функции f_x, f_y принадлежат $L^2(F)$. Запишем равенство

$$(f_x,f_y)_{L^2(F)}=\sum_{r,s=1}^{N}\sum_{\Delta\in I_r}\sum_{\Delta'\in J_s}\alpha_r(\Delta)\overline{\beta_s(\Delta')}\int_{\mathbb{R}}\chi_\Delta(t)\vec{e}_r dF(t)\vec{e}_s^{\,*}\chi_{\Delta'}(t)=$$

$$=\sum_{r,s=1}^{N}\sum_{\Delta\in I_r}\sum_{\Delta'\in J_s}\alpha_r(\Delta)\overline{\beta_s(\Delta')}\int_{\Delta\cap\Delta'}dF_{r,s}(t)=$$

$$=\sum_{r,s=1}^{N}\sum_{\Delta\in I_r}\sum_{\Delta'\in J_s}\alpha_r(\Delta)\overline{\beta_s(\Delta')}F_{r,s}(\Delta\cap\Delta').\tag{61}$$

Из соотношений (58),(61) следует, что

$$(x,y)_H=(f_x,f_y)_{L^2(F)},\qquad x,y\in L_\Delta.\tag{62}$$

Предположим теперь, что для элемента x помимо представления (56) есть представление:

$$x = \sum_{r=1}^{N} \sum_{\Delta \in \widetilde{I}_r} \widetilde{\alpha}_r(\Delta) \widehat{E}(\Delta) x_0^r, \qquad \widetilde{\alpha}_r(\Delta) \in \mathbb{C}, \tag{63}$$

где $\widetilde{I}_r$ некоторые конечные множества интервалов из $\mathbf{I}$, $1 \le r \le N$. Этому представлению мы можем поставить в соответствие функцию

$$\widetilde{f}_x(t) = \sum_{r=1}^{N} \sum_{\Delta \in \widetilde{I}_r} \widetilde{\alpha}_r(\Delta) \chi_\Delta(t) \vec{e}_r. \tag{64}$$

Из равенств (56),(63) следует, что

$$0 = \sum_{r=1}^{N} \sum_{\Delta \in I_r \cap \widetilde{I}_r} (\alpha_r(\Delta) - \widetilde{\alpha}_r(\Delta)) \widehat{E}(\Delta) x_0^r + \sum_{r=1}^{N} \sum_{\Delta \in I_r \setminus \widetilde{I}_r} \alpha_r(\Delta) \widehat{E}(\Delta) x_0^r -$$

$$- \sum_{r=1}^{N} \sum_{\Delta \in \widetilde{I}_r \setminus I_r} \widetilde{\alpha}_r(\Delta) \widehat{E}(\Delta) x_0^r = \sum_{r=1}^{N} \sum_{\Delta \in \widehat{I}_r} \gamma_r(\Delta) \widehat{E}(\Delta) x_0^r,$$

где

$$\widehat{I}_r = I_r \cup \widetilde{I}_r, \quad \gamma_r(\Delta) = \begin{cases} \alpha_r(\Delta) - \widetilde{\alpha}_r(\Delta), & \Delta \in I_r \cap \widetilde{I}_r \\ \alpha_r(\Delta), & \Delta \in I_r \setminus \widetilde{I}_r \\ -\widetilde{\alpha}_r(\Delta), & \Delta \in \widetilde{I}_r \setminus I_r \end{cases}.$$

Рассмотрим функцию

$$f_0(t) = \sum_{r=1}^{N} \sum_{\Delta \in \widehat{I}_r} \gamma_r(\Delta) \chi_\Delta(t) \vec{e}_r. \tag{65}$$

Эта функция принаадлежит пространству $L^2(F)$ и применяя равенство (62) мы получаем, что

$$\|f_0(t)\|_{L^2(F)} = 0.$$

С другой стороны, мы можем записать

$$\|f_x - \widetilde{f}_x\|^2_{L^2(F)} = \left\| \sum_{r=1}^{N} \sum_{\Delta \in I_r} \alpha_r(\Delta) \chi_\Delta(t) \vec{e}_r - \sum_{r=1}^{N} \sum_{\Delta \in \widetilde{I}_r} \widetilde{\alpha}_r(\Delta) \chi_\Delta(t) \vec{e}_r \right\|^2_{L^2(F)} =$$

$$= \left\| \sum_{r=1}^{N} \sum_{\Delta \in \widehat{I}_r} \gamma_r(\Delta) \chi_\Delta(t) \vec{e}_r \right\|^2_{L^2(F)} = \|f_0(t)\|^2_{L^2(F)},$$

и значит

$$f_x(t) = \widetilde{f}_x(t).$$

Таким образом, функция $f_x(t)$, определяемая равенством (59), не зависит от выбора представления вида (56) для элемента $x \in L_\Delta$. Обозначим посредством V оператор из L_Δ в $L^2(F)$, реализующий соответствие $x \to f_x(t)$. Равенство (62) показывает, в частности, что этот оператор ограничен и по непрерывности продолжается до изометрического (а значит линейного) отображения из $\overline{L_\Delta} = H_{\vec{x}}$ в некоторое подпространство $L^2(F)$. Поскольку ступенчатыми функциями можно равномерно приблизить любую непрерывную финитную функцию, а непрерывные финитные вектор-функции плотны в $L^2(F)$, то это подпространство совпадает со всем $L^2(F)$.

Теорема 3 *Пусть задана N-мерная полиномиальная последовательность $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ в гильбертовом пространстве H. Пусть $A_{\vec{x}}$ является оператором последовательности, действующим в пространстве значений последовательности $H_{\vec{x}}$. Предположим, что матричная корреляционная функция последовательности $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ вещественна. Пусть $\widehat{A}$ - некоторое самосопряженное расширение оператора $A_{\vec{x}}$, действующее в $H_{\vec{x}}$, и $F(x)$ - соответствующая этому расширению спектральная функция последовательности. Существует изометрическое отображение V пространства $H_{\vec{x}}$ на пространство $L^2(F)$ такое, что для произвольной функции $f(t) = (f_1(t), f_2(t), ..., f_N(t))$, $t \in \mathbb{R}$, такой, что*

$$\int_{\mathbb{R}} |f_r(t)|^2 dF_{r,r}(t) < \infty, \qquad 1 \le r \le N, \tag{66}$$

справедливо соотношение

$$V^{-1}f = \sum_{r=1}^{N} f_r(\widehat{A})x_0^r = \sum_{r=1}^{N} \int_{\mathbb{R}} f_r(\lambda) d\widehat{E}_\lambda x_0^r, \tag{67}$$

где $\{\widehat{E}_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ является непрерывным слева ортогональным разложением единицы оператора $\widehat{A}$, а под $V^{-1}f$ понимается действие оператора V^{-1} на элемент пространства $L^2(F)$ (класс эквивалентности), задаваемый функцией $f(t)$.

Доказательство. Изометрическое отображение V пространства $H_{\vec{x}}$ на пространство $L^2(F)$ было построено перед формулировкой теоремы. Проверим справедливость соотношения (67). Множество функций, удовлетворяющих условию (66) обозначим M. Выберем произвольную функцию $f(t) = (f_1(t), f_2(t), ..., f_N(t)) \in M$, и положим

$$x_f := \sum_{r=1}^{N} f_r(\widehat{A})x_0^r = \sum_{r=1}^{N} \int_{\mathbb{R}} f_r(\lambda) d\widehat{E}_\lambda x_0^r. \tag{68}$$

Если взять другую функцию $g(t) = (g_1(t), g_2(t), ..., g_N(t)) \in M$, такую, что $\|f - g\|_{L^2(F)} = 0$, и определить

$$x_g := \sum_{r=1}^{N} g_r(\widehat{A}) x_0^r = \sum_{r=1}^{N} \int_{\mathbb{R}} g_r(\lambda) d\widehat{E}_\lambda x_0^r,$$

то

$$\|x_f - x_g\|_H^2 = \left\| \sum_{r=1}^{N} (f_r(\widehat{A}) - g_r(\widehat{A})) x_0^r \right\|_H^2 =$$

$$= \sum_{r,s=1}^{N} \Big((f_r(\widehat{A}) - g_r(\widehat{A})) x_0^r, (f_s(\widehat{A}) - g_s(\widehat{A})) x_0^s \Big)_H =$$

$$= \sum_{r,s=1}^{N} \int_{\mathbb{R}} (f_r(\lambda) - g_r(\lambda)) \overline{(f_s(\lambda) - g_s(\lambda))} d(\widehat{E}_\lambda x_0^r, x_0^s)_H =$$

$$= \sum_{r,s=1}^{N} \int_{\mathbb{R}} (f_r(\lambda) - g_r(\lambda)) \overline{(f_s(\lambda) - g_s(\lambda))} dF_{r,s}(\lambda) = (f - g, f - g)_{L^2(F)} = 0.$$

Посредством $L^2_M(F)$ мы обозначим множество классов эквивалентности из $L^2(F)$, отвечающих функциям из M. Последние равенства показывают, что отображение $f(t) \rightarrow x_f$ задает корректное отображение множества $L^2_M(F)$ в $H_{\vec{x}}$.
Найдется последовательность функций из $L^2(F)$ вида

$$f^{[n]}(t) = (f_1^{[n]}(t), f_2^{[n]}(t), ..., f_N^{[n]}(t)) = \sum_{r=1}^{N} \sum_{\Delta \in I_{n,r}} \alpha_{n,r}(\Delta) \chi_\Delta(t) \vec{e}_r, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (69)$$

где $\alpha_{n,r}(\Delta) \in \mathbb{C}$, $I_{n,r}$ - некоторые конечные множества интервалов из $\mathbf{I}$, сходящаяся в $L^2(F)$ к (классу функций, порожденному) $f(t)$:

$$\|f^{[n]}(t) - f(t)\|_{L^2(F)} \rightarrow 0, \qquad n \rightarrow \infty. \quad (70)$$

Рассмотрим последовательность элементов

$$x_f^{[n]} := V^{-1} f^{[n]}(t) = \sum_{r=1}^{N} \sum_{\Delta \in I_{n,r}} \alpha_{n,r}(\Delta) \widehat{E}(\Delta) x_0^r, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad (71)$$

где последнее равенство следует из способа построения отображения V. Заметим, что

$$x_f^{[n]} = \sum_{r=1}^{N} \sum_{\Delta \in I_{n,r}} \alpha_{n,r}(\Delta) \int_\Delta d\widehat{E}_t x_0^r = \sum_{r=1}^{N} \sum_{\Delta \in I_{n,r}} \alpha_{n,r}(\Delta) \int_{\mathbb{R}} \chi_\Delta(t) d\widehat{E}_t x_0^r =$$

$$= \sum_{r=1}^{N} \int_{\mathbb{R}} \sum_{\Delta \in I_{n,r}} \alpha_{n,r}(\Delta)\chi_{\Delta}(t) d\widehat{E}_t x_0^r = \sum_{r=1}^{N} \int_{\mathbb{R}} f_r^{[n]}(t) d\widehat{E}_t x_0^r =$$

$$= \sum_{r=1}^{N} f_r^{[n]}(\widehat{A}) x_0^r, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{72}$$

В силу непрерывности отображения V^{-1} справедливо соотношение

$$x_f^{[n]} \to V^{-1} f(t), \qquad n \to \infty. \tag{73}$$

Далее, мы можем записать

$$\|x_f^{[n]} - x_f\|_H^2 = \left\| \sum_{r=1}^{N} (f_r^{[n]}(\widehat{A}) - f_r(\widehat{A})) x_0^r \right\|_H^2 =$$

$$= \sum_{r,s=1}^{N} \Big((f_r^{[n]}(\widehat{A}) - f_r(\widehat{A})) x_0^r, (f_s^{[n]}(\widehat{A}) - f_s(\widehat{A})) x_0^s \Big)_H =$$

$$= \sum_{r,s=1}^{N} \int_{\mathbb{R}} (f_r^{[n]}(\lambda) - f_r(\lambda)) \overline{(f_s^{[n]}(\lambda) - f_s(\lambda))} d(\widehat{E}_\lambda x_0^r, x_0^s)_H =$$

$$= \sum_{r,s=1}^{N} \int_{\mathbb{R}} (f_r^{[n]}(\lambda) - f_r(\lambda)) \overline{(f_s^{[n]}(\lambda) - f_s(\lambda))} dF_{r,s}(\lambda) =$$

$$= \|f^{[n]} - f\|_{L^2(F)}^2 \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{74}$$

В силу единственности предела получаем

$$V^{-1} f = x_f, \tag{75}$$

что и дает требуемое соотношение (67). □

Для того, чтобы получить из доказанной теоремы теорему 1 заметим, что для одномерной полиномиальной последовательности корреляционная функция всегда вещественна. Это следует из соотношения (13). Условие (66) в одномерном случае ($N = 1$) будет выполнено для произвольной функции из $L^2(F)$. Единственность представления (14) следует из изометричности оператора V^{-1} из (67).

Благодарности. Автор выражает благодарность профессору А.А. Янцевичу, обратившему внимание автора на проблематику многомерных полиномиальных последовательностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов.– М.: Физматлит, 2005. – 408 с.

2. Загороднюк С.М., Клёц Л. Применение подхода А.Н. Колмогорова при изучении случайных последовательностей, связанных с ортогональными многочленами. // Вiсник Харкiвського нацiонального унiверситету iм. В.Н. Каразiна, Сер. "Математика, прикладна математика i механiка", - 2008. - **826.** - С. 3-37.

3. Загороднюк С.М. Разложение Вольда для полиномиальных последовательностей. // Вiсник Харкiвського нацiонального унiверситету iм. В.Н. Каразiна, Сер. "Математика, прикладна математика i механiка", - 2009. - **850.** - С. 57-70.

4. Розанов Ю.А. Спектральная теория многомерных стационарных случайных процессов с дискретным временем. // УМН, - 1958. - 2(80). - С. 93-142.

5. Розанов Ю.А. Стационарные случайные процессы. - М.: Наука, - 1990. - 272 с.

6. Маламуд М.М., Маламуд С.М. Операторные меры в гильбертовом пространстве. // Алгебра и анализ, - 2003. - **15.** - no. 3. - С. 1-52.

7. Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи. - М.: Мир, - 1968. - 750 с.

8. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. - Москва, Ленинград: гос. издат. тех.-теор. лит., - 1950. - 484 с.

9. Бендат Дж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. - Москва: Мир, - 1971. - 408 с.

10. Teschl G. Jacobi Operators and Completely Integrable Nonlinear Lattices. - Mathematical surveys and monographs vol. 72, Amer. Math. Soc., - 2000. - 353 p.

11. Марченко В.А. Введение в теорию обратных задач спектрального анализа. - АКТА, - 2005. - 144 с.

12. Stone M. H. Linear Transformations in Hilbert Space and Their Applications to Analysis. - Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc., Colloquium Publications, - 1932. - 622 p.

Статья получена: 19.08.2009; окончательный вариант: 10.11.2009; принята: 12.11.2009.