

Исследование математической модели механической суффозии

А. Ю. Кузнецов, С. А. Пославский

*Харьковский национальный университет имени В.Н.Каразина,
пл. Свободы, 4, 61077, Харьков, Украина
kuant@rambler.ru, s.poslavsky@gmail.com*

В работе рассматривается задача о перераспределении суффозионных частиц при впитывании жидкости в грунт. Принимается кинематическая модель, в которой объемный расход жидкости, поступающей в грунт, является заранее заданной функцией, а скорость подвижных суффозионных частиц линейно зависит от скорости жидкости.

Кузнецов А. Ю., Пославський С. О. **Дослідження математичної моделі механічної суфозії.** У роботі розглядається задача про перерозподіл суфозійних частинок при вбиранні рідини до ґрунту. Приймається кінематична модель, у якій об'ємна витрата рідини, що поступає до ґрунту, є завчасно заданою функцією, а швидкість рухомих суфозійних частинок лінійно залежить від швидкості рідини.

A. Yu. Kuznietsov, S. A. Poslavsky, **Investigation of a mathematical model of the mechanical suffosion.** In the work the problem of suffosion particles redistribution during the liquid infiltration into the soil is considered. A kinematic model is accepted, in which the volumetric flow rate of the liquid, which flows into the soil, is a known function, and the moving suffosion particles velocity depends on the liquid velocity linearly.

2000 Mathematics Subject Classification: 76S05.

Введение

Интенсивные фильтрационные течения жидкостей в пористых средах могут сопровождаться структурными изменениями твердой фазы и, как следствие, изменением проницаемости среды. В работах В. Л. Полякова [1] и Н. Н. Хлапука [2] рассмотрена математическая модель механической суффозии в несвязных грунтах - внутрипочвенного размыва, переноса твердых частиц фильтрационным потоком жидкости. Основное положение этой модели состоит в том, что, если абсолютная величина истинной

(осредненной по физически бесконечно малому объему) скорости течения жидкости u превышает некоторое критическое значение u_k , то суффозионные частицы приобретают скорость $(u - u_k)$; а при $u < u_k$ скорости суффозионных частиц равны нулю. В данной работе скорость суффозионных подвижных частиц полагается равной $\alpha(u - u_k)$, где α - постоянный коэффициент, лежащий в пределах $0 < \alpha \leq 1$.

Неструктурные (суффозионные) частицы перераспределяются в грунте с образованием суффозионных зон (из которых частицы выносятся) и аккумуляционных зон (в которых частицы накапливаются). Увеличение концентрации суффозионных частиц может приводить к значительному уменьшению проницаемости грунта (в десятки раз), поскольку неструктурные частицы способны занимать значительную долю порового пространства. В свою очередь, изменение фильтрационных свойств грунта приводит к существенной перестройке течения жидкости.

1. Постановка задачи

Рассмотрим одномерную постановку задачи [1]. Будем считать, что на горизонтальной поверхности первоначально однородного и сухого грунта (рис. 1) задан объемный расход воды (в расчете на единицу площади поверхности) в виде функции времени: $I = I(t)$, $t \geq t_0$. Далее примем $t_0 = 0$. Обеспечить такой расход можно, например, создав на поверхности грунта слой воды, глубина которого соответствующим образом регулируется.

Скорости воды и неструктурных частиц имеют вертикальное направление, которое примем за направление координатной оси z . Частицы будут вымываться водой, и вблизи поверхности грунта возможно возникновение зоны “полной деформации” [1], в которой частиц нет. Аккумуляционной зоной назовем заполненную водой область, в каждой точке которой концентрация суффозионных частиц отлична от нуля. Аккумуляционная зона ограничена снизу фронтом промачивания (рис. 2).

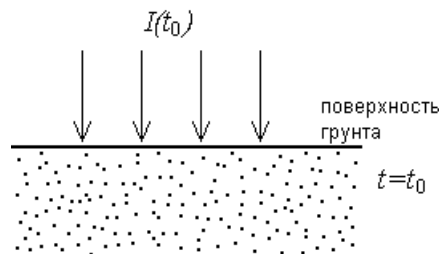


Рис. 1

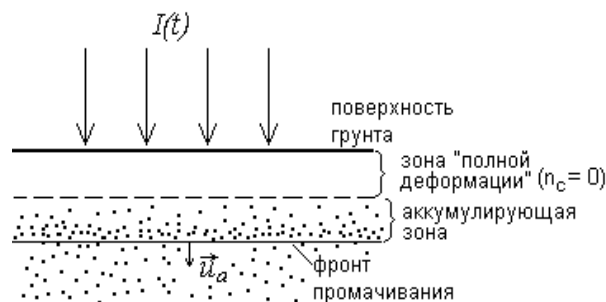


Рис. 2

Пусть n_w – объемная доля пор в грунтовом пространстве, m_s – объемная концентрация структурных частиц (скелета), n_c – объемная концентрация неструктурных (т. е. не входящих в состав недеформируемого твердого скелета) частиц, u – действительная (средняя) скорость течения воды в порах, m_c – начальная объемная концентрация суффозионных частиц.

Первоначальное распределение суффозионных частиц в грунте предполагается равномерным: $m_c = const$. Закон движения фронта промачивания запишем в виде

$$z = z_a(t). \quad (1)$$

Будем считать, что за этим фронтом поровое пространство полностью насыщено водой, т. е. при $0 < z < z_a(t)$ объемная доля пор n_w совпадает с объемной концентрацией воды в грунте. Все переменные величины, характеризующие фильтрационный поток, представляем в виде функций времени t и эйлеровой координаты z :

$$n_w = n_w(t, z), \quad n_c = n_c(t, z), \quad u = u(t, z). \quad (2)$$

Переменные n_w и n_c подчинены уравнению связи

$$n_w + n_c = 1 - m_s. \quad (3)$$

Суффозионные частицы предполагаются мало различающимися формой и размерами. Поэтому считается, что все они имеют одинаковую скорость $\alpha(u - u_k)$, если скорость воды превышает некоторое критическое значение: $u > u_k$ (В работе [1] $\alpha = 1$).

Рассмотрим случай, когда движение суффозионных частиц начинается одновременно с промачиванием грунта, т. е. когда поток $I(0)$ достаточно велик, так что выполняется условие

$$u_a = \frac{dz_a}{dt} = u|_{z=z_a} > u_k. \quad (4)$$

Случай, когда промачивание поначалу не сопровождается движением неструктурных частиц, рассматривается аналогично с соответствующей корректировкой начальных и граничных условий.

Совместное движение воды и неструктурных частиц описывается системой уравнений

$$\frac{\partial n_w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(n_w u) = 0; \quad \frac{\partial n_c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(n_c \alpha(u - u_k)) = 0, \quad (5)$$

причем n_w и n_c подчинены условию (3).

Из (5) с учетом (3) ($m_s = const$) вытекает

$$\frac{\partial}{\partial z}(n_w u + n_c \alpha(u - u_k)) = 0, \quad (6)$$

или

$$n_w u + n_c \alpha(u - u_k) = I(t), \quad (7)$$

поскольку $I(t)$ – это суммарный объемный расход через площадку единичной площади (перпендикулярную оси Oz), который совпадает с расходом воды на поверхности грунта.

Из (3), (7) получаем связь между u и n_c :

$$n_c = \frac{(1 - m_s)u - I}{\alpha u_k + (1 - \alpha)u}. \quad (8)$$

Тогда система (5) сводится к квазилинейному уравнению первого порядка [3] для функции $u(t, z)$:

$$\left(1 + \frac{l(\alpha)}{(1 - m_s)u_k} I\right) \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \left(2u - u_k - \frac{1 + l(\alpha)}{1 - m_s} I + \frac{l(\alpha)}{u_k} u^2\right) \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{u_k + l(\alpha)u}{(1 + l(\alpha)I)u_k} \frac{dI}{dt}, \quad (9)$$

где $l(\alpha) = (1 - \alpha)/\alpha$.

Заметим, что уравнение (9) справедливо только там, где $u > u_k$. Последнее неравенство определяет на плоскости (z, t) область, в которой решается уравнение (9).

На фронте промачивания объемная концентрация неструктурных частиц скачком меняется. Величина этого изменения определяется из условия непрерывности объемного расхода частиц:

$$m_c u_a = n_{ca}(\alpha u_k + (1 - \alpha)u_a). \quad (10)$$

где n_{ca} – объемная концентрация суффозионных частиц непосредственно за этим фронтом. Действительно, в системе координат, движущейся вместе с фронтом (т. е. в системе отсчета, где фронт промачивания неподвижен), скорость суффозионных частиц перед фронтом равна u_a , а за фронтом – $(\alpha u_k + (1 - \alpha)u_a)$, что представлено на следующей схеме:

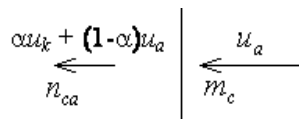


Рис. 3

Этот и все последующие рисунки ориентированы так, что ось z имеет горизонтальное направление (слева направо).

Из (3), (10) и условия (7) (записанного для $z = z_a$) получаем выражение для скорости фронта промачивания:

$$\frac{dz_a}{dt} = u_a = \frac{I}{1 - m_s - m_c}. \tag{11}$$

Очевидно, что такое же выражение для скорости фронта промачивания получается и в том случае, когда неструктурные частицы за фронтом остаются неподвижными.

Для того, чтобы твердые частицы за фронтом двигались, необходимо выполнение условия

$$u_a > u_k, \text{ или } I > (1 - m_s - m_c)u_k. \tag{12}$$

Закон движения фронта промачивания определяется интегрированием уравнения (11) (считаем $I(t)$ заданной функцией).

$$z_a(t) = \int_0^t \frac{I(\tau)}{1 - m_s - m_c} d\tau. \tag{13}$$

После этого уравнение (9) решается в области $\{(z; t) \mid t \geq 0, 0 < z < z_a(t)\}$.

Решение, представленное в [1], использует ошибочную гипотезу о том, что задний фронт $z = z_b(t)$ области, занятой движущимися суффозионными частицами, является поверхностью сильного разрыва, на которой концентрация частиц n_c скачком уменьшается до нуля. Однако такой разрыв не обладает свойством эволюционности (несмотря на то, что формально условие непрерывности объемного расхода на нем выполнено).

Неэволюционность заднего фронта можно объяснить и чисто физическими соображениями: суффозионные частицы, расположенные вплотную к заднему фронту (рис. 4), не могут увлекаться потоком воды со скоростью $\alpha(u_b - u_k)$ (здесь $u_b = u|_{z_b+0}$), поскольку их подталкивает вода, движущаяся со скоростью $u|_{z_b-0}$, но $u|_{z_b-0} < u_b$.

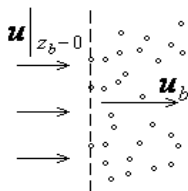


Рис. 4

Вместо заднего фронта, имеющего характер сильного разрыва, должен присутствовать “шлейф” из суффuzionных частиц, в котором их концентрация n_c непрерывно уменьшается по мере приближения к поверхности промачиваемого грунта.

2. Решение

Перейдем к безразмерным переменным:

$$\tilde{u} = \frac{u}{u_k}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{Z}, \quad \tilde{t} = \frac{u_k t}{Z}, \quad \tilde{I} = \frac{I}{u_k(1 - m_s)}, \quad (14)$$

где Z – некоторый характерный линейный размер.

Перепишем уравнение (9) в безразмерных переменных (знаки \sim над переменными далее будем опускать):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\alpha(2u - 1 + l(\alpha)u^2) - I}{1 + l(\alpha)I} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1 + l(\alpha)u}{1 + l(\alpha)I} \frac{dI}{dt}. \quad (15)$$

Решение уравнения ищется в области плоскости (z, t) , ограниченной снизу кривой $z = z_a(t)$ – траекторией фронта промачивания (рис. 5).



Рис. 5

На нижней границе области (при $z = z_a(t)$) граничное условие выглядит следующим образом:

$$u = u_a(t) = (\gamma - 1)I, \quad (16)$$

где $\gamma = 1/(1 - \beta)$, $\beta = m_c/(1 - m_s)$. Точка $(0, 0)$ плоскости (z, t) является особой точкой решения: скорость u в этой точке определена неоднозначно.

Будем далее считать, что $I(t)$ – монотонно возрастающая функция. Кроме того, будем предполагать выполненным условие

$$I(0) > 1 - \beta, \quad (17)$$

означаюче, что движение суффозионных частиц начинается с момента времени $t = 0$.

Если вблизи поверхности грунта ($z = 0$) вымылась только часть суффозионных частиц, т. е. $n_c(0, t) > 0$, то это означает, что за счет освобождения частицами пор уменьшилась скорость течения жидкости в порах. Причем она может уменьшиться только до граничного значения $u = 1$, при котором движение частиц прекращается. Если поток $I(t)$ увеличивается, то некоторая доля частиц, находящихся вблизи границы $z = 0$, приходит в движение. Следовательно, до тех пор, пока вблизи поверхности грунта имеются суффозионные частицы, на левой границе области будет выполняться условие $u = 1$.

Выражение (8) для концентрации n_c суффозионных частиц переписется в следующем виде:

$$n_c(z, t) = \frac{(1 - m_s)(u(z, t) - I(t))}{\alpha + (1 - \alpha)u(z, t)}. \quad (18)$$

Выполним замену функции u на новую функцию v :

$$v(u, t) = \frac{u - I(t)}{1 + l(\alpha)I(t)}, \quad u = v(1 + l(\alpha)I) + I, \quad v(z, t) = v(u(z, t), t). \quad (19)$$

Уравнение относительно функции $v(z, t)$ будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \alpha [(2v + l(\alpha)v^2)(1 + l(\alpha)I) + I - 1] \frac{\partial v}{\partial z} = 0. \quad (20)$$

Граничные и начальные условия тогда запишутся в виде:

$$v(z_a(t), t) = v(u = u_a(t), t) = \frac{(\gamma - 1)I(t)}{1 + l(\alpha)I(t)}, \quad v(z, t)|_{t=0} = 0. \quad (21)$$

2.1. Случай постоянного потока. Автомодельное решение

В случае $\alpha = 1$ ($l(\alpha) = 0$), $I = const$ легко получить автомодельное решение задачи (20, 21). Из анализа размерностей следует, что величину v можно представить как функцию отношения z/t :

$$v = f\left(\frac{z}{t}\right) = f(\xi). \quad (22)$$

Тогда можно получить следующие формулы для частных производных функции v :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\xi}{t} f'(\xi), \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{t} f'(\xi). \quad (23)$$

Подставив эти выражения в уравнение (20), получим:

$$\frac{f'(\xi)}{t} (-\xi + 2f(\xi) + I - 1) = 0, \quad (24)$$

откуда следуют две возможности:

$$1) f(\xi) = const, \quad (25)$$

$$2) f(\xi) = \frac{1-I}{2} + \frac{\xi}{2}. \quad (26)$$

Первое решение соответствует однородному потоку, а второе – центрированной простой волне.

На рис. 6 представлены графики концентрации частиц $n_c(z/t)$ в автомодельном решении при $I(t) \equiv const$ для различных значений I .

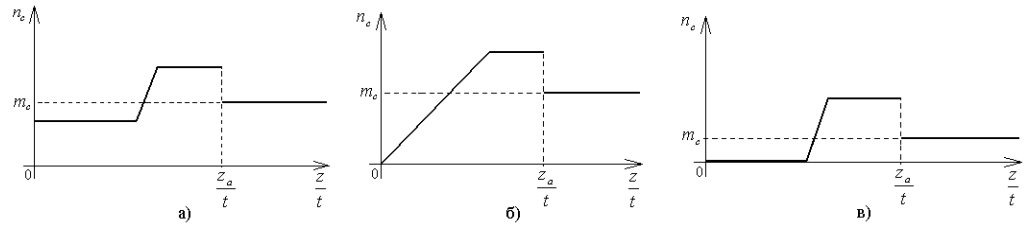


Рис. 6

Если объемный расход I меньше 1, то в промоченном грунте имеются две зоны с постоянной концентрацией частиц и зона с концентрацией, линейной по координате z (рис. 7а).

При значении объемного расхода, равном единице (рис. 7б), заднему фронту центрированной волны отвечает характеристика $z(t) \equiv 0$, причем на ней $u = 1$. На поверхности грунта частиц нет. Концентрация частиц линейно возрастает по мере углубления в грунт до некоторого значения, далее имеется зона, в которой концентрация частиц постоянна.

Если объемный расход больше 1 (рис. 7в), то заднему фронту центрированной волны отвечает характеристика, на которой $n_c = 0$. Вблизи поверхности грунта концентрация частиц равна нулю. Далее имеются две зоны: зона с концентрацией, линейно зависящей от z , и зона с постоянной концентрацией.

2.2. Случай переменного потока

Дифференциальное уравнение характеристик для задачи (20, 21) имеет вид

$$\frac{dz}{dt} = \alpha [(2v + l(\alpha)v^2)(1 + l(\alpha)I) + I - 1], \quad (27)$$

причем $v = const$ вдоль характеристик.

Семейство характеристик, выходящих с фронта промачивания, описывается следующим уравнением:

$$z(t, \xi) = z_F(t, v) - z_F(\xi, v) + z_a(\xi), \quad \xi \geq 0, \quad (28)$$

где

$$v = v(u_a(\xi), \xi), \quad (29)$$

$$z_F(t, v) = \alpha \left[(2v + l(\alpha)v^2) \left(t + l(\alpha) \int_0^t I(\tau) d\tau \right) + \int_0^t I(\tau) d\tau - t \right]. \quad (30)$$

Отметим, что $z(\xi, \xi) = z_a(\xi)$, т. е. ξ – это момент выхода соответствующей характеристики с траектории фронта промачивания (1). Функция $z_F(t, v)$ – это вспомогательная функция, которая соответствует уравнению характеристики, выходящей из начала координат.

В области, располагающейся на графике (z, t) выше характеристики, выходящей из начала координат, будет иметь место центрированная волна разрежения, подобная той, что возникает в задаче газовой динамики о движении поршня в трубе с газом [4]. Левая граница центрированной волны – кривая, на которой $v = v(u = 1, t = 0)$.

Семейство характеристик в центрированной волне описывается уравнением:

$$z(t, v) = z_F(t, v), \quad (31)$$

где $v(u = 1, t = 0) < v < v(u_a(0), t = 0)$.

В оставшейся области, лежащей левее центрированной волны (см. рис. 6), находится семейство характеристик, выходящих с оси t , которое описывается уравнением:

$$z(t, \xi) = z_F(t, v) - z_F(\xi, v), \quad (32)$$

где $v = v(u = 1, t = \xi)$, ξ – момент времени выхода характеристики с оси t , $\xi \geq 0$.

3. Анализ результатов

На рис. 7-10 представлены изображения характеристик и графики зависимости концентрации суффозионных частиц n_c от координаты z для различных наборов значений определяющих параметров. Графики зависимости n_c от координаты z при фиксированном t получены следующим образом. Для данной точки с координатами (z, t) восстанавливается характеристика, на которой эта точка находится. Зная значение u в точке на границе области, из которой выходит данная характеристика, и, пользуясь

тождеством $v = const$ на характеристике, находим значение u в точке (z, t) . Далее вычисляем искомое значение концентрации n_c .

На графиках концентрации $n_c(z)$ участок, соответствующий волне разрежения, при $\alpha = 1$ является линейным, а при $\alpha < 1$ - отрезком параболы.

С уменьшением α уменьшается скачок концентрации частиц на фронте промачивания, а в случае постоянного объемного расхода I также расширяется участок с постоянным значением концентрации.

На рис. 10 представлены изображения характеристик и график зависимости $n_c(z)$ для случая монотонно возрастающего расхода $I(t)$. Кружками обозначена характеристика, на которой $v = 0$, а, следовательно, и $n_c = 0$, т. е. левее этой характеристики частиц нет. В этом случае нет участка с постоянной концентрацией n_c .

На рис. 11 показана эволюция во времени распределения частиц в грунте для случаев постоянного и монотонно возрастающего объемного расхода I .

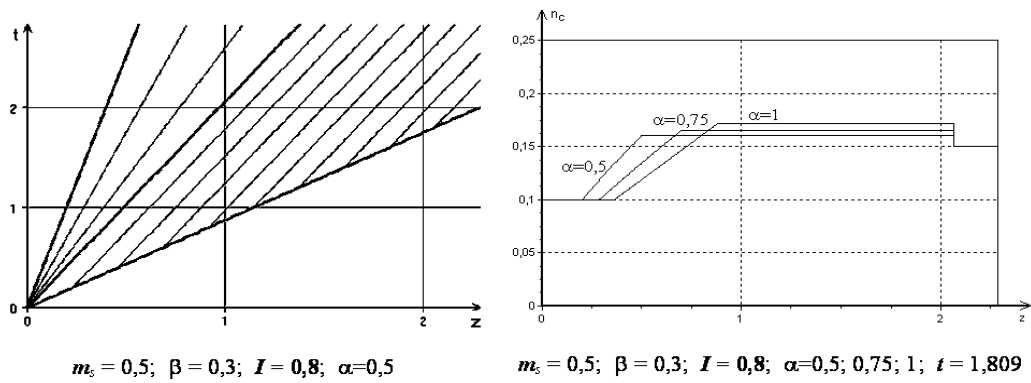


Рис. 7

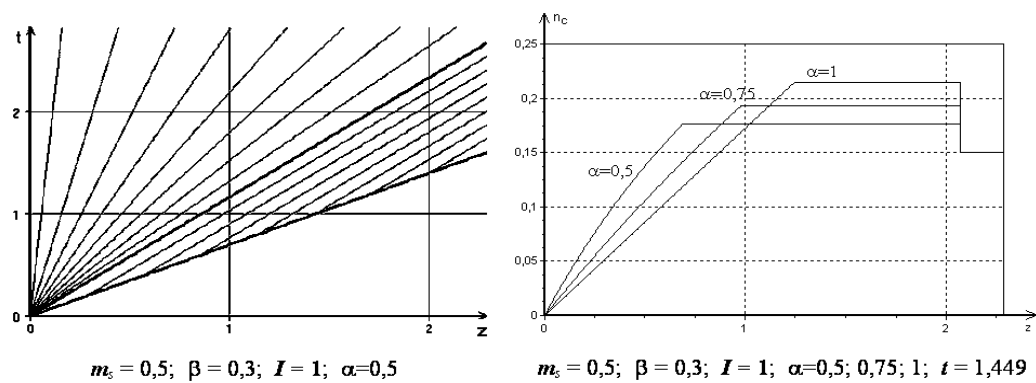


Рис. 8

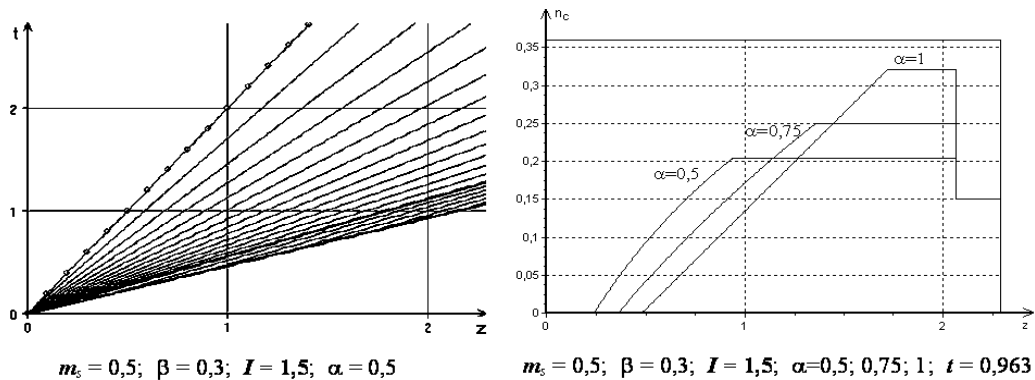


Рис. 9

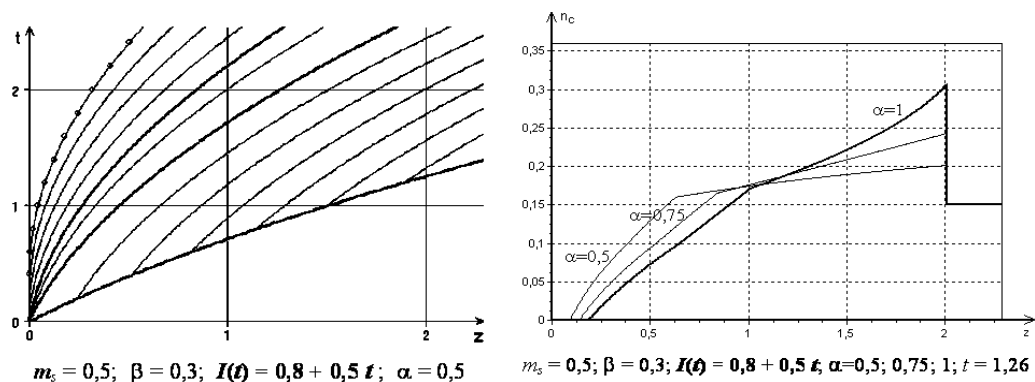


Рис. 10

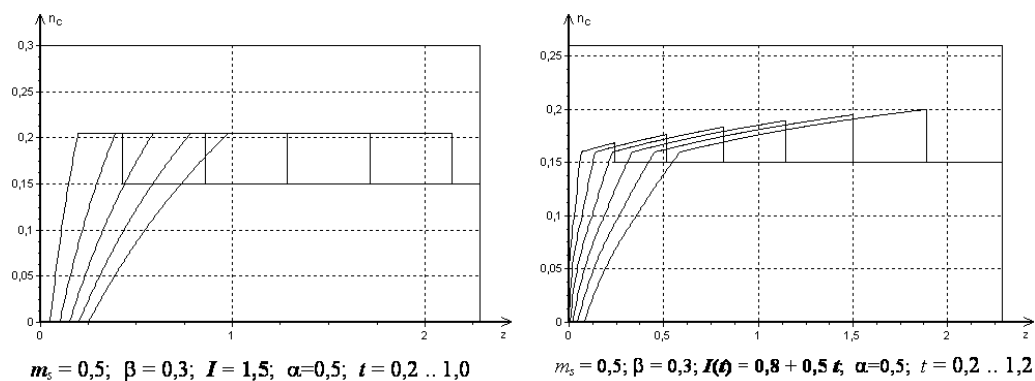


Рис. 11

Заклучение

В работе рассмотрена задача о перераспределении суффозионных частиц при впитывании жидкости в грунт. Принимается кинематическая модель, в которой объемный расход жидкости, поступающей в грунт, является заранее заданной функцией, а скорость подвижных суффозионных частиц линейно

зависит от скорости жидкости. Для случая постоянного объемного расхода I получены автомодельные решения. Для случая монотонно возрастающего объемного расхода жидкости $I(t)$ найдено аналитическое решение задачи. Получены графики распределения концентрации частиц для различных значений определяющих параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Поляков В. Л. Промачивание суффозионных грунтов. 1. Суффозия // Прикладна гідромеханіка, 2003, т. 5 (77), № 3, С. 72-82.
2. Хлапук М. М. Теоретичні основи фільтрації в середовищах, що деформуються, та їх застосування в області дренажу: Автореф. дис. д-ра техн. наук. – Рівне: Рівнен. держ. техн. ун-т, 1999. – 34 с. – укр.
3. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка. – М.: Физматлит, 2003. – 416 с.
4. Черный Г. Г. Газовая динамика. – М.: Наука, 1988. – 424 с.

Статья получена: 29.10.2009; принята: 15.11.2009.

© Кузнецов А.Ю., Пославский С.А., 2009