Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 533.72 № 875, 2009, с.48–56

Взаимодействие винтовых потоков с нестационарными плотностями

В.Д. Гордевский

Харьковский национальный университет имени В.Н.Каразина, пл. Свободы, 4, 61077, Харьков, Украина

Получено описание процесса взаимодействия между двумя потоками в газе из твердых сфер, каждый из которых является винтом с ускорением и уплотнением, для случая плотностей, зависящих от времени. Соответствующее бимодальное распределение минимизирует равномерно-интегральную норму разности между частями уравнения Больцмана.

Гордевський В.Д., **Взаємодія гвинтових течій з нестаціонарними густинами**. Здобуто описання процесу взаємодії між двома течіями в газі з пружних куль, кожна з яких є гвинтом з прискоренням та згущенням, у випадку густин, які залежать від часу. Відповідний бімодальний розподіл мінімізує рівномірно-інтегральну норму різниці між частинами рівняння Больцмана.

V.D. Gordevskyy, **Interaction of spiral flows with non-stationary densities**. The description of the process of interaction between two flows in a gas of hard spheres is obtained. Each of the flows is a screw with acceleration and packing, besides their densities depend on time. Corresponding bimodal distribution minimizes the uniform-integral norm of the difference between the sides of the Boltzmann equation.

2000 Mathematics Subject Classification: 76P05, 45K05, 82C40, 35Q55.

1. Введение.

Основным кинетическим уравнением, описывающим поведение достаточно разреженного газа, является уравнение Больцмана [1, 2]. В случае газа из твердых сфер оно имеет вид:

$$D(f) = Q(f, f), \tag{1}$$

$$D(f) = \frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x}, \tag{2}$$

$$Q(f,f) = \frac{d^2}{2}\int_{R^3} dv_1 \int_{\Sigma} d\alpha \, |(v_1 - v, \alpha)|$$

$$\cdot \Bigg[f(t,x,v')f(t,x,v_1') - f(t,x,v)f(t,x,v_1) \Bigg], \tag{3}$$

$$v_1' = v_1 + \alpha(v - v_1, \alpha); \quad v' = v - \alpha(v - v_1, \alpha), \tag{4}$$

где $f(t,v,x)$ — функция распределения частиц; $t \in R^1$ — время; $v = (v^1, v^2, v^3) \in R^3$ и $x = (x^1, x^2, v^3)$ — скорость молекулы и ее пространственная координата; $\frac{\partial f}{\partial x}$ (или просто f') — градиент функции f по переменной x; $d > 0$ — диаметр частиц; v, v_1, v', v_1' — скорости молекул до и после столкновения соответственно; $\alpha \in \Sigma \subset R^3$; Σ — единичная сфера.

Максвеллианы являются единственным известным до сих пор точным решением этого уравнения. Наиболее общий вид локальных (т.е. зависящих от t и x) максвелловских распределений был найден в [2 - 4]; в работе [5] он был детально исследован с точки зрения геометрической структуры и физического смысла. В частности, одним из важных и интересных типов максвеллианов являются ускоряющиеся и уплотняющиеся винты. Они соответствуют потокам, вращающимся вокруг неподвижных осей с постоянной угловой скоростью и обладающим ускорением вдоль этих осей.

В работах [6 - 8] получено описание переходного режима между двумя максвелловскими потоками указанного типа, но для различных частных случаев — когда отсутствует либо ускорение (а вместе с ним, и уплотнение), либо вращение.

Общему случаю посвящены работы [9,10], где рассмотрены ситуации полной либо частичной зависимости плотностей потоков от их температур, причем в последней ситуации эти плотности являются неоднородными, но стационарными (зависят лишь от x, но не от t).

Целью данной работы является построение таких бимодальных распределений с винтовыми модами, имеющими нестационарные плотности, которые позволяли бы сделать сколь угодно малой равномерно-интегральную невязку между частями уравнения Больцмана.

Точная постановка задачи приведена в разделе 2.

Основные результаты и их краткое обсуждение помещены в раздел 3.

2. Постановка задачи

Будем рассматривать два потока, которым соответствуют максвеллианы вида [5 - 10]

$$M_i = \rho_i \left(\frac{\beta_i}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\beta_i (v - \tilde{v}_i)^2}, \tag{5}$$

$$\rho_i = \bar{\rho}_i(t,x) e^{\beta_i \bar{\omega}_i{}^2 r_i^2}, \tag{6}$$

$$\bar{\rho}_i(t,x) = \bar{\rho}_i \exp\left\{ \beta_i \left[\left(\frac{\bar{\omega}_i}{\bar{\omega}_i{}^2}(\bar{\omega}_i, \bar{v}_i) - \bar{u}_i t \right)^2 + 2\bar{u}_i x \right] \right\}, \tag{7}$$

$$r_i^2 = \frac{1}{\bar{\omega_i}^2}[\bar{\omega_i} \times (x - x_{0i})]^2, \tag{8}$$

$$x_{0i} = \frac{1}{\bar{\omega_i}^2}[\bar{\omega_i} \times \bar{v_i}], \tag{9}$$

$$\tilde{v_i} = \bar{v_i} + [\bar{\omega_i} \times x] - \bar{u_i}t, \tag{10}$$

$$[\bar{u_i} \times \bar{\omega_i}] = 0, \quad i = 1, 2. \tag{11}$$

Здесь гидродинамические параметры таковы: ρ_i — плотности, $\beta_i = \frac{1}{2T_i}$ — обратные температуры, $\tilde{v_i}$ — массовые скорости потоков, а $\bar{\rho_i} > 0, \bar{v_i}, \bar{\omega_i}, \bar{u_i} \in R^3$ — некие скалярные и векторные константы, $i = 1, 2$.

Бимодальные распределения будем искать в виде:

$$f = \varphi_1 M_1 + \varphi_2 M_2, \tag{12}$$

где $\varphi_i = \varphi_i(t, x) \in C^1(R^4), \varphi_i \geq 0$ — коэффициентные функции, ограниченные вместе с $\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}, i = 1, 2$ на R^4.

Требуется найти такие φ_i и такое поведение всех параметров, чтобы плотности потоков, входящих в (12), оставались нестационарными, и в то же время равномерно-интегральная (или "смешанная") невязка вида [5, 6, 8 - 10]

$$\Delta = \sup_{(t,x) \in R^4} \int_{R^3} dv \, |D(f) - Q(f, f)| \tag{13}$$

была произвольно малой.

Приведем теперь несколько возможных решений указанной задачи.

3. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть функции φ_1, φ_2 имеют вид:*

$$\varphi_i(t, x) = \frac{D_i}{(1 + t^2)^{l_i}} e^{-\beta_i \bar{\omega}_i^2 r_i^2} C_i(x + \lambda_i(t) \bar{\omega}_i), \tag{14}$$

где

$$\lambda_i(t) = \frac{t^2 \bar{u}_i^2}{2 \bar{u}_i \bar{\omega}_i}, \tag{15}$$

константы $l_i \geq 1/2, D_i > 0$, а $C_i \geq 0$ — произвольные гладкие финитные либо быстроубывающие функции, $i = 1, 2$. Пусть, кроме того,

$$\bar{\omega}_i = \frac{\bar{\omega}_{0i}}{\beta_i^{m_i}}, \tag{16}$$

$$\bar{u}_i = \frac{\bar{u}_{0i}}{\beta_i^{n_i}}, \tag{17}$$

где

$$m_i > \frac{1}{2}, \tag{18}$$

$$n_i \geq 1, \tag{19}$$

а векторы $\bar{\omega}_{0i}, \bar{u}_{0i}, i = 1, 2$ *постоянны, причем*

$$(\bar{\omega}_{0i}, \bar{v}_i) = 0. \tag{20}$$

Тогда:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall D_1, D_2 : 0 < D_1, D_2 < \delta, \exists \beta_0 > 0, \forall \beta_1, \beta_2 > \beta_0,$$

$$\Delta < \varepsilon. \tag{21}$$

Доказательство. Подстановка (12) в (2), (3) и затем — в (13), с учетом (5) – (11), известных свойств максвеллианов [1, 2] и очевидных упрощений, связанных с предположением (20), а также с использованием техники, развитой в [6 - 10], приводит к следующей оценке сверху для невязки Δ:

$$\Delta \leq \Delta' = \sup_{(t,x)\in R^4} \sum_{i,j=1, i\neq j}^{2} \left[\int_{R^3} \left| \left\{ \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(\frac{u}{\sqrt{\beta_i}} + \tilde{v}_i \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right\} e^{\beta_i \bar{\omega}_i{}^2 r_i^2} \right.\right.$$

$$\left. + d^2 \varphi_i \varphi_j e^{\beta_i \bar{\omega}_i{}^2 r_i^2 + \beta_j \bar{\omega}_j{}^2 r_j^2} \frac{\hat{\rho}_j(t,x)}{\sqrt{\pi}} \int_{R^3} F_{ij}(u,t,x,w) e^{-w^2} dw \right| \hat{\rho}_i(t,x) \pi^{-3/2} e^{-u^2} du$$

$$\left. + d^2 \varphi_1 \varphi_2 e^{\beta_1 \bar{\omega}_1{}^2 r_1^2 + \beta_2 \bar{\omega}_2{}^2 r_2^2} \frac{\hat{\rho}_1(t,x)\hat{\rho}_2(t,x)}{\pi^2} \int_{R^6} F_{ij}(u,t,x,w) e^{-u^2-w^2} du dw \right], \tag{22}$$

где

$$F_{ij}(u,t,x,w) = \left| \frac{u}{\sqrt{\beta_i}} + \tilde{v}_i - \tilde{v}_j - \frac{w}{\sqrt{\beta_j}} \right|, \quad i \neq j, \tag{23}$$

$$\hat{\rho}_i(t,x) = \bar{\rho}_i e^{\beta_i [\bar{u}_i^2 t^2 + 2\bar{u}_i x]} \quad i = 1, 2. \tag{24}$$

Подставим теперь в (22) вместо $\varphi_i, i = 1, 2$ выражения (14) с учетом (15), которые дают:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = D_i e^{-\beta_i \bar{\omega}_i^2 r_i^2} \frac{t}{(1+t^2)^{l_i}} \left[\frac{-2l_i}{1+t^2} C_i(y) + \big(C_i'(y), \bar{\omega}_i\big) \frac{\bar{u}_i^2}{\bar{u}_i \bar{\omega}_i} \right], \tag{25}$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = \frac{D_i}{(1+t^2)^{l_i}} e^{-\beta_i \bar{\omega}_i^2 r_i^2} \big\{ -2\beta_i \big[[\bar{\omega}_i \times (x - x_{0i})] \times \bar{\omega}_i \big] C_i(y) + C_i'(y) \big\}, \tag{26}$$

где ради краткости введено обозначение:

$$y = x + \lambda_i(t) \bar{\omega}_i, \quad i = 1, 2. \tag{27}$$

Поскольку супремум, взятый по $(t, x) \in R^4$, очевидно, можно теперь брать по $(t, y) \in R^4$, то, вспоминая (10), вместо (22) из (24) – (27), (14) будем иметь:

$$\Delta' = \sup_{(t,y)\in R^4} \sum_{i,j=1, i\neq j}^{2} \frac{D_i}{(1+t^2)^{l_i}} \left[\int_{R^3} \left| \frac{-2l_i t}{1+t^2} C_i(y) + \big(C_i'(y), \bar{\omega}_i\big) \frac{\bar{u}_i^2 t}{\bar{u}_i \bar{\omega}_i} \right.\right.$$

$$+\left(\frac{u}{\sqrt{\beta_i}}+\bar{v}_i+[\bar{\omega}_i\times y]-\bar{u}_i t\right)$$

$$\cdot\left\{-2\beta_i\big[[\bar{\omega}_i\times(y-x_{0i})]\times\bar{\omega}_i\big]C_i(y)+C_i'(y)\right\}$$

$$+\frac{D_j}{(1+t^2)^{l_j}}C_i(y)C_j(y)\frac{\bar{\rho}_j d^2}{\sqrt{\pi}}e^{2\beta_j\bar{u}_j y}\int_{R^3}F_{ij}e^{-w^2}dw\bigg|\bar{\rho}_i e^{2\beta_i\bar{u}_i y}\pi^{-3/2}e^{-u^2}du$$

$$+\frac{D_j}{(1+t^2)^{l_j}}\frac{\bar{\rho}_i\bar{\rho}_j d^2}{\pi^2}C_i(y)C_j(y)e^{2y(\beta_i\bar{u}_i+\beta_j\bar{u}_j)}\int_{R^6}F_{ij}e^{-u^2-w^2}dudw\bigg]. \qquad (28)$$

Благодаря тому, что теперь, очевилно, (23) приобретает вид

$$F_{ij}=\left|\frac{u}{\sqrt{\beta_i}}+\bar{v}_i+[\bar{\omega}_i\times y]-\bar{u}_i t-\bar{v}_j-[\bar{\omega}_j\times y]+\bar{u}_i t-\frac{w}{\sqrt{\beta_j}}\right|, \qquad (29)$$

то условия, наложенные на функции C_i и константы $l_i, i=1,2$, в нашей теореме, как видно из (28), гарантируют существование конечного супремума по t, y (сходимость всех интегралов тем более очевидна). Значит, величина Δ' корректно определена. Подставляя теперь в (28) выражения (16), (17) и переходя затем к пределу при $\beta_1,\beta_2\to+\infty$ так же, как это было сделано в [9, 10], с учетом (18), (19), откуда легко видеть, что

$$\lim_{\beta_i\to+\infty,i=1,2}e^{2\beta_i\bar{u}_i y}=\mu_i(y)=\left[\begin{array}{ll}1, & n_i>1,\\ e^{2\bar{u}_{oi}y}, & n_i=1,\end{array}\right. \qquad (30)$$

и

$$\lim_{\beta_i\to+\infty,i=1,2}F_{ij}=|\bar{v}_i-\bar{v}_j|,\quad i\neq j,\quad i,j=1,2, \qquad (31)$$

получим:

$$\lim_{\beta_i\to+\infty,i=1,2}\Delta'=\sum_{i,j=1,i\neq j}^{2}\bar{\rho}_i\sup_{(t,y)\in R^4}\bigg[\mu_i(y)\frac{D_i}{(1+t^2)^{l_i}}\bigg|\bar{v}_i C_i'(y)-\frac{2l_i t}{1+t^2}C_i(y)$$

$$+\frac{D_j}{(1+t^2)^{l_j}}C_i(y)C_j(y)\bar{\rho}_j\mu_j(y)\pi d^2|\bar{v}_i-\bar{v}_j|\bigg|\bigg]$$

$$+2\pi d^2|\bar{v}_1-\bar{v}_2|\bar{\rho}_1\bar{\rho}_2 D_1 D_2\sup_{y\in R^3}[\mu_1(y)\mu_2(y)C_1(y)C_2(y)]. \qquad (32)$$

Из (32) благодаря (30) и свойствам функций $C_i, i=1,2$, обеспечивающим конечность супремумов по t и y, непосредственно следует (21). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть*

$$\varphi_i(t,x)=D_iC_i([\bar{\omega}_{0i}\times x])E_i(t)e^{-\beta_i\{[\bar{\omega}_i\times(x-x_{0i})]^2+2\bar{u}_i x\}},\quad i=1,2, \qquad (33)$$

где функции C_i и константы D_i таковы же , как в теореме 1, а $E_i(t) \geq 0$ — финитные либо быстроубывающие гладкие функции. Кроме того, пусть выполнены условия (16) – (18) и

$$n_i > \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2 \tag{34}$$

Тогда вновь справедливо (21).

Доказательство. Поскольку теперь, вследствие (20), выражение (24) сохранится, но после подстановки (33) в (22) второе слагаемое в показателе сократится, а производные функций φ_i будут выглядеть так:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = D_i C_i([\bar{\omega}_{0i} \times x]) E_i'(t) e^{-\beta_i \{[\bar{\omega}_i \times (x - x_{0i})]^2 + 2\bar{u}_i x\}}, \tag{35}$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = D_i E_i(t) e^{-\beta_i \{[\bar{\omega}_i \times (x - x_{0i})]^2 + 2\bar{u}_i x\}}$$

$$\cdot \Big\{ \big[C_i'([\bar{\omega}_{0i} \times x]) \times \bar{\omega}_{0i}\big] - 2C_i([\bar{\omega}_{0i} \times x])\beta_i \big(\big[[\bar{\omega}_i \times (x - x_{0i})] \times \bar{\omega}_i\big] + \bar{u}_i \big) \Big\}, \quad i = 1, 2, \tag{36}$$

то в результате подстановки всех этих величин в (22) и преобразований, использующих (7) – (11) и (20), будем иметь (существование всех супремумов, очевидно, вытекает из (33) и условий теоремы):

$$\Delta' = \sup_{(t,x) \in R^4} \sum_{i,j=1, i \neq j}^{2} \Bigg[\int_{R^3} \Bigg| D_i C_i([\bar{\omega}_{0i} \times x]) E_i'(t) + D_i E_i(t)$$

$$\cdot \Big\{ \Big(\frac{u}{\sqrt{\beta_i}} + \tilde{v}_i \Big) \big[C_i'([\bar{\omega}_{0i} \times x]) \times \bar{\omega}_{0i}\big] + 2C_i([\bar{\omega}_{0i} \times x] \sqrt{\beta_i}$$

$$\cdot \big(-\bar{\omega}_i^2 (u, x) + (u, \bar{\omega}_i, \bar{v}_i) + (u, \bar{\omega}_i)(x, \bar{\omega}_i) - (u, \bar{u}_i) + \sqrt{\beta_i} t \bar{u}_i^2 \Big\}$$

$$+ D_i D_j C_i([\bar{\omega}_{0i} \times x]) C_j([\bar{\omega}_{0j} \times x]) E_i(t) E_j(t) \frac{\bar{\rho}_j d^2}{\sqrt{\pi}}$$

$$\cdot e^{\beta_j \bar{u}_j^2 t^2} \int_{R^3} F_{ij} e^{-w^2} dw \Bigg| e^{\beta_i \bar{u}_i^2 t^2} \bar{\rho}_i \pi^{-3/2} e^{-u^2} du$$

$$+ \exp\{t^2(\beta_1 \bar{u}_1^2 + \beta_2 \bar{u}_2^2)\} \frac{\bar{\rho}_1 \bar{\rho}_2 d^2}{\pi^2} D_1 D_2$$

$$C_1([\bar{\omega}_{01} \times x]) C_2([\bar{\omega}_{02} \times x]) E_1(t) E_2(t) \int_{R^6} F_{ij} e^{-u^2 - w^2} du dw \Bigg]. \tag{37}$$

Далее, поскольку (31) сохраняется, а в силу (17) и (34)

$$\lim_{\beta_i \to +\infty} e^{\beta_i \bar{u}_i^2 t^2} = 1, \tag{38}$$

то, вспоминая еще (16), (18) и учитывая, что, как легко видеть,

$$\lim_{\beta_i\to+\infty}\left(\frac{u}{\sqrt{\beta_i}}+\tilde{v}_i\right)\left[C_i'([\bar{\omega}_{0i}\times x])\times\bar{\omega}_{0i}\right]=\left(\bar{v}_i,C_i',\bar{\omega}_{0i}\right), \tag{39}$$

получим:

$$\lim_{\beta_i\to+\infty,i=1,2}\Delta'=\sum_{i,j=1,i\neq j}^{2}D_i\bar{\rho}_i\sup_{(t,x)\in R^4}\Big|C_i([\bar{\omega}_{0i}\times x])E_i'(t)+E_i(t)\big(\bar{v}_i,C_i'([\bar{\omega}_{0i}\times x]),\bar{\omega}_{0i}\big)$$

$$+D_j\bar{\rho}_j\pi d^2|\bar{v}_i-\bar{v}_j|C_i([\bar{\omega}_{0i}\times x])C_j([\bar{\omega}_{0j}\times x])E_i(t)E_j(t)\Big|$$

$$+2\pi d^2|\bar{v}_1-\bar{v}_2|\bar{\rho}_1\bar{\rho}_2D_1D_2\sup_{t\in R^1}\big\{(E_1(t)E_2(t)\big\}\sup_{x\in R^3}\big\{C_1([\bar{\omega}_{01}\times x])C_2([\bar{\omega}_{02}\times x])\big\}, \tag{40}$$

откуда, как и ранее, следует (21). Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть*

$$\bar{v}_i=0,\quad i=1,2, \tag{41}$$

а функции φ_i имеют вид:

$$\varphi_i(t,x)=D_iC_i([\bar{\omega}_{0i}\times x])E_i(t)e^{-2\beta_i\bar{u}_ix},\quad i=1,2, \tag{42}$$

где D_i, C_i и E_i таковы же, как в теореме 2, причем вновь предполагается (16) – (18) и (34). Тогда (21) остается в силе.

Доказательство. Благодаря (41), во-первых, сохраняется формула (24), а во-вторых, как видно из (8), (9),

$$\beta_i\bar{\omega}_i^2r_i^2=\beta_i[\bar{\omega}_i\times x]^2,\quad i=1,2. \tag{43}$$

Значит, подстановка (42) в (22) с учетом (10) и вновь (41), дает:

$$\Delta'=\sup_{(t,x)\in R^4}\sum_{i,j=1,i\neq j}^{2}\left[\int_{R^3}\bigg|\bigg\{D_iE_i'(t)C_i([\bar{\omega}_{0i}\times x])+D_iE_i(t)\right.$$

$$\cdot\left(\frac{u}{\sqrt{\beta_i}}+[\bar{\omega}_i\times x]-\tilde{u}_it\right)\left(\left[C_i'([\ \bar{\omega}_{0i}\times x])\times\bar{\omega}_{0i}\right]-2\beta_i\bar{u}_iC_i([\bar{\omega}_{0i}\times x])\right)\bigg\}e^{\beta_i[\bar{\omega}_i\times x]^2}$$

$$+D_iD_jC_i([\bar{\omega}_{0i}\times x])C_j([\bar{\omega}_{0j}\times x])E_i(t)E_j(t)\frac{\bar{\rho}_jd^2}{\sqrt{\pi}}\exp\{\beta_i[\bar{\omega}_i\times x]^2+\beta_j[\bar{\omega}_j\times x]^2+\beta_j\bar{u}_j^2t^2\}$$

$$\cdot\int_{R^3}F_{ij}e^{-w^2}dw\bigg|e^{\beta_i\bar{u}_i^2t^2}\bar{\rho}_i\pi^{-3/2}e^{-u^2}du$$

$$+D_iD_jC_i([\bar{\omega}_{0i}\times x])C_j([\bar{\omega}_{0j}\times x])E_i(t)E_j(t)\frac{\bar{\rho}_i\bar{\rho}_jd^2}{\pi^2}$$

$$\cdot \exp\{t^2(\beta_i \bar{u}_i^2 + \beta_j \bar{u}_j^2) + \beta_i[\bar{\omega}_i \times x]^2 + \beta_j[\bar{\omega}_j \times x]^2\} \int_{R^6} F_{ij} e^{-u^2-w^2} dudw \Bigg] \quad (44)$$

(эта величина конечна, как и ранее, ибо F_{ij} сохраняют вид (29) при $\bar{v}_1 = \bar{v}_2 = 0$ и переменной x вместо y, т.е. функции C_i и E_i обеспечивают ограниченность всех возникающих здесь произведений по переменным t и $[\bar{\omega}_{0i} \times x]$). При переходе к пределу по $\beta_i, i = 1, 2$ следует учесть, что благодаря (18) и (34) равенство (38) остается в силе, выражение (43) просто стремится к нулю, а (31) сильно упрощается:

$$\lim_{\beta_i \to +\infty, i=1,2} F_{ij} = 0. \quad (45)$$

Отсюда:

$$\lim_{\beta_i \to +\infty, i=1,2} \Delta' = \sum_{i=1}^{2} D_i \bar{\rho}_i \sup_{t \in R^1} \left| E_i'(t) \right| \sup_{x \in R^3} C_i([\bar{\omega}_{0i} \times x]), \quad (46)$$

что, очевидно, и влечет (21). Теорема 3 доказана.

Замечание 1. В последней теореме наложено условие (41), которое жестче предыдущих (а именно, (20)), что и приводит к наиболее простому виду (46) для предела величины Δ', впрочем, при ином выражении для $\varphi_i, i = 1, 2$ (т.е. (42) вместо (33) или (14), (15)).

Замечание 2. В рамках данной работы векторы $\bar{v}_i$ либо попросту равны нулю, либо перпендикулярны векторам $\bar{\omega}_i, i = 1, 2$. Интересно отметить, что в работе [10], где аналоги выражений (14), (33) и (42) таковы, что зависимость от времени в плотностях потоков исчезает (стационарный случай — см. Введение), указанные векторы, наоборот, либо вообще произвольны, либо параллельны $\bar{\omega}_i$ (при этом на числа $m_i, n_i, i = 1, 2$ также иногда накладываются несколько иные ограничения, чем (18), (19) или (34)).

Замечание 3. Укажем также на то, что можно существенно расширить количество приведенных здесь результатов за счет изменения параметров m_i, n_i в более широких рамках и наложения тех или иных дополнительных условий на функции и параметры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978.-495 с.

2. Карлеман Т. Математические задачи кинетической теории газов. М.: ИИЛ, 1960.- 118 с.

3. Grad H. On the kinetic theory of rarefied gases// Comm. Pure and Appl. Math.–1949.– V. 2, No.**4**.–P.331–407.

4. Фридлендер О.Г. Локально-максвелловские решения уравнения Больцмана// Прикл. мат. и мех.–1965.– Т. 29, вып. **5**.–С.973–977.

5. Gordevskyy V.D. On the non-stationary Maxwellians// Math. Meth. Appl. Sci. –2004.– V.27, No. **2**.– P.231-347.

6. Гордевский В.Д. Двухпотоковое распределение с винтовыми модами// Теор. и мат. физика.– 2001.– Т. 126, №**2**.– С. 283–300.

7. Gordevsky V.D. Transitional Regime Between Spiral Equilibrium States of a Gas.// Vysnik Kharkiv Univ., Ser. Mat. Prykl. Mat. Mech.–2001.– **514**.–P.17–33.

8. Gordevskyy V.D., Andriyasheva N.V. Interaction between "accelerating-packing" flows in a low-temperature gas// Math. Phys., Anal., Geom.–2009.– V.5, No. **1**.– P.38–53.

9. Gordevskyy V.D. Rotating flows with acceleration and compacting in a model of hard spheres // Teoret. i Matem. Fiz.– 2009.– V. 161, No. **2**.–P.278–286.

10. Гордевский В.Д. Винтовые потоки с плотностями, частично зависящими от температур// Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, Сер. "Математика, прикладна математика і механіка", – 2009.– **850**. – с. 37–44.

Статья получена: 20.10.2009; окончательный вариант: 11.11.2009; принята: 15.11.2009.