Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 512.54 № 875, 2009, с.10–24

Представление кратных сплетений конечной группы в группе автоморфизмов корневого дерева

Е.Л. Беркович

Одесский Национальный Университет им. И.И. Мечникова

В работе строится мономорфизм группы $H \wr W_n$ в группу W_{m+1}, где H – это произвольная конечная группа, $W_n = (...((H \wr H) \wr H)...) \wr H$ (n раз), $k = |H|$, $m = (k^n - 1)/(k - 1)$. На основе этого вложения затем строится вложение произвольного кратного сплетения в сплетение W_n для достаточно большого n.

Беркович Є. **Представлення кратних вінцевих добутків скінченої групи у групі автоморфізмів корневого дерева**. В роботі побудован мономорфізм групи $H \wr W_n$ в групу W_{m+1}, де H – довільна скінчена група, $W_n = (...((H \wr H) \wr H)...) \wr H$ (n раз), $k = |H|$, $m = (k^n - 1)/(k - 1)$. На основі цього мономорфізма далі будується мономорфізм довільного кратного вінцевого добутку в групу W_n для достатньо великого n.

Berkovich E. **Representation of wreath powers of a finite group in the automorphism group of a rooted tree**. In this paper we construct a monomorphism of the group $H \wr W_n$ to the group W_{m+1}, where H is an arbitrary finite group, $W_n = (...((H \wr H) \wr H)...) \wr H$ (n times), $k = |H|$, $m = (k^n - 1)/(k - 1)$. Based on this monomorphism we construct a monomorphism of any wreath power to group W_n for sufficiently great n.

2000 Mathematics Subject Classification 20E22.

Введение

В данной работе мы рассматриваем кратное сплетение произвольной конечной группы H. Операция сплетения абстрактных групп не является ассоциативной, поэтому, расставляя скобки в выражении $H \wr H \wr \cdots \wr H$ различными способами, мы будем получать различные группы. Все получающиеся таким образом группы будем называть кратными сплетениями группы H. Кратные сплетния со следующей расстановкой скобок $(...((H \wr H) \wr H)...) \wr H$ (n раз) обозначим $W_n(H)$. Более формально:

$$\begin{aligned} W_1(H) &= H \\ W_n(H) &= W_{n-1}(H) \wr H \end{aligned}$$

Элементы группы $W_n(H)$ можно интерпретировать как автоморфизмы k-однородного корневого дерева с $n+1$ уровнем, где k – это порядок группы H. Особенно хорошо изучены $W_n(Z_p)$, где Z_p – это циклическая группа порядка p. Элементы $W_n(Z_p)$ можно представлять так называемыми таблицами Калужнина ([2]). Группы $W_n(Z_p)$ играют важную роль в теории групп, поскольку являются силовскими p-подгруппами симметрической группы.

Для изучения кратных сплетений произвольной конечной группы H с произвольной расстановкой скобок были бы полезны вложения таких групп в $W_n(H)$ В настоящей работе построен мономорфизм $\phi_n : H \wr W_n(H) \to W_{m+1}(H)$, где $k = |H|$, $m = (k^n - 1)/(k - 1)$. Такое m является минимально возможным, поскольку для $m < (k^n - 1)/(k - 1)$ группа $W_{m+1}(H)$ содержала бы меньше элементов, чем группа $H \wr W_n(H)$. Этот случай наиболее важный. Как мы увидим в дальнейшем, эта конструкция легко обобщается, и можно получить мономорфизм $\phi'_{n,l} : W_l \wr W_n \to W_{m+l}$, а затем по индукции построить вложение произвольного кратного сплетения в группу W_n для достаточно большого n.

В работе [3] построено вложение $\omega_n : (Z_p \wr W_n(Z_p)) \to W_m(Z_p)$, $m = (p^n - 1)/(p - 1)$ с существенным использованием аппарата таблиц Калужнина, а также представления автоморфизмов дерева в группе унитреугольных матриц. Конструкция вложения, описываемая в данной работе, и используемый аппарат отличается от вложения, построенного Леоновым (см. [3]).

1. Предварительные замечания

В дальнейшем мы будем использовать следующие стандартные обозначения. Для конечного множества X посредством X^n будет обозначаться множество слов длины n, а X^* – это множество всех конечных слов над алфавитом X. Символом “$\emptyset$” мы будем обозначать пустое слово, не содержащее ни одного символа

В качестве символов алфавита мы часто будем использовать элементы группы. Поэтому, чтобы различать конкатенацию и операцию в группе, условимся операцию в группе обозначать символом “$*$”, и, если необходимо, в индексе указывать, о какой именно группе идет речь. Например, $*_G$ обозначает операцию в группе G.

Пусть A – произвольная группа, B – некоторое конечное множество. Тогда множество всех отображений $f : B \to A$ относительно операции поточечного умножения:

$$(f_1 * f_2)(b) = f_1(b) *_A f_2(b)$$

образует группу, которую мы будем обозначать A^B.

Определение 1 *Пусть A и B — две произвольные группы. Тогда сплетение $A \wr B$ — это множество*

$$\{(b, f) :\ b \in B,\ f : B \to A\}$$

с операцией $*_{A\wr B}$, *действующей по правилу:*

$$(b_1, f_1) *_{A\wr B} (b_2,\, f_2) = \left(b_1 *_B b_2, f_1^{b_2} *_{A^B} f_2\right),$$

где $f^b(x) = f\,(b *_B x)$, *для любых* $b, x \in B,\ f \in A^B$.

(см.[1], стр.72-73)

Сплетение можно также рассматривать как группу преобразований множества $B \times A$. Поставим в соответствие каждому элементу сплетения $(b, f) \in A \wr B$ преобразование

$$\alpha_{b,\,f} : B \times A \to B \times A,$$

действующее следующим образом. Для любых $b_0 \in B$, $a_0 \in A$ положим

$$\alpha_{b,\,f}\,(b_0,\, a_0) = (b *_B b_0,\ f\,(b_0) *_A a_0) \tag{1}$$

Несложно видеть, что отображение $\alpha_{b,\,f}$ биективно.

Лемма 1 *Пусть* A, B *— две группы. Множество*

$$\{\alpha_{b,\,f} :\ b \in B,\ f : B \to A\}$$

относительно композиции образует группу, изоморфную сплетению $A \wr B$.

Причем, отображение ε, *ставящее в соответствие элементу* $(b, f) \in A \wr B$ *преобразование* $\alpha_{b,\,f}$, *является изоморфизмом.*

Доказательство. Несложно показать, что отображение ε инъективно.

Докажем гомоморфность ε. Пусть $(b_1,\ f_1),\ (b_2,\ f_2) \in A \wr B$. Зафиксируем произвольные элементы $b_0 \in B$ и $a_0 \in A$. Рассмотрим действие композиции $\alpha_{b_1,\,f_1}$ и $\alpha_{b_2,\,f_2}$ на $(b_0,\ a_0) \in B \times A$:

$$\alpha_{b_1,\,f_1} \circ \alpha_{b_2,\,f_2}\,(b_0, a_0) =$$

$$= \alpha_{b_1,\,f_1}\,(b_2 *_B b_0,\ f_2(b_0) *_A a_0) =$$

$$= (b_1 *_B b_2 *_B b_0,\ f_1(b_2 *_B b_0) *_A f_2(b_0) *_A a_0) =$$

$$= \left(b_1 *_B b_2 *_B b_0,\ \left(f_1^{b_2} *_{A^B} f_2\right)(b_0) *_A a_0\right) =$$

$$= \alpha_{b_3,\,f_3}\,(b_0, a_0),$$

где $b_3 = b_1 *_B b_2,\ f_3 = f_1^{b_2} *_{A^B} f_2$.

Таким образом,

$$\alpha_{b_1,\,f_1} \circ \alpha_{b_2,\,f_2} = \alpha_{b_3,\,f_3}$$

С другой стороны, по определению сплетения, $(b_1,\ f_1) *_{A\wr B} (b_2,\ f_2) = (b_3,\ f_3)$. ЧТД.

Элементы кратного сплетения $(...((H \wr H) \wr H)...) \wr H$ удобно представлять автоморфизмами корневого дерева. Поэтому мы определим здесь понятие автоморфизма однородного корневого дерева и сформулируем некоторые известные свойства [4], которые понадобятся в дальнейшем. Кроме того, мы определим группу W_n автоморфизмов дерева, изоморфную кратному сплетению $(...((H \wr H) \wr H)...) \wr H$.

Зафиксируем произвольную конечную группу H. Обозначим $k = |H|$ – число элементов в группе H.

Мы будем также рассматривать элементы группы H как символы алфавита. А элементы кратного сплетения мы будем интерпретировать как автоморфизмы однородного корневого дерева, вершинами которого являются слова над алфавитом H.

Определим понятие регулярного дерева, следуя [5] (раздел 1.2.1).

Определение 2 *Обозначим T_n регулярное корневое k-дерево, вершины которого — это слова $v \in H^*$ длины не превосходящей n, при этом вершины u и v инцидентны тогда и только тогда, когда $u = va$ или $v = ua$ для некоторого $a \in H$*

Пустое слово называется корнем дерева T_n. Число вершин дерева T_n, не находящихся на последнем уровне, равно $m = (k^n - 1)/(k - 1)$.

Определение 3 *Назовем уровнем вершины $v \in T_n$ длину слова v. Обозначается $l(v)$.*

Определение 4 *Вершина v называется потомком вершины u, если u является началом слова v.*

Определение 5 *Пусть $v \in T_n$. Поддеревом $SubTr(v)$ дерева T_n называется множество всех потомков вершины v.*

Дадим теперь определение автоморфизма корневого дерева (см. [4], стр. 183-184).

Определение 6 *Пусть T_n – корневое дерево. Биективное отображение $x : T_n \to T_n$ является автоморфизмом, если*

1) $x(\emptyset) = \emptyset$ (x оставляет на месте корневую вершину);

2) вершины u и v инцидентны тогда и только тогда, когда $x(u)$ и $x(v)$ инцидентны (x сохраняет отношение инцидентности).

Пусть $x : T_n \to T_n$ – автоморфизм дерева, $v \in T_n$. Образ слова v под действием автоморфизма x мы будем обозначать двумя способами: $x(v)$ и v^x.

Множество всех автоморфизмов T_n образует группу и обозначается $Aut(T_n)$. Как известно, группа $Aut(T_n)$ изоморфна сплетению n симметрических групп (см. [4])

Любой автоморфизм корневого дерева является автоматным преобразованием. Поскольку тут речь идет о конечных деревьях, любой автоморфизм из $Aut(T_n)$ представляется конечным автоматом.

Автоморфизмы дерева сохраняют уровень вершины, отношение быть потомком. Отсюда легко установить

Предложение 1 *Для любого $x \in Aut(T_n)$ и вершины $v \in T_n$, если $u = x(v)$, то вершины u и v находятся на одном уровне, и образ $SubTr(v)$ равен $SubTr(u)$.*

Из определения автоморфизма также следует

Предложение 2 *Слово $u \in T_n$ будет началом $v \in T_n$ тогда и только тогда, когда $x(u)$ – начало $x(v)$.*

Последнее влечет важный для дальнейшего факт:

Предложение 3 *Автоморфизм дерева T_n однозначно определяется своими значениями на вершинах уровня n.*

Автоморфизм дерева индуцирует автоморфизмы его поддеревьев, которые называются ограничениями или проекциями.

Определение 7 *Пусть $x \in Aut(T_n)$, $v \in T_n$. Ограничением автоморфизма x в слове v называется автоморфизм $x|_v \in Aut(T_{n-l(v)})$ такой, что*

$$x(vu) = x(v)x|_v(u).$$

Для любой вершины автоморфизм с указанным свойством существует и единственен.

Определим группу автоморфизмов $W_n \leq Aut(T_n)$ изоморфную $(...((H \wr H) \wr H)...) \wr H$ (n раз).

Будем говорить, что автоморфизм переставляет поддеревья в вершине v ($l(v) < n$), используя подстановку $\sigma : H \to H$, если $x(vh) = x(v)\sigma(h)$ для всех $h \in H$. В общем случае автоморфизм может переставлять поддеревья совершенно произвольным образом.

Группа всех автоморфизмов $Aut(T_n)$ изоморфна сплетению n симметрических групп $(\dots(Sym(k) \wr Sym(k)) \wr Sym(k)$, где $k = |H|$ (см. [4]). Рассмотрим естественное вложение группы H в $Sym(k)$, при котором каждому элементу $h_0 \in H$ ставится в соответствие подстановка $h \mapsto h_0 * h$. В группу W_n мы включим только те автоморфизмы, которые переставляют поддеревья, используя подстановки именно такого вида.

Определение 8 *W_n – это множество всех автоморфизмов $x \in Aut(T_n)$ таких, что для любого $v \in T_n$, $l(v) < n$ существует $x_v \in H$ такое, что для всех $h \in H$ $x(vh) = x(v)h'$, где $h' = x_v * h$.*

Для каждого $v \in T_n$, $l(v) < n$, x_v, указанное в определении 8, называют портретом автоморфизма в вершине v (см. [5], раздел 1.2.2; [6], раздел 1.3.2.).

Определение 9 *Портрет автоморфизма x – это отображение $v \mapsto x_v$.*

Портрет x_v в вершине v указывает, как именно автоморфизм x переставляет поддеревья $SubTr(vh)$ $h \in H$ (см. Предложение 1). А именно, поддерево $SubTr(vh)$ под действием x переходит в поддерево $SubTr(x(v)h')$, $h' = x_v * h$.

Автоморфизм всегда можно восстановить по его портрету. Более того, всякое отображение из T_{n-1} в H является портретом некоторого единственного автоморфизма из W_n. А именно, имеет место

Предложение 4 *(см. [6], раздел 1.3.2.)Для любого $\tau : T_{n-1} \to H$ отображение $x : T_n \to T_n$, определяемое индукцией по длине слова,*
1) $x(\emptyset) = x(\emptyset)$,
2) для всех $v \in T_{n-1}$, $h \in H$ $x(vh) = x(v)h'$, $h' = \tau(v) * h$
является автоморфизмом, и его портрет совпадает с τ, то есть $x_v = \tau(v)$

Доказательство. Сразу следует из определения портрета автоморфизма.

Следующее предложение (которое легко следует из определений, приведенных выше) описывает композицию двух автоморфизмов из W_n

Предложение 5 *Пусть $x, y \in W_n$ тогда*
1) $(x \circ y)_\emptyset = x_\emptyset \circ y_\emptyset$,
2) $(x \circ y)|_h = x|_{y_\emptyset * h} \circ y|_h$ для всех $h \in H$.

Предложение 6 *Группа $(...((H \wr H) \wr H)...) \wr H$ (n раз) изоморфна W_n*

Доказательство ведем индукцией по n. Для $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть $x \in W_n$ – автоморфизм. Поставим ему в соответствие пару $(x_\emptyset, f)$, где $f : H \to W_{n-1}$, $f(h) = x|_h$. Указанное соответствие является изоморфизмом групп W_n и $W_{n-1} \wr H$. Это следует из предложения 5. Применяя затем предположение индукции, мы получим требуемый факт. ЧТД.

2. Кодирование автоморфизмов. Построение мономорфизма ϕ_n в частном случае

Зафиксируем некоторую конечную группу H. Ее порядок обозначим k Зафиксируем некоторую нумерацию ее элементов:

$$H = \{h_0, h_1, \dots h_{k-1}\}. \tag{2}$$

При этом будем считать, что h_0 – это нейтральный элемент группы. В дальнейшем h_i будет всегда обозначать i-й элемент группы H в этой фиксированной нумерации.

Группа W_n, определенная в разделе 1 (определение 8), – это группа автоморфизмов корневого дерева с $n+1$ уровнем. Она изоморфна кратному сплетению $(...((H \wr H) \wr H)...) \wr H$ (n раз) с обычной расстановкой скобок (предложение 6)

Нам понадобится некоторый способ кодирования автоморфизмов из W_n словами над алфавитом H. Мы определим кодирующее отображение

$$s_n : W_n \to H^m, \quad m = (k^n - 1)/(k - 1)$$

рекурентным образом. Напомним, что x_v – это портрет автоморфизма в вершине v (см. определение 8).

Определение 10 *При $n = 1$ положим $s_1(x) = x_\emptyset$ для $x \in W_1 = H$. При $n > 1$:*

$$s_n(x) = x_\emptyset s_{n-1}(x|_{h_0}) s_{n-1}(x|_{h_1}) \dots s_{n-1}(x|_{h_{k-1}}). \tag{3}$$

При $n = 2$, $s_2 : W_2 \to H^{k+1}$ получим $s_2(x) = x_\emptyset s_1(x|_{h_0}) \dots s_1(x|_{h_{k-1}})$. Далее, поскольку $s_1(x) = x_\emptyset$, и портрет автоморфизма $x|_{h_i}$ совпадает с портретом x на поддереве с корнем в h_i, $s_1(x|h_i) = x_{h_i}$, следовательно $s_2(x) = x_\emptyset x_{h_0} x_{h_1} \dots x_{h_{k-1}}$ (здесь справа стоит слово над алфавитом H, а не результат выполнения операции в группе).

Для примера выпишем $s_3(x)$ в случае $H = Z_2$:

$$s_3(x) = x_\emptyset\ x_0\ x_{00} x_{01}\ x_1\ x_{10} x_{11}.$$

Отображение s_n выписывает портрет, проходя вершины дерева в соответствии с алгоритмом поиска в глубину. Поскольку автоморфизм дерева может быть однозначно восстановлен по его портрету (см. Предложение 4) и наоборот, отображение s_n биективно.

Наша конечная цель – построить вложение $\phi_n : H \wr W_n \to W_{m+1}$, где $m = (k^n - 1)/(k - 1)$. Мы должны указать для каждой пары $(x, f) \in H \wr W_n$, где $x \in W_n$, $f : W_n \to H$, каким будет автоморфизм $y = \phi_n(x, f)$.

Портрет y до уровня m будет зависеть только от x, и мы будем задавать его специальным отображением $\psi_n : W_n \to W_m$. Портрет на последнем уровне m будет зависеть также от f.

Прежде чем перейти к общему случаю, покажем, как действует ϕ_2 для $H = Z_2$ и $n = 2$.

Пусть $H = Z_2$, тогда $W_2 \cong Z_2 \wr Z_2$, $W_3 \cong (Z_2 \wr Z_2) \wr Z_2$ и т.д. Вначале определим отображение $\psi_2 : W_2 \to W_3$. Пусть $x \in W_2$, тогда портрет $\psi_2(x)$ строится по портрету x так, как показано на рисунке 1 ($\psi_2(x) = y$: $y_\emptyset = x_\emptyset$, $y_0 = x_0$, $y_1 = x_1$, $y_{00} = y_{01} = x_1$, $y_{10} = y_{11} = x_1$).

Отображение ψ_2 обладает следующим свойством. Для любых a, $x \in W_2$ выполнено равенство $s_2(a)^{\psi_2(x)} = s_2(x \circ a)$ (см рисунок 2). Действительно, справа на рисунке показан код автоморфизма a. Действуя на слово $s_2(a) = a_\emptyset a_0 a_1$ автоморфизмом $\psi_2(x)$, мы получаем слово $b_\emptyset b_0 b_1$. При этом можно заметить, что если $a_\emptyset = 0$, то $b_0 = x_0 + a_0$, $b_1 = x_1 + a_1$, если же наоборот $a_\emptyset = 1$, то $b_0 = x_1 + a_0$, $b_1 = x_0 + a_1$.

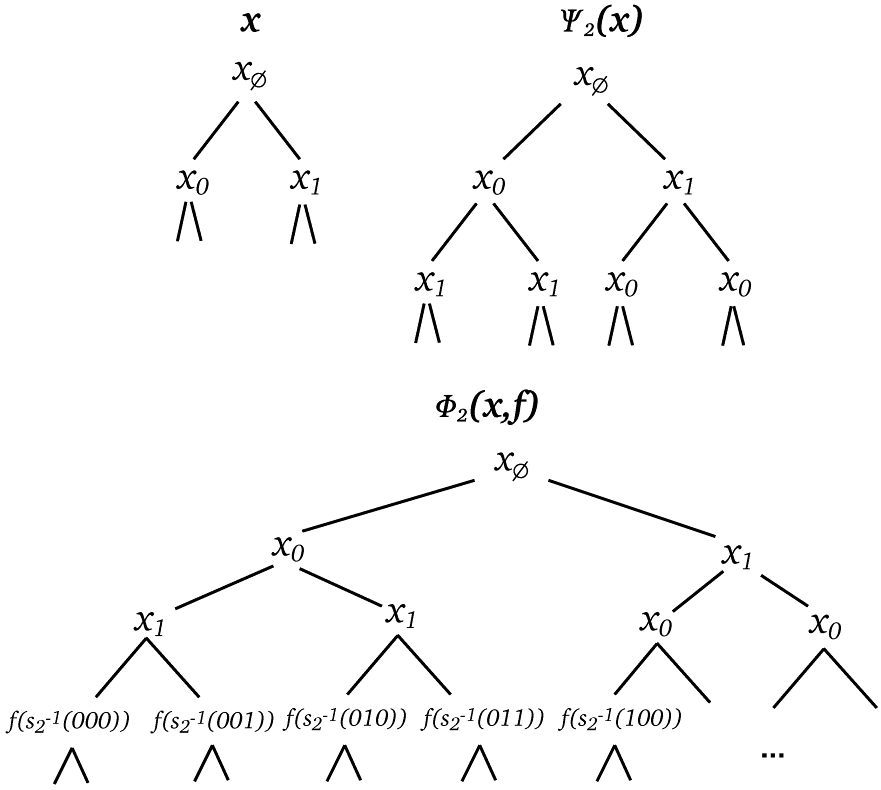

Рис. 1: Построение мономорфизма ϕ для случая $H = Z_2$ и $n = 2$

Таким образом, слово $b_\emptyset b_0 b_1$ есть не что иное как код автоморфизма $b = x \circ a$. Далее этот факт будет сформулирован и доказан для общего случая (теорема 1).

Отметим также, что отображение ψ_2 само по себе является вложением группы W_2 в W_3 (предложение 10).

Пусть теперь $(x, f) \in Z_2 \wr W_2$, то есть $f : W_2 \to Z_2$, $x \in W_2$. Определим $\phi_2(x, f) \in W_4$, для этого мы достраиваем автоморфизм $\psi_2(x)$, располагая на самом нижнем уровне значения функции f так, как показано на рисунке 1. Это расположение описывается формулой $y_v = f(s_n^{-1}(v))$ для всех v длины 3. Полученное отображение ϕ_2 является искомым мономорфизмом (теорема 2).

В следующем разделе мы построим инъективное отображение $\psi_n : W_n \to W_m$ ($m = \frac{k^n-1}{k-1}$) для общего случая (определение 11) и докажем (теорема 1), что для любых a, $x \in W_n$

$$s_n(a)^{\psi_n(x)} = s_n(x \circ a). \tag{4}$$

То есть авторморфизм $\psi_n(x) \in W_m$ преобразует код любого автоморфизма $a \in W_n$ в код автоморфизма $x \circ a \in W_n$.

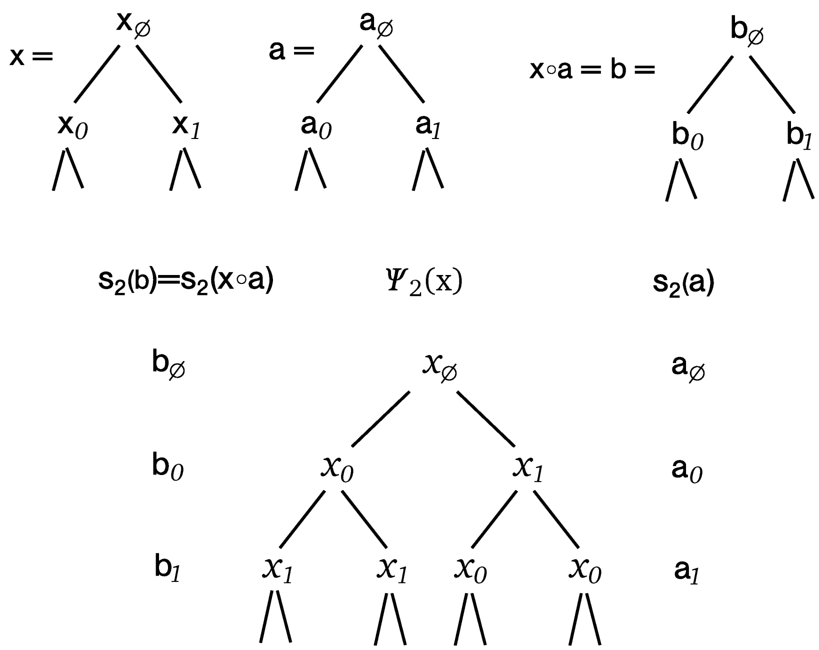

Рис. 2: Основное свойство отображения ψ: $s_2(a)^{\psi_2(x)} = s_2(x \circ a)$

Отображение ψ_n также является вложением группы W_n в W_m (предложение 10). Используя ψ_n, мы затем определим ϕ_n (определение 12) и докажем, что ϕ_n – мономорфизм (теорема 2).

Отметим, что в разделе при построении ϕ_n и при доказательстве основной теоремы мы будем пользоваться исключительно соотношением (4) и не будем ссылаться на определение ψ_n и другие его свойства. отображения ψ_n, удовлетворяющего соотношению

3. Вспомогательное отображение ψ_n

В этом разделе мы построим инъективное отображение $\psi_n : W_n \to W_m$, обладающее свойством (4): для любых a, $x \in W_n$

$$s_n(a)^{\psi_n(x)} = s_n(x \circ a).$$

Здесь H – фиксированная конечная группа; $k = |H|$; $m = (k^n - 1)/(k - 1)$; $s_n : W_n \to H^m$ – это кодирующее отображение, определенное в предыдущем разделе.

Определение 11 *Определим отображение ψ_n по индукции:*
1) Положим $\psi_1(x) = x$, $x \in W_1 = H$.
2) Для каждого $x \in W_n$, $\psi_n(x) = y$, где $y \in W_m$.– автоморфизм, действующий следующим образом.

В силу Предложения 3 достаточно определить действие автоморфизма y на словах длины m. Запишем произвольное слово длины m в виде $a_0 v_0 \ldots v_{k-1}$, *где* $a_0 \in H$, $l(v_i) = m_1 = \frac{k^{n-1}-1}{k-1}$, *тогда автоморфизм y переводит его в слово* $b_0 u_0 \ldots u_{k-1}$, *где*

$$b_0 = x_\emptyset * a_0, \quad (5)$$

$$u_i = v_i^{\psi_{n-1}(x|_{a_0 * h_i})} \quad (6)$$

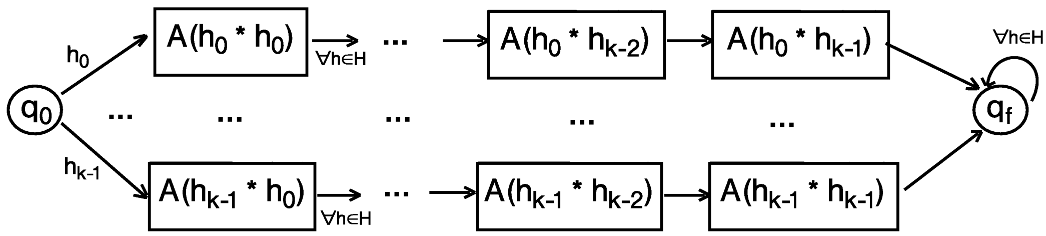

Рис. 3: Автомат, определяющий автоморфизм $\psi_n(x)$

Автоморфизмы $\psi_n(x)$ удобно представлять конечными автоматами. На рисунке 3 изображен автомат, определяющий автоморфизм $\psi_n(x)$. Здесь q_0 обозначает начальное состояние, q_f – конечное состояние. В состоянии q_0 функция выхода автомата – это домножение на элемент $x_\emptyset \in H$ слева. $A(h_i * h_j)$ – это автоматы, определяющие автоморфизмы $\psi_{n-1}(x|_{h_i * h_j})$. При соединении автоматов $A(h_i * h_j)$ между собой следует перенаправить все стрелки, указывающие на конечное состояние первого автомата, на начальное состояние второго.

Теперь докажем основное равенство (4).

Теорема 1 *Для любых* a, $x \in W_n : s_n(a)^{\psi_n(x)} = s_n(x \circ a)$.

Доказательство. Ведем индукцию по n. При $n = 1$ утверждение теоремы очевидно. Пусть a, $x \in W_n$. Обозначим

$$v_i = s_{n-1}(a|_{h_i}), \quad l(v_i) = m_1 = (k^{n-1} - 1)/(k - 1) \quad (i = \overline{0, k-1}) \quad (7)$$

Тогда по определению s_n

$$s_n(a) = a_\emptyset v_1 \ldots v_{k-1},$$

Теперь, используя определение ψ_n, выясним, как ψ_n преобразует слово $s_n(a)$:

$$s_n(a)^{\psi_n(x)} = b_0 u_0 \ldots u_{k-1}, \quad (8)$$

где

$$b_0 = x_\emptyset * a_\emptyset, \quad (9)$$

$$u_i = v_i^{\psi_n(x|_{a_\emptyset * h_i})} = s_{n-1}(a|_{h_i})^{\psi_n(x|_{a_\emptyset * h_i})}.$$

Используя предположение индукции, из последнего равенства получим:

$$u_i = s_{n-1}(x|_{a_\emptyset * h_i} \circ a|_{h_i}).$$

По предложению (5) ограничение композиции $x \circ a$ есть композиция ограничений x и a:

$$(x \circ a)|_{h_i} = x|_{a_\emptyset * h_i} \circ a|_{h_i}.$$

Следовательно,

$$u_i = s_{n-1}((x \circ a)|_{h_i}). \tag{10}$$

По определению s_n имеем:

$$s_n(x \circ a) = (x \circ a)_\emptyset s_{n-1}((x \circ a)|_{h_1}) \dots s_{n-1}((x \circ a)|_{h_{k-1}}). \tag{11}$$

По предложению (5), используя (9), получим

$$(x \circ a)_\emptyset = x_\emptyset * a_\emptyset = b_0 \tag{12}$$

Из (11), используя (10), (12), получим

$$s_n(x \circ a) = b_0 u_1 \dots u_{k-1}.$$

Откуда, учитывая (8),

$$s_n(x \circ a) = s_n(a)^{\psi_n(x)}$$

Утверждение теоремы показано.

Для того, чтобы проиллюстрировать действие отображения ψ_n, мы покажем, как из портрета автоморфизма x получается портрет $\psi_n(x)$.

Разобьем все множество уровней дерева T_m от первого до $m-1$-го на классы ($m = (k^n - 1)/(k-1)$):

$$\{1, \dots, m_1\};\ \{m_1 + 1, \dots, 2m_1\};\ \dots;\ \{(k-1)m_1 + 1, \dots, km_1\}$$

где $m_1 = (k^{n-1} - 1)/(k-1)$.

Мы укажем портрет для корневой вершины (уровень 0), а затем отдельно для каждого из вышеуказанных классов.

Предложение 7 *Пусть $x \in W_n$, $y = \psi_n(x)$, тогда:*

1) $y_\emptyset = x_\emptyset$

2) Пусть $i \in \{0, \dots, k-1\}$. Портрет на уровнях $im_1 + 1, \dots, (i+1)m_1$ задается следующим образом: для любых $a_0 \in H$, $u, v \in H^*$ таких, что $l(u) = im_1$, $l(v) < m_1$, выполняется:

$$y_{\,a_0 uv} = (\psi_{n-1}(x|_{a_0 * h_i}))_v.$$

Доказательство. Пункт 1) сразу следует из соотношения (5) в определении 11.

2) Будем говорить, что автоморфизм y действует на окончание v слова uv автоморфизмом z, если $(uv)^y = u^y v^z$. Пусть $h \in H$, будем говорить, что автоморфизм y домножает последний символ h слова vh на элемент $a \in H$, если $(vh)^y = v^y b$, где $b = a *_H h$.

Рассмотрим действие автоморфизма y на слово $w = a_0 uvh$ $(h \in H)$. По определению 11, y действует на окончание vh слова w автоморфизмом $\psi_{n-1}(x|_{a_0 * h_i})$. Автоморфизм $\psi_{n-1}(x|_{a_0 * h_i})$ в свою очередь, действуя на слово vh, домножает последний символ h на свой портрет $(\psi_{n-1}(x|_{a_0 * h_i}))_v$ Таким образом, y, действуя на слово $w = a_0 uvh$, домножает последний символ h на $(\psi_{n-1}(x|_{a_0 * h_i}))_v$, а это и означает, что $y_{a_0 uv} = (\psi_{n-1}(x|_{a_0 * h_i}))_v$ ЧТД.

Докажем теперь, что на первых n уровнях портрет автоморфизма $\psi_n(x)$ совпадает с портретом x. (Тут мы будем существенно использовать тот факт, что при нумерации (2) элементов группы H мы обозначили нейтральный элемент h_0).

Предложение 8 *Пусть $x \in W_n$, $y = \psi_n(x)$, тогда для любой вершины $v \in T_n$, $l(v) < n$ имеет место $y_v = x_v$.*

Доказательство будем вести индукцией по n. Если $x \in W_1$, то $\psi_1(x) = x$ по определению, и утверждение показано. Пусть теперь $x \in W_n$. По предложению 7 на уровнях $\{1, \ldots, m_1\}$ портрет $y = \psi_n(x)$ определяется соотношением:

$$y_{a_0 v} = (\psi_{n-1}(x|_{a_0 * h_0}))_v,$$

где v – слово длины меньше n. Поскольку h_0 – нейтральный элемент группы H,

$$y_{a_0 v} = (\psi_{n-1}(x|_{a_0}))_v.$$

По предположению индукции ψ_{n-1} сохраняет портрет на первых $n-1$ уровнях. Таким образом, портрет y на уровнях от 1 до $n-1$ совпадает с портретом x: $y_{a_0 v} = x_{a_0 v}$. Портрет корневой вершины ψ_n сохраняет по определению. Таким образом, утверждение показано. ЧТД.

Из предложения 8 немедленно следует

Предложение 9 *Отображение $\psi_n : W_n \to W_m$ инъективно.*

Предложение 10 *Отображение $\psi_n : W_n \to W_m$ является мономорфизмом.*

Доказательство. Пусть $x_1, x_2 \in W_n$. Докажем, что $\psi_n(x_1 \circ x_2) = \psi_n(x_1) \circ \psi_n(x_2)$. Для этого мы рассмотрим произвольное слово v длины m и покажем, что его образы при отображениях $\psi_n(x_1 \circ x_2)$ и $\psi_n(x_1) \circ \psi_n(x_2)$ совпадают. Обозначим $a = s_n^{-1}(v)$, тогда, применяя теорему 1, запишем:

$$v^{\psi_n(x_2)} = s_n(a)^{\psi_n(x_2)} = s_n(x_2 \circ a).$$

Следовательно,

$$v^{\psi_n(x_1)\circ\psi_n(x_2)} = s_n(x_2 \circ a)^{\psi_n(x_1)} = s_n(x_1 \circ x_2 \circ a)$$

Рассмотрим теперь $v^{\psi_n(x_1 \circ x_2)}$. Применяя снова теорему 1, сразу получим:

$$v^{\psi_n(x_1\circ x_2)} = s_n(a)^{\psi_n(x_1\circ x_2)} = s_n(x_1 \circ x_2 \circ a).$$

Таким образом, $v^{\psi_n(x_1\circ x_2)} = v^{\psi_n(x_1)\circ\psi_n(x_2)}$. Из этого следует, что отображения $\psi_n(x_1 \circ x_2)$ и $\psi_n(x_1) \circ \psi_n(x_2)$ совпадают и на словах меньшей длины, то есть $\psi_n(x_1 \circ x_2) = \psi_n(x_1) \circ \psi_n(x_2)$. Кроме того, поскольку ψ_n инъективно, ψ_n является мономорфизмом. ЧТД.

4. Построение мономорфизма ϕ_n

Определим теперь отображение $\phi_n : H \wr W_n \to W_{m+1}$.

Определение 12 *Для каждой пары $(x,\, f) \in H \wr W_n$, $x \in W_n$, $f : W_n \to H$ определим $y = \phi_n(x,\, f)$, задав портрет y. Портрет y строится следующим образом:*

1) $y_v = (\psi_n(x))_v$, для $v \in H^*$, $l(v) < m$

2) $y_v = f\left(s_n^{-1}(v)\right)$, для $v \in H^*$, $l(v) = m$

Теорема 2 *Отображение ϕ_n является мономорфизмом.*

Доказательство. Для каждого $(x,\, f) \in H \wr W_n$ определим $\tilde{\alpha}_{x,\,f} : H^m \times H \to H^m \times H$ следующим образом:

$$\tilde{\alpha}_{x,\,f} = \tilde{s_n} \circ \alpha_{x,\,f} \circ \tilde{s_n}^{-1},$$

где $\tilde{s_n} : W_n \times H \to H^m \times H$ определяется по формуле $\tilde{s_n}(y,\, h) = (s_n(y),\, h)$, а $\alpha_{x,\,f}$ было определено ранее (1).

Отображение $\tilde{\alpha}_{x,\,f}$ действует, в сущности, так же как и $\alpha_{x,\,f}$, но только оперирует кодами автоморфизмов вместо самих автоморфизмов, то есть $\alpha_{x,\,f}(y,\, h) = (y',\, h')$ тогда и только тогда, когда $\tilde{\alpha}_{x,\,f}(s_n(y),\, h) = (s_n(y'),\, h')$.

В силу Леммы 1 $H \wr W_n$ изоморфно группе $\mathcal{A} = \{\alpha_{x,\,f} : (x,\, f) \in H \wr W_n\}$ (операцией в группе $\mathcal{A}$ является композиция), причем, отображение $(x,\, f) \mapsto \alpha_{x,\,f}$ – изоморфизм. По определению $\tilde{\alpha}_{x,\,f}$ есть сопряжение $\alpha_{x,\,f}$, поэтому отображение $\alpha_{x,\,f} \mapsto \tilde{\alpha}_{x,\,f}$ будет изоморфизмом групп $\mathcal{A}$ и $\tilde{\mathcal{A}} = \{\tilde{\alpha}_{x,\,f} : (x,\, f) \in H \wr W_n\}$ относительно композиции. Итак, группа $\tilde{\mathcal{A}}$ изоморфна $H \wr W_n$, причем отображение $(x,\, f) \mapsto \tilde{\alpha}_{x,\,f}$ – изоморфизм.

Отображение $\tilde{\alpha}_{x,\,f}$ действует на множестве $H^m \times H = H^{m+1}$, то есть, фактически, на словах длины $m+1$. Покажем, что отображения $\phi_n(x,\, f)$ и $\tilde{\alpha}_{x,\,f}$ совпадают на словах длины $m+1$. То есть для любого слова v длины $m+1$ выполнено равенство:

$$v^{\phi_n(x,\,f)} = v^{\tilde{\alpha}_{x,\,f}}. \tag{13}$$

Зафиксируем слово $v = uh$ длины $m + 1$, где u – слово длины m, $h \in H$. Пусть $u'h' = v^{\phi_n(x,f)}$, где u' – слово длины m, $h' \in H$. Восстанавливая действие автоморфизма $\phi_n(x, f)$ по его портрету (см. Предложение 4) получим

$$u' = u^{\phi_n(x,f)} \tag{14}$$
$$h' = f(s_n^{-1}(u)) *_H h \tag{15}$$

Портреты $\phi_n(x, f)$ и $\psi_n(x)$ на вершинах уровня меньше m по определению совпадают. Следовательно, автоморфизмы $\phi_n(x, f)$ и $\psi_n(x)$ действуют на словах длины меньшей либо равной m одинаково. Поэтому (14) можно переписать в виде:

$$u' = u^{\psi_n(x)}. \tag{16}$$

Обозначим $y \in W_n$ – автоморфизм, код которого – это слово u.

$$y = s_n^{-1}(u). \tag{17}$$

Применяя последовательно (16), (17), (4), получим:

$$u' = u^{\psi_n(x)} = s_n(y)^{\psi_n(x)} = s_n(x \circ y). \tag{18}$$

Подставим (17) в (15):

$$h' = f(y) *_H h. \tag{19}$$

По определению $\alpha_{x,f}$ (1) $\alpha_{x,f}(y, h) = (x \circ y, f(y) *_H h)$.

Но $(x \circ y, f(y) *_H h) = \alpha_{x,f}(y, h)$ эквивалентно $(s_n(x \circ y), f(y) *_H h) = \tilde{\alpha}_{x,f}(s_n(y), h)$, то есть, применяя (18), (19), получим $(u', h') = \tilde{\alpha}_{x,f}(u, h)$. Имеем:

$$v^{\phi_n(x,f)} = (u', h') = \tilde{\alpha}_{x,f}(u, h) = v^{\tilde{\alpha}_{x,f}}.$$

Итак, мы установили равенство (13) для слов длины $m + 1$. Теперь мы готовы показать, что ϕ_n является мономорфизмом. Пусть $(x_1, f_1) *_{H \wr W_n} (x_2, f_2) = (x_3, f_3)$. Тогда, в силу изоморфизма, $\tilde{\alpha}_{x_3,f_3} = \tilde{\alpha}_{x_1,f_1} \circ \tilde{\alpha}_{x_2,f_2}$, поэтому в силу (13) для всех слов длины $m + 1$

$$v^{\phi_n(x_3,f_3)} = v^{\phi_n(x_1,f_1) \circ \phi_n(x_2,f_2)}. \tag{20}$$

По Предложению 2 (20) выполнено для всех слов длины меньшей либо равной $m + 1$, т. е.

$$\phi_n(x_3, f_3) = \phi_n(x_1, f_1) \circ \phi_n(x_2, f_2).$$

Последнее означает, что ϕ_n сохраняет операцию, инъективность ϕ_n следует непосредственно из определения ϕ_n и инъективности ψ_n. Таким образом ϕ_n – мономорфизм. ЧТД.

Путем незначительного изменения определения ϕ_n мы можем обобщить наш результат и построить вложение группы $W_l \wr W_n$. А именно, определим теперь отображение $\phi'_{l,n} : W_l \wr W_n \to W_{m+l}$ следующим образом:

Определение 13 *Для каждой пары* $(x, f) \in W_l \wr W_n$, $x \in W_n$, $f : W_n \to W_l$ *определим* $y = \phi'_{l,n}(x, f)$, *задав портрет* y. *Портрет* y *строится следующим образом*

1) $y_v = (\psi_n(x))_v$, *для* $v \in H^*$, $\quad l(v) < m$

2) $y|_v = f\left(s_n^{-1}(v)\right)$, *для* $v \in H^*$, $\quad l(v) = m$

То есть теперь мы достраиваем к автоморфизму $\psi_n(x)$ не один уровень, а l уровней, и располагаем там портреты автоморфизмов $f(s_n^{-1}(v))$.

Рассуждения теоремы 2 обобщаются тривиальным образом. Далее, используя полученное таким образом вложение, можно по индукции строить вложение произвольного кратного сплетения.

Заключение

В работе построен мономорфизм группы $H \wr W_n$ в группу W_{m+1}. Разумеется, такое вложение не единственно. Это следует, например, из произвольности нумерации элементов группы H. Однако даже этим не исчерпываются все варианты. Принципиально иное вложение построено в [3]. Для дальнейшего исследования интересно было бы рассмотреть другие вложения, а также изучить вопрос о минимальности, то есть для какого минимального n возможно вложение того или иного кратного сплетения в группу W_n.

В работе также было показано, как на основе полученного вложения строить вложения произвольных кратных сплетений. Было бы интересно рассмотреть другие более компактные способы таких вложений в группы W_n для меньшего n.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каргаполов М.И. Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. – М.: Наука, – 1972. – 240с.

2. Калужнин Л.А. Избранные главы теории групп. – Киев: Изд-во КГУ. – 1979. – 52с.

3. Леонов Ю.Г. Вложения кратных сплетений групп Z_2 в группы Калужнина. // Математичнi Студiї. – 2007. – Т.28 N1 – С.18-24.

4. Григорчук Р.И., Некрашевич В.В., Сущанский В.И. Автоматы, динамические системы и группы. // Труды Математического Института им. В.А.Стеклова, – 2000. – Т.231, – С. 134-214.

5. Bartholdi L., Grigorchuk R. I., Sunik Z. Branch groups. Handbook of algebra. – 2003 – Vol. 3 – North-Holland, Amsterdam, 989–1112.

6. Nekrashevych V. Self-Similar Groups. – Amer Mathematical Society. – 2005. – 231p.

Статья получена: 04.07.2008; окончательный вариант: 07.09.2009; принята: 05.10.2009.