Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.958+536.71 № 875, 2009, с.4–9

Уравнение Бюргерса в кольце периодических функций

А.С. Сохин
Харьковский национальный университет имени В.Н.Каразина, пл. Свободы, 4, 61077, Харьков, Украина
sokhin@univer.kharkov.ua

В работе изучаются некоторые элементарные функции в кольце периодических функций без единицы. Находится обобщение преобразования Коула-Хопфа, позволяющее свести нелинейное уравнение Бюргерса в кольце к линейному параболическому уравнению в кольце.

С о х і н А.С., **Рівняння Бюргерса в кільці періодичних функцій**. В роботі вивчаються деякі елементарні функції в кільці періодичних функцій без одиниці. Знаходиться узагальнення перетворення Коула-Хопфа, яке дозволяє звести нелінійне рівняння Бюргерса в кільці до лінійного параболічного рівняння в кільці.

A.S. Sokhin, **The Burger's equation in the ring of periodic functions**. In the present paper we study some elementary functions in the ring of periodical functions. A generalization of Cole-Hopf transformation is found. The last allows us to transform nonlinear Burger's equation in the ring to a linear parabolic equation in the ring.

2000 Mathematics Subject Classification: 35Q53.

Классическое нелинейное уравнение Бюргерса встречается в механике жидкостей, астродинамике, космологии [1]. Есть различные обобщения этого уравнения [2, 3]. В данной работе изучается интегро-дифференциальное обобщение уравнения Бюргерса, рассматриваемое как уравнение в кольце периодических функций. Вводится обобщение в кольце без единицы подстановки Коула-Хопфа [5, 4], определяемое через операции в кольце, которое позволяет свести решение уравнения Бюргерса в кольце к решению линейного уравнения диффузии в кольце.

1. Кольцо периодических функций

Пусть вещественная функция $u(s) \in L_2(-\pi, \pi)$. Продолжим ее периодически на всю вещественную ось. Введем операцию свертки: $u \circ v(s) = \int_{-\pi}^{\pi} u(\sigma)v(s-\sigma)d\sigma$. Множество функций из $L_2(-\pi, \pi)$ с операцией свертки обозначим через $\overset{\circ}{K}_2$. Известно, что из $u, v \in L_1(-\pi, \pi)$ следует $u \circ v \in L_1(-\pi, \pi)$. Таким образом, *множество периодических абсолютно суммируемых на периоде функций со сверткой в качестве операции умножения, образует ассоциативное и коммутативное без единицы кольцо* [7].

Заметим, что из $u \in L_2(-\pi, \pi)$ следует $u \in L_1(-\pi, \pi)$. Скалярное произведение функций, норма, преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье определяются равенствами: $(u, v) = \int_{-\pi}^{\pi} u(s)\, v(s)\, ds$, $\|u\| = \sqrt{(u,u)}$, $u^f = Fu = (u_n,\ n = 0, \pm1, \ldots)$, $u_n = (u, e_n)$, $e_n(s) = 1/\sqrt{2\pi} \cdot \exp(ins)$, $F^{-1}u^f = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} e_n(s)u_n$.

Если $u, v \in L_2(-\pi, \pi)$, то справедливо равенство Парсеваля $\|u\|^2 = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} u_n\overline{u}_n$. Функцию $u(-s)$ назовем сопряженной к $u(s)$. Если $u(s) = u(-s)$, то имеем самосопряженную (четную) функцию. Если $u(-s) = -u(s)$, то имеем кососопряженную (нечетную) функцию. Каждая функция представима в виде суммы четной и нечетной функций:

$$u(s) = [u(s) + u(-s)]/2 + [u(s) - u(-s)]/2 = u_+(s) + u_-(s).$$

Для симметричного кольца все $u_- = 0$, для кососимметричного кольца все $u_+ = 0$.

Введем cos-преобразования и sin-преобразования Фурье по формулам: $Cu = \widehat{u}^c = (u_n^c,\ n = 0, \pm1, \ldots) = (u, C_n)$, $C_n(\sigma) = 1/\sqrt{2\pi} \cdot \cos(n\sigma)$ $Su = \widehat{u}^s = (u_n^s,\ n = 0, \pm1, \ldots) = (u, S_n)$, $S_n(\sigma) = 1/\sqrt{2\pi} \cdot \sin(n\sigma)$, тогда $Fu = Cu + i\,Su$. Заметим, что $(u_+)_n^s = 0$, $(u_-)_n^c = 0$, $u_n^c = (u_+)_n^c$, $u_n^s = (u_-)_n^s$. Определим некоторые кольцевые функции кольцевых переменных.

Поскольку кольцо не имеет единицы, то не каждая функция подходит для определения кольцевой функции. В частности, не может быть обратного значения.

Введем нужные в дальнейшем функции $\mathrm{pexp}(z) = \exp(z) - 1$, $\mathrm{p}\ln(z) = \ln(1+z)$, $\mathrm{prev}(z) = [1/(1+z)] - 1$ комплексной переменной (которые будем называть *псевдоэкспонентой, псевдологарифмом* и *псевдообратным* значением), определяемые , соответственно, во всей комплексной плоскости и в разрезанной вдоль вещественной прямой от $-\infty$ до -1 плоскости.

Кольцевые функции от кольцевой переменной $u \in \overset{\circ}{K}_2$ определяем по правилу: $g(u) = F^{-1}\, g(Fu)$. Подробнее для введенных функций:

$$\mathrm{pexp}(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e_n(s)\, \mathrm{pexp}(u_n),\ \ \mathrm{p}\ln(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e_n(s)\, \mathrm{p}\ln(u_n),$$

$$\mathrm{prev}\,(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e_n(s) \mathrm{prev}\,(u_n) \text{ для } u_n = (u,\, e_n),\ n = 0, \pm1, \pm2, \ldots .$$

Нетрудно проверить, что $\mathrm{pexp}(\mathrm{p}\ln(u)) = u$, $\mathrm{p}\ln,(\mathrm{pexp}(u)) = u$, $\mathrm{prev}(\mathrm{prev}(u)) = u$, $\mathrm{prev}(\mathrm{pexp}(u)) = \mathrm{pexp}(-u)$. То-есть, эти функции — взаимообратные. Для существования $\mathrm{p}\ln(u)$ и $\mathrm{prev}\,(u)$ следует потребовать $|1+u_n| \geq \delta > 0$ равномерно по $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ или, в равносильной форме, $\|\xi + u \circ \xi\| \geq \delta\,\|\xi\|$, $\delta > 0$, $\forall \xi \in \overset{\circ}{K}_2$.
Нетрудно проверить справедливость равенства: $u + \mathrm{prev}(u) + u \circ \mathrm{prev}(u) = 0$, если $\mathrm{prev}(u)$ существует.
Обозначим через $\overset{\circ}{l}_2$ пространство последовательностей $(u_n,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ с конечной нормой $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |u_n|^2 < \infty$ и операцией умножения $(u \cdot v)_n = u_n\, v_n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Тогда $\overset{\circ}{l}_2$ — кольцо, изоморфное кольцу $\overset{\circ}{K}_2$, в силу равенства Парсеваля и того, что преобразование Фурье переводит операцию свертки в $\overset{\circ}{K}_2$ в операцию покомпонентного умножения в $\overset{\circ}{l}_2$. Заметим, что не теряя в общности, все определения можно рассматривать на плотном в $\overset{\circ}{K}_2$ множестве достаточно гладких финитных функциях.

Рассмотрим функции вещественной переменной со значением в $\overset{\circ}{K}_2$. Известным способом [6] вводится понятие непрерывной, дифференцируемой, интегрируемой и т.д. функций числовых переменных со значением в $\overset{\circ}{K}_2$. Рассмотрим производные введенных кольцевых функций непрерывно дифференцируемых кольцевых переменных.

Пусть $\dfrac{d}{dx}\, u(x) = u'(x) \in \overset{\circ}{K}_2$. Имеем $u'(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} e_n(s)\, u_n'(x)$. Рассмотрим
$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} e_n(s)\ \exp\left(u_n(x)\right)\, u_n'(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} e_n(s)\{[\exp\left(u_n(x)\right) - 1]\, u_n'(x) + u_n(x)\} =$
$= \mathrm{pexp}\left(u(x)\right) \circ u'(x) + u_n'(x) \overset{def}{=} \dfrac{d}{dx}\, \mathrm{pexp}\left(u(x)\right)$.

Получено, что $y(x) = \mathrm{pexp}\left(u(x)\right)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' = u'(x) + u'(x) \circ y$.

Аналогично находим, что функция $e(x) = \mathrm{p}\ln\left(u(x)\right)$ удовлетворяет такому дифференциальному уравнению $y' = u'(x) + u'(x) \circ \mathrm{prev}\,(y)$.

Лемма 1. *Если v имеет псевдообратное значение w, то из равенства $\xi + \xi \circ v = \eta + \eta \circ v$ следует $\xi = \eta$.*

Доказательство. Из равенства $(\xi + \xi \circ v) + (\xi + \xi \circ v) \circ w = (\eta + \eta \circ v) + (\eta + \eta \circ v) \circ w$ получаем $\xi + \xi \circ (v + w + v \circ w) = \eta + \eta \circ (v + w + v \circ w)$. Так как $v + w + v \circ w = 0$, то имеем $\xi = \eta$.

Лемма 2. *Если $u = prev(y) \circ \xi + \xi$, то $\xi = u + u \circ y$.*

Доказательство. Имеем $u + u \circ y = \xi + \xi \circ (y + prev(y) + y \circ \mathrm{prev}(y)) = \xi$.

2. Уравнение Бюргерса в кольце

Пусть функция $u(x,t)$ вещественных переменных x и t принимает значения в кольце $\overset{\circ}{K}_2$ и удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2u \circ \frac{\partial u}{\partial x}\,, \quad t > 0; \tag{1}$$

начальному условию

$$u(x,\,0)=a(x),\quad t=0 \tag{2}$$

для всех $x \in (-\infty,\ \infty)$. Начальные значения подчиним условиям $a(\cdot)\in L_1(0,\,\infty;\overset{\circ}{K}_2),\ a(-x)=-a(x)$.

Уравнение (1) для функции $u(x,t,s)$ называем уравнением Бюргерса в кольце $\overset{\circ}{K}_2$. Введем обозначения: $\widehat{a}(x)=\int_{-\infty}^{x}a(\widetilde{x})d\widetilde{x};\ \partial y/\partial t=\dot{y};\ \partial y/\partial x=y'$.

Теорема 1. *Если функция $y(x,\,t)\in\overset{\circ}{K}_2$ имеет псевдообратное значение при $t\geq 0,\ -\infty<x<\infty$ удовлетворяет уравнению*

$$\dot{y}=y'',\quad t>0 \tag{3}$$

и начальному условию

$$y(x,0)=prev(\widehat{a}(x))\equiv\varphi(x), \tag{4}$$

то функция

$$u(x,\,t)=y'\circ prev(y)+y' \tag{5}$$

является решением уравнения Бюргерса (1) *и удовлетворяет начальному условию* (2)*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенство (5) называем обобщением подстановки Коула-Хопфа для случая $\overset{\circ}{K}_2$ [4, 5]. Заметим [4, 5], что обычная подстановка в скалярном случае имеет вид $u=y'y^{-1}$. По лемме 2 из равенства (5) получаем уравнение

$$y'=u+u\circ y. \tag{6}$$

Обозначим $v(x,\,t)=y\circ prev(y)+y$. По той же лемме 2 получаем

$$\dot{y}=v+v\circ y. \tag{7}$$

Из требования совместимости уравнений (6) и (7) перекрестным дифференцированием из равенства $\partial y'/\partial t=\partial\dot{y}/\partial x$ после сокращения одинаковых слагаемых находим $\dot{u}+\dot{u}\circ y=v'+v'\circ y$.

Из леммы 1 получаем

$$\dot{u}=v'. \tag{8}$$

Подставляя в равенство (3) значение $\dot{y}$ из равенства (7) и значение $\partial y/\partial x$, найденное из равенства (6), повторным дифференцированием по x находим равенство $v+v\circ y=(u'+u\circ u)+(u'+u\circ u)\circ y$, из которого по лемме (1) заключаем

$$v=u'+u\circ u. \tag{9}$$

Равенства (8) и (9) совместно и есть уравнение Бюргерса. Проверим выполнимость начального значения. Из (5) при $t=0$ имеем $u(x,0)$=$\varphi'\circ$ prev(φ)+φ'. По лемме (2) находим φ'=$u(x,0)$+$u(x,0)\circ\varphi$. Из равенства (4) дифференцированием получим $\varphi'{=}a(x){+}a(x)\circ\varphi$, то есть, $a(x){+}a(x)\circ\varphi{=}u(x,0)+u(x,0)\circ\varphi$.

По лемме (1) делаем вывод, что $u(x,\,0)=a(x)$. Нетрудно получить, что решение Бюргерса единственно, если оно существует. Кольцевая переменная $u\neq 0$ из $\overset{\circ}{K}_2$ называется псевдоунитарной, если $\mathrm{prev}(u)=u_+$.

Лемма 3. *Если u — псевдоунитарная, то* $\|\xi+u\circ\xi\|=\|\xi\|\ \forall\,\xi\in\overset{\circ}{K}_2$.

Лемма 4. *Псевдоунитарная кольцевая переменная представима в виде* $u=\mathrm{pexp}\,(im)$, $m\in\overset{\circ}{K}_2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство лемм 3 и 4 получаем непосредственной проверкой.

Найдем теперь достаточные условия, при которых решение задачи (3)—(4) имеет псевдообратное значение.

Теорема 2. *Если существует кольцевая функция* $q=\mathrm{pexp}\,(im)$ *такая, что начальное условие для кольцевого уравнения диффузии удовлетворяет неравенству*

$$\mathrm{Re}(\xi+\varphi(x)\circ\xi,\ \xi+q\circ\xi)\ \geq\ \delta\,\|\xi\|^2,\quad \delta>0, \tag{10}$$

равномерно по $x\in(-\infty,\,\infty)$ *для всех* $\xi\in\overset{\circ}{K}_2$, *то псевдообратное значение решения уравнения диффузии существует.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Задача (1)— (2) имеет решение, выражаемое интегралом Пуассона: $y(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}p_t(x-\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma$, $p_t(x)=1/\sqrt{4\pi t}\cdot\exp(-x^2/(4t))$. Проверка этого утверждения такая же, как и в случае непрерывных ограниченных функций. Так как $\int_{-\infty}^{\infty}p_t(x)dx=1$, $p_t(x)>0$ при $t>0$, то справедливо равенство

$$\mathrm{Re}(\xi+y(x,t)\circ\xi,\xi+q\circ\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}p_t(x-\sigma)\mathrm{Re}(\xi+\varphi(\sigma)\circ\xi,\xi+q\circ\xi)d\sigma. \tag{11}$$

Тогда из неравенства (10) следует: $\mathrm{Re}(\xi{+}y(x,\,t){\circ}\xi,\ \xi{+}q{\circ}\xi)\geq\delta\,\|\xi\|^2,\ \forall\xi\in\overset{\circ}{K}_2$. Из неравенства Коши-Буняковского получаем для левой части предыдущего неравенства оценку сверху
$\mathrm{Re}(\xi+y(x,t)\circ\xi,\xi+q\circ\xi)\leq\|\xi+y(x,t)\circ\xi\|\,\|\xi+q\circ\xi\|=\|\xi+y(x,t)\circ\xi\|\,\|\xi\|$, то есть, получено неравенство $\|\xi+y(x,t)\circ\xi\|\geq\delta\|\xi\|$, $\delta>0$ для всех $\xi\in\overset{\circ}{K}_2$, которое означает существование псевдообратного значения.

Теорема 3. *Пусть*

1) $-\infty<r\leq\widehat{a}_n^c(x)$ *равномерно по* $x\in(-\infty,\,\infty)$*;*

2) $d_n\leq\widehat{a}_n^s(x)\leq D_n$ *равномерно по* $x\in(-\infty,\,\infty)$ *и* $n=(0,\,\pm1)$*; причем,* $-\infty<d_n\leq 0,\ 0\leq D_n<\infty,\ (D_n-d_n)/2\leq\pi/2-\varepsilon,\quad 0<\varepsilon\ll 1,\ \forall\,n$;

3) $m=(m_n=(D_n+d_n)/2,\ n=0,\,\pm1,\,\pm2)\in\overset{\circ}{l}_2$.

Тогда условия предыдущей теоремы выполнены при $q=\mathrm{pexp}\,(im)$ *и* $\delta=\exp\,(r)\,\sin\varepsilon$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства достаточно убедиться в существовании неравенства (10) при указанных q и δ.

Имеем $\mathrm{Re}(\xi+\varphi(x)\circ\xi,\ \xi+q\circ\xi)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}\ \exp(\widehat{a}_n(x))\exp(-im_n)\,\xi_n\,\overline{\xi}_n=$ $=\exp(\widehat{a}^c_n(x))\cdot\cos(\widehat{a}^s_n(x)-m_n)\cdot\xi_n\,\overline{\xi}_n$.

Так как по условию $|\widehat{a}^s_n(x)-m_n|\le(\pi/2-\varepsilon_\alpha)$ и $\widehat{a}^c_n(x)\ge r$, то $\exp(\widehat{a}^c_n(x))\ge\exp(r)$, $\cos(\widehat{a}^s_n(x)-m_n)\ge(\pi/2-\varepsilon)\cdot\cos=\sin\varepsilon$ и, учитывая $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\xi_n\,\overline{\xi}_n=\|\xi\|^2$, получаем требуемое.

Теорема 4. *Если* $\widehat{a}^c_n(x)\ge r>-\infty$, $|\widehat{a}^s_n|\le(\pi/2-\varepsilon)$, $\varepsilon>0$ *равномерно по* $x\in(-\infty,\infty)$ *и* $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$, *то псевдообратное значение* $y(x,t)$ *существует для всех* $x\in(-\infty,\infty)$ *и* $t\ge0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из предыдущей теоремы при $m=0$.

Теорема 5. *Если*
$\|a_+\|_1=\int_0^\infty dx\int_{-\pi}^{\pi}|a_+(x,s)|ds<\infty$, $\|a_-\|_1=\int_0^\infty dx\int_{-\pi}^{\pi}|a_-(x,s)|ds<(\pi/2)^{3/2}$, *то псевдообратное значение* $y(x,t)$ *существует при* $x\in(-\infty,\infty)$ *и* $t\ge0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство следует из следующих неравенств $|\widehat{a}^c_n(x)|\le\sqrt{2/\pi}\ \|a_+\|_1$, $|\widehat{a}^s_n(x)|\le\sqrt{2/\pi}\ \|a_-\|_1$ и предыдущей теоремы при $r=-\sqrt{2/\pi}\,\|a_+\|_1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петровский С. В. Точные решения уравнения Бюргерса с источником // Журнал технической физики. – 1999, Т. 69, вып. 8, с. 11-14.

2. Беркела Ю. Ю. Матричные аналоги нелинейных уравнений Бюргерса // Украинский физический журнал. – 1988. – Т. 43, № 7. – С. 776–780.

3. Сохин А. С. Уравнение Бюргерса в циркулянтном векторном кольце // Вiсник Харкiвського нацiонального унiверситету, серiя "Математика, прикладна математика i механiка". – 2004. № 645, С. 163-171.

4. Hopf E. The partial differential equation $\dot{u}+uu'_x=u_{xx}$ // Comm. Pure Appl. Math. – 1950. № 3, p. 201-230.

5. Cole I. D. On a quasi-linear parabolic equation occuring in actrodynamics // Quart. Math. – 1951. № 9, p. 225-236.

6. Треногин В. А. Функциональный анализ // М.: Наука. – 1980, 495 с.

7. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Коммутативные нормированные кольца // М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит.– 1960, 315 с.

Статья получена: 29.05.2009; принята: 10.09.2009.