

ISSN 2221-5646 (Print),
ISSN 2523-4641 (Online)



KARAZIN UNIVERSITY
CLASSICS AHEAD OF TIME

VISNYK OF V.N.KARAZIN
KHARKIV NATIONAL UNIVERSITY

**Ser. MATHEMATICS, APPLIED
MATHEMATICS AND MECHANICS**



Том 87 ' 2018

Вісник Харківського національного
університету імені В.Н.Каразіна
серія

**МАТЕМАТИКА,
ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА
І МЕХАНІКА**

До Віснику включено статті з математичного аналізу, математичної фізики, диференціальних рівнянь, математичної теорії керування та механіки, які містять нові теоретичні результати у зазначених галузях і мають прикладне значення.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних сферах.

Вісник є фаховим виданням у галузі фізико-математичних наук
(Наказ МОН України №1328 від 21.12.2015 р.)

Затверджено до друку рішенням Вченої ради Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна (протокол №10 від 29 жовтня 2018р.).

Головний редактор – Коробов В.І. – д-р ф.-м. наук,
ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

Члени редакційної колегії:

Кадець В.М. – д-р ф.-м. наук, ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна
Пацегон М.Ф. – д-р ф.-м. наук, ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна
Фаворов С.Ю. – д-р ф.-м. наук, ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна
Борисенко О.А. – д-р ф.-м. наук, чл.-кор. НАН України, ФТІНТ НАН України
Єгорова І.Є. – д-р ф.-м. наук, ФТІНТ НАН України
Пастур Л.А. – д-р ф.-м. наук, акад. НАН України, ФТІНТ НАН України
Хруслов Є.Я. – д-р ф.-м. наук, акад. НАН України, ФТІНТ НАН України
Шепельський Д.Г. – д-р ф.-м. наук, ФТІНТ НАН України та ХНУ імені
В.Н. Каразіна, Україна

Когут П.І. – д-р ф.-м. наук, Дніпровський національний університет імені
Олеся Гончара, м.Дніпро, Україна

Чуйко С.М. – д-р ф.-м. наук, Інститут прикладної математики і механіки
Національної академії наук України, м.Слов'янськ, Україна

Домбровський А. – д-р ф.-м. наук, Університет Щецина, Польща
Карлович Ю.І. – д-р ф.-м. наук, Університет Морелос, Мехіко, Мексика
Нгуєн Хоа Шон – д-р ф.-м. наук, Академія наук та технології В'єтнама,
Інститут математики, Ханой, В'єтнам

Поляков А.І. – д-р ф.-м. наук, ІНРІА Національний дослідницький інститут
інформатики та автоматики, Ле-Шене, Франція

Скляр Г.М. – д-р ф.-м. наук, Університет Щецина, Польща
Солдатов О.П. – д-р ф.-м. наук, Белгородський університет, Росія

Відповідальний секретар – канд. ф.-м. наук Резуненко О.В.,
ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

Адреса редакційної колегії: 61022, Харків, майдан Свободи, 4,
ХНУ імені В.Н. Каразіна, факультет математики і інформатики, к. 7-27.
Тел. 7075240, 7075135,

Email: vestnik-khnu@ukr.net

Интернет:<http://vestnik-math.univer.kharkov.ua/>

http://periodicals.karazin.ua/mech_math/

Статті пройшли внутрішнє та зовнішнє рецензування.

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 21568-11468 Р від 21.08.2015

©Харківський національний університет
імені В.Н. Каразіна, оформлення, 2018

ЗМІСТ

Новіков О. О., Ровенська О. Г., Козаченко Ю. А. Наближення класів інтегралів Пуассона сумами Фейера.	4
Ромашов Ю. В., Поволоцький Е. В. Вплив температурного стану на пошкоджуваність внаслідок повзучості оболонок циліндричних тепловиділяючих елементів.	13
Карєва В. В., Львов С. В. Математична модель процесів регенерації печінки: однорідне наближення.	29
Гончаренко М. В., Хількова Л. О. Усереднені тензор провідності та функція поглинання локально-періодичного пористого середовища.	42
Макаров О. А., Левкін Д. А. Крайова задача в шарі для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь з інтегральною умовою.	61

CONTENTS

O. O. Novikov, O. G. Rovenska, Yu. A. Kozachenko. Approximation of classes of Poisson integrals by Fejer sums.	4
Yu. V. Romashov, E. V. Povolotskii. Influence of the temperature state on the damageability due to the creep of claddings of cylindrical fuel elements.	13
V. V. Karieva, S. V. Lvov. Mathematical model of liver regeneration processes: homogeneous approximation.	29
M. V. Goncharenko, L. O. Khilkova. Homogenized conductivity tensor and absorption function of a locally periodic porous medium.	42
A. A. Makarov, D. A. Levkin The boundary-value problem in the layer for evolution pseudodifferential equations with integral condition.	61

СОДЕРЖАНИЕ

Новиков О. А., Ровенская О. Г., Козаченко Ю. А. Приближение классов интегралов Пуассона суммами Фейера.	4
Ромашов Ю. В., Поволоцкий Э. В. Влияние температурного состояния на повреждаемость вследствие ползучести оболочек цилиндрических тепловыделяющих элементов.	13
Карєва В. В., Львов С. В. Математическая модель процессов регенерации печени: однородное приближение.	29
Гончаренко М. В., Хилькова Л. А. Усреднённые тензор проводимости и функция поглощения локально-периодической пористой среды.	42
Макаров А. А., Левкин Д. А. Краевая задача в слое для эволюционных псевдодифференциальных уравнений с интегральным условием	61

Approximation of classes of Poisson integrals by Fejer sums

O.O. Novikov¹, O.G. Rovenska², Yu.A. Kozachenko¹

¹Donbass State Pedagogical University, Slov'yansk, 19 G. Batuka, 84116, Ukraine

²Donbass State Engineering Academy, Kramatorsk, 72 Akademicheskaya, 84313, Ukraine

sgpi.slav@dn.ua, rovenskaya.olga.math@gmail.com, sgpi.slav@dn.ua

For upper bounds of the deviations of Fejer sums taken over classes of periodic functions that admit analytic extensions to a fixed strip of the complex plane, we obtain asymptotic equalities. In certain cases, these equalities give a solution of the corresponding Kolmogorov-Nikolsky problem.

Keywords: asymptotic equality; Poisson integrals; Fejer sums

Новіков О.О., Ровенська О.Г., Козаченко Ю.А. **Наближення класів інтегралів Пуассона сумами Фейєра.** Розширено проміжок параметра, що визначає клас функцій, для якого були справедливими знайдені до цього асимптотичні рівності для верхніх граней відхилень сум Фейєра на класах періодичних функцій, що дозволяють аналітичне подовження у фіксовану смугу комплексної площини. В деяких випадках ці рівності забезпечують розв'язок відповідної задачі Колмогорова–Нікольського.

Ключові слова: асимптотична рівність; інтеграли Пуассона; суми Фейєра

Новиков О.А., Ровенская О.Г., Козаченко Ю.А. **Приближение классов интегралов Пуассона суммами Фейера.** Расширен промежуток параметра, определяющего класс функций, для которых были справедливы найденные ранее асимптотические равенства для верхних граней уклонений сумм Фейера на классах периодических функций, допускающих аналитическое продолжение в фиксированную полосу комплексной плоскости. В определенных случаях эти равенства обеспечивают решение соответствующей задачи Колмогорова–Никольского.

Ключевые слова: асимптотическое равенство; интегралы Пуассона; суммы Фейера

2010 Mathematics Subject Classification: 42A10.

1. Introduction

Let $C_{\beta, \infty}^q$ (see, e.g., [1]) be classes of continuous 2π -periodic functions given by the convolutions

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{\beta}^q(x+t) P_{\beta}^q(t) dt,$$

where

$$P_{\beta}^q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos(kt + \frac{\beta\pi}{2}), \quad q \in (0; 1), \quad \beta \in \mathbb{R},$$

is the well-known Poisson kernel, the function $f_{\beta}^q(x)$ either satisfies the condition

$$\text{ess sup}_{x \in [-\pi; \pi]} |f_{\beta}^q(x)| \leq 1.$$

In this case, the sets $C_{\beta, \infty}^q$ consist of 2π -periodic functions that admit extension to functions $f(z) = f(x + iy)$ analytic in the strip $|y| < \ln(\frac{1}{q})$ (see, e.g., [1]); these functions are called the Poisson integrals.

Further, let $f(x)$ be a 2π -periodic summable function ($f \in L$), let

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

be its Fourier series, and let $a_k = a_k(f)$ and $b_k = b_k(f)$, $k = 0, 1, \dots$, be its Fourier coefficients.

Denote by $\Lambda = \|\lambda_k^{(n)}\|$, $k, n = 0, 1, \dots$ an arbitrary triangular matrix of numbers by using which we associate every function $f \in L$ with a sequence of trigonometric polynomials $U_n(f; x; \Lambda)$ of the form

$$U_n(f; x; \Lambda) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^{(n)} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Thus, any triangular matrix Λ gives a method for the construction of polynomials $U_n(f; x; \Lambda)$ or, in other words, specific sequence of polynomial operators $U_n(f; \Lambda)$ defined on the set L . In this case, one also says that the matrix Λ defines a specific method (Λ -method) for summing Fourier series. It is clear that the operators $U_n(f; \Lambda)$ are linear. For this reason, Λ -methods are called linear summation methods for Fourier series.

For arbitrary natural $p < n$ the polynomials that are given by relationship

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 1 & 1 \leq k \leq n - p, \\ 1 - \frac{k-n+p}{p} & n - p + 1 \leq k \leq n - 1 \end{cases}$$

are called de la Vallee Poussin sums. In this case, the polynomials $U_n(f; x; \Lambda)$ are denoted by $V_{n,p}(f, x)$ and have the form

$$V_{n,p}(f; x) = \frac{1}{p} \sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f; x),$$

where $S_k(f; x)$, $k = 0, 1, \dots$ are the partial Fourier sums of order k of the function $f(x)$. If $p = 1$, then $V_{n,p}(f; x) = S_{n-1}(f; x)$. For $p = n$ sums of this type are called the Fejer sums:

$$\sigma_n(f; x) = V_{n,n}(f; x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(f; x).$$

De la Vallee-Poussin sums and their special cases (Fourier sums and Fejer sums) have been extensively studied for many decades by many prominent experts in the theory of functions. In 1946, Nikolsky [2] considered the quantity

$$\mathcal{E} \left(C_{\beta, \infty}^q; S_n \right) = \sup_{f \in C_{\beta, \infty}^q} \|f(x) - S_n(f; x)\|_C$$

where $S_n(f; x)$ is the n -th partial sum of the Fourier series of the function $f(x)$, and established the asymptotic equality (as $n \rightarrow \infty$)

$$\mathcal{E} \left(C_{\beta, \infty}^q; S_n \right) = \frac{8q^n}{\pi^2} K(q) + O(1) \frac{q^n}{n},$$

where

$$K(q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 u}}$$

is the total elliptic integral of the first kind, $O(1)$ is a quantity uniformly bounded with respect to n . In 1980, Stechkin [3] proposed another proof of this result, which allowed to refine the remainder equality

$$\mathcal{E} \left(C_{\beta, \infty}^q; S_n \right) = \frac{8q^n}{\pi^2} K(q) + O(1) \frac{q^n}{n(1 - q)},$$

where $O(1)$ is a quantity uniformly bounded with respect to n, q .

It follows from these equalities that, on the classes of analytic functions, the Fourier sums provide an approximation which coincides in order with the best approximation by the trigonometric polynomials of degree not greater than n . However, it is still interesting to make clear how do other approximating aggregates (e.g., de la Vallee-Poussin sums, Fejer sums) behave on the classes mentioned above. These studies may be of interest for computational mathematics and methods of mathematical modeling.

Asymptotic (as $n \rightarrow \infty$) equalities for upper bounds of the deviations of de la Vallee Poussin sums for p satisfying $n - p \rightarrow \infty$ on the classes $C_{\beta, \infty}^q$ may be found in [4, 5]:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \left(C_{\beta, \infty}^q; V_{n,p} \right) &= \sup_{f \in C_{\beta, \infty}^q} \|f(x) - V_{n,p}(f; x)\|_C \\ &= \frac{q^{n-p+1}}{p} \left(\frac{4}{\pi^2} K_{q,p} + O(1) \left(\frac{q}{(n-p+1)(1-q)^s} \right) \right), \end{aligned}$$

where

$$K_{q,p} = \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{1 - 2q^p \cos pt + q^{2p}}}{1 - 2q \cos pt + q^2} dt, \quad s = s(p) = \begin{cases} 1, & p = 1, \\ 3, & p = 2, 3, \dots, \end{cases}$$

$O(1)$ is a quantity uniformly bounded with respect to n, p, q .

In the case of arbitrary $p = 1, 2, \dots, n$ the behavior of the constant $K_{q,p}$ could be inferred by the next identity, proved in [6]:

$$K_{q,p} = 2 \frac{1 - q^{2p}}{1 - q^2} K(q^p),$$

where $K(q)$ is the total elliptic integral of the first kind.

Some related problems were studied in [7, 8, 9, 10, 11, 12].

For $q \in (0; 2 - \sqrt{3}]$ upper bounds of the deviations of Fejer sums on the classes $C_{0,\infty}^q$ were investigated in [13]

$$\mathcal{E}(C_{0,\infty}^q, \sigma_n) = \sup_{f \in C_{0,\infty}^q} \|f(x) - \sigma_n(f; x)\|_C = \frac{4q}{\pi n(1 + q^2)} + O(1) \frac{q^n}{n}, \quad n \rightarrow \infty,$$

where $O(1)$ is a quantity uniformly bounded with respect to n, q .

Here, we extend the result indicated above to the case where $q \in (0; q_0]$, $q_0 = \sqrt{2 + \sqrt{5}} - 2\sqrt{2 + \sqrt{5}} \approx 0,346$.

2. Result

Our main result is in the following theorem.

Theorem 1 Suppose that $q \in (0; q_0]$. Then the following relation holds as $n \rightarrow \infty$

$$\mathcal{E}(C_{0,\infty}^q, \sigma_n) = \frac{4q}{\pi n(1 + q^2)} + O(1) \frac{q^n}{n}, \quad (1)$$

where $O(1)$ is a quantity uniformly bounded with respect to n, q .

Proof.

The statement of theorem is proved using the procedure proposed in [13]. Let

$$\delta_n(f; x) = f(x) - \sigma_n(f; x) = f(x) - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(f; x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \rho_k(f; x), \quad (2)$$

where

$$\rho_k(f; x) = f(x) - S_k(f; x).$$

For $f \in C_{0,\infty}^q$ quantity $\rho_m(f; x)$ may be represented as follows

$$\begin{aligned} \rho_m(f; x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{\beta}^q(x+t) \sum_{k=m+1}^{\infty} q^k \cos ktdt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{\beta}^q(x+t) \sum_{k=0}^{\infty} q^{k+m+1} \cos(k+m+1)tdt = \frac{q^{m+1}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{\beta}^q(x+t) \end{aligned}$$

$$\times \left(\cos(m+1)t \sum_{k=0}^{\infty} q^k \cos kt - \sin(m+1)t \sum_{k=0}^{\infty} q^k \sin kt \right) dt.$$

According to formulas

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \cos kt = \frac{1 - q \cos t}{1 - 2q \cos t + q^2}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} q^k \sin kt = \frac{q \sin t}{1 - 2q \cos t + q^2},$$

we obtain

$$\begin{aligned} \rho_m(f; x) = & \frac{q^{m+1}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{\beta}^q(x+t) \left\{ \frac{1 - q \cos t}{1 - 2q \cos t + q^2} \cos(m+1)t \right. \\ & \left. - \frac{q \sin t}{1 - 2q \cos t + q^2} \sin(m+1)t \right\} dt. \end{aligned} \quad (3)$$

Comparing (2) and (3), we obtain

$$\delta_n(f; x) = \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f_{\beta}^q(x+t)}{1 - 2q \cos t + q^2} \sum_{m=1}^n q^m [\cos mt - q \cos(m-1)t] dt. \quad (4)$$

We have

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n q^k (\cos kt - q \cos(k-1)t) &= \sum_{k=1}^n q^k \left(\frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2} - q \frac{e^{i(k-1)t} + e^{-i(k-1)t}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left\{ \left[(qe^{it})^k + (qe^{-it})^k \right] - q^2 \left[(qe^{it})^{k-1} + (qe^{-it})^{k-1} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{1 - 2q \cos t + q^2} [(q+q^3) \cos t - 2q^2 - q^{n+1} (\cos(n+1)t - 2q \cos nt + q^2 \cos(n-1)t)]. \end{aligned}$$

Taking into account the formula (4), the following integral representation holds as $n \rightarrow \infty$

$$\delta_n(f; x) = \frac{q}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f_{\beta}^q(x+t) [(1+q^2) \cos t - 2q]}{(1 - 2q \cos t + q^2)^2} dt + O(1) \frac{q^n}{n}, \quad (5)$$

where $O(1)$ is a quantity uniformly bounded with respect to n, q .

The function

$$\Gamma(t) = \frac{(1+q^2) \cos t - 2q}{(1 - 2q \cos t + q^2)^2}$$

for $q \in (0; 2 - \sqrt{3}]$ monotonous on interval $(0; \pi)$. Using the relation (5), we conclude that for function $f_{\beta}^q(t) \in S_M^0$,

$$S_M^0 = \left\{ f \in L : \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = 0, \quad \text{ess sup} |f(t)| \leq 1, \quad t \in [-\pi; \pi] \right\},$$

the following representation

$$\delta_n(f; x) = \frac{q}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} f_{\beta}^q(x+t) \left(\frac{(1+q^2)\cos t - 2q}{(1-2q\cos t + q^2)^2} + \frac{2q}{(1+q^2)^2} \right) dt + O(1)\frac{q^n}{n}$$

is true.

For $q \in (0; 2 - \sqrt{3}]$ we have $\varphi(t) = \text{sign} [\Gamma(t) - \Gamma(\pi/2)] \in S_M^0$. Taking into account that $(f_0(x))_{\beta}^q = \varphi(x)$, we obtain

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(C_{0,\infty}^q, \sigma_n) &= \frac{q}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \left(\frac{(1+q^2)\cos t - 2q}{(1-2q\cos t + q^2)^2} + \frac{2q}{(1+q^2)^2} \right) dt + O(1)\frac{q^n}{n} \\ &= \frac{2q}{\pi n} \int_0^{\pi} \left| \frac{(1+q^2)\cos t - 2q}{(1-2q\cos t + q^2)^2} + \frac{2q}{(1+q^2)^2} \right| dt + O(1)\frac{q^n}{n}. \end{aligned} \tag{6}$$

It is clear that, for q such that $\Gamma(t) - \Gamma(\pi/2) > 0, t \in (0; \pi/2)$ and $\Gamma(t) - \Gamma(\pi/2) < 0, t \in (\pi/2; \pi)$ the formula (6) is true.

We investigate the function $\Gamma(t)$. We have

$$\Gamma'(t) = \frac{(6q^2 - q^4 - 1 - 2q(1 + q^2)\cos t)\sin t}{(1 - 2q\cos t + q^2)^3}.$$

Performing elementary transformations, for $q \in (0; 2 - \sqrt{3}]$ we get

$$\Gamma'(t) \neq 0, \quad t \in (0; \pi).$$

It was also shown in [13]. Further, $\Gamma'(t) = 0$ for $q \in (2 - \sqrt{3}; 1)$ such that satisfy the condition

$$\cos t = \frac{6q^2 - q^4 - 1}{2q(1 + q^2)}.$$

For $t \in (\pi/2; \pi)$ this relation is true as

$$-1 \leq \frac{6q^2 - q^4 - 1}{2q(1 + q^2)} \leq 0.$$

Making calculations, we obtain $q \in (2 - \sqrt{3}; \sqrt{3 - 2\sqrt{2}})$.

Consider the condition $\Gamma(q, \pi) - \Gamma(q, \pi/2) \leq 0$. The last inequality yields for

$$q^4 - 2q^3 - 2q^2 - 2q + 1 \geq 0.$$

Making calculations, we have $q \in (0; q_0]$.

In view of the properties of monotonicity of function $\Gamma(t)$, for $q \in (0; q_0]$ we have $\varphi(t) = \text{sign} [\Gamma(t) - \Gamma(\pi/2)] \in S_M^0$. Therefore, for function $(f_0(x))_{\beta}^q = \varphi(x)$ the relation (6) is true.

It is clear that

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} \left| \frac{(1+q^2)\cos t - 2q}{(1-2q\cos t + q^2)^2} + \frac{2q}{(1+q^2)^2} \right| dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{(1+q^2)\cos t - 2q}{(1-2q\cos t + q^2)^2} dt - \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{(1+q^2)\cos t - 2q}{(1-2q\cos t + q^2)^2} dt. \end{aligned} \quad (7)$$

Making calculations, we obtain

$$\begin{aligned} & \int \frac{\cos t}{(1-2q\cos t + q^2)^2} dt = \frac{(1+q^2)\sin t}{(1-q^2)^2(1-2q\cos t + q^2)} \\ & \quad + \frac{2q}{(1-q^2)^2} \int \frac{dt}{1-2q\cos t + q^2}, \\ & \int \frac{dt}{(1-2q\cos t + q^2)^2} = \frac{2q\sin t}{(1-q^2)^2(1-2q\cos t + q^2)} \\ & \quad + \frac{1+q^2}{(1-q^2)^2} \int \frac{dt}{1-2q\cos t + q^2}. \end{aligned}$$

Making elementary transformations, we obtain

$$\begin{aligned} & \int \frac{(1+q^2)\cos t - 2q}{(1-2q\cos t + q^2)^2} dt = \frac{\sin t}{1-2q\cos t + q^2}, \\ & \int_0^{\pi/2} \frac{(1+q^2)\cos t - 2q}{(1-2q\cos t + q^2)^2} dt - \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{(1+q^2)\cos t - 2q}{(1-2q\cos t + q^2)^2} dt = \frac{2}{1+q^2}. \end{aligned}$$

Combining relations (6), (7), we arrive at the statement of the theorem. The theorem is proved.

The formula (1) provides the solving of the Kolmogorov-Nikolsky problem (see, e.g., [14, 15]) when performing the theorems conditions without any additional conditions.

REFERENCES

1. A.I. Stepanec. Solution of the Kolmogorov-Nikol'skij problem for the Poisson integrals of continuous functions. *Mat. Sb.*, 2001. — **192**(1). — P. 113–138 (in Russian).
2. S.M. Nikolskiy. Approximation of the functions by trigonometric polynomials in the mean. *Izv. Acad. Nauk. SSSR, Ser. Mat.*, 1946. — **10**(3). — P. 207–256 (in Russian).

3. S.B. Stechkin. Estimation of the remainder of Fourier series for the differentiable functions. Tr. Mat. Inst. Acad. Nauk SSSR. — 1980. — **145**. — P. 126–151 (in Russian).
4. V.I. Rukasov, S.O. Chaichenko. Approximation of the classes of analytical functions by de la Vallee-Poussin sums. Ukr. Math. J. — 2002. — **54**. — P. 2006–2024.
5. A.S. Serdyuk. Approximation of Poisson integrals by de la Vallee Poussin sums. Ukr. Math. J. — 2004. — **56**. — P. 122–134.
6. V.V. Savchuk, M.V. Savchuk, S.O. Chaichenko. Approximation of analytic functions by de la Vallee Poussin sums. Mat. Stud. — 2010. — **34**(2). — P. 207–219 (in Ukrainian).
7. O.O. Rovenska, O.O. Novikov. P. Approximation of Poisson integrals by repeated de la Vallee Poussin sums. Nonl. Oscil. — 2010. — **13**. — P. 108–111.
8. V.E. Velichko, O.A. Novikov, O.G. Rovenskaya. V.I. Rukasov. Approximation of analytic functions by repeated de la Vallee Poussin sums. Tr. Inst. Prikl. Mat. Mekh. — 2011. — **22**. — P. 33–42 (in Russian).
9. O.A. Novikov, O.G. Rovenska. Approximation of classes of Poisson integrals by Fejer sums. Computer Research and Modeling. — 2015. — **7** (4). — P. 813–819 (in Russian).
10. O.O. Novikov, O.G. Rovenska, Yu.V. Kozachenko. Approximation of Poussin integrals by Fejer sums. Modern problems of probability theory and mathematical analysis. Scientific conference, Vorohta, 24–27 February, 2016, P. 110 (in Ukrainian).
11. O.G. Rovenska, O.O. Novikov. Approximation of analytic periodic functions by linear means of Fourier series. Cheb. Sb. — 2016. — **17** (2). — P. 170–183 (in Russian).
12. O. Novikov, O. Rovenska. Approximation of Classes of Poisson Integrals by Repeated Fejer Sums. Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2017. — **38**. — P. 502–509.
13. O.O. Novikov, O.G. Rovenska. Approximation of periodic analytic functions by Fejer sums. Mat. Stud. — 2017. — **47**. — P. 196–201.
14. A.I. Stepanec, Classification and Approximation of Periodic Functions. 1987. Naukova Dumka, Kiev, 268 p. (in Russian).
15. A.I. Stepanec, Classification and Approximation of Periodic Functions. 1995. Dordrecht, Kluwer, 393 p.

Новіков О.О., Ровенська О.Г., Козаченко Ю.А. **Наближення класів інтегралів Пуассона сумами Фейєра.** У роботі вивчаються питання наближення періодичних диференційованих функцій високої гладкості лінійними середніми рядів Фур'є. Одна з класифікацій періодичних функцій - класифікація, що заснована на понятті $(\psi; \beta)$ -диференціювання. Ця класифікація дозволяє ранжувати великий спектр періодичних функцій - від функцій, ряди Фур'є яких можуть розбігатися до цілих і аналітичних. За належного вибору параметрів, що визначають клас, класи $(\psi; \beta)$ -диференційованих функцій можуть збігатися з класами згорток з інтегрованими ядрами.

Мега роботи - представити нові факти, що стосуються апроксимаційних властивостей сум Фейєра на класах функцій, які визначаються мультиплікаторами, у випадку, коли ці послідовності прямують до нуля зі швидкістю геометричної прогресії. За цієї умови, вищезгадані класи складаються з функцій, які можна регулярно продовжити у відповідну смугу комплексної площини.

Питання, що стосуються наближення класів інтегралів Пуассона різними лінійними методами вивчалися в роботах С. Нікольського, С. Стєчкіна, В. Рукасова, С. Чайченка, А. Сердюка та інших авторів. З результатів цих робіт відомо, що на класах інтегралів Пуассона суми Фур'є забезпечують порядок наближення, який збігається з порядком найкращого наближення цих класів тригонометричними многочленами порядку не вищого за n . Проте дослідження апроксимаційних властивостей інших методів наближення може бути корисним в обчислювальній математиці, математичному моделюванні тощо.

В роботі розширено проміжок параметру, що визначає клас функцій, для яких є справедливою знайдена нами до цього асимптотична формула для верхніх граней відхилень сум Фейєра на класах інтегралів Пуассона. Отримана формула є асимптотично точною за будь-якого значення параметрів, що входять до неї.

Ключові слова: асимптотична рівність; інтеграли Пуассона; суми Фейєра

Article history: Received: 9 January 2018; Final form: 21 January 2018;

Accepted: 30 January 2018.

Influence of the temperature state on the damageability due to the creep of claddings of cylindrical fuel elements

Yu. V. Romashov^{1,2}, E. V. Povolotskii¹

¹*National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute Ukraine*

²*V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine*
yu.v.romashov@gmail.com, povolotsky91@gmail.com

This paper deals with the deformation and damageability of the fuel cladding of nuclear reactors, taking into account the creep and the temperature fields across the thickness. Mathematical models and quantitative estimates for durability of the fuel cladding, obtaining using computer simulations, are presented.

Keywords: damageability; creep; fuel cladding; durability; computer simulation

Ромашов Ю.В., Поволоцький Е.В. **Вплив температурного стану на пошкоджуваність внаслідок повзучості оболонок циліндричних тепловиділяючих елементів.** Наводяться отримані за допомогою комп'ютерного моделювання кількісні оцінки впливу температурних полів на довговічність оболонок тепловиділяючих елементів ядерних реакторів.

Ключові слова: пошкоджуваність; повзучість; оболонка твєлу; довговічність; комп'ютерне моделювання

Ромашов Ю.В., Поволоцкий Э.В. **Влияние температурного состояния на повреждаемость вследствие ползучести оболочек цилиндрических тепловыделяющих элементов.** Приводятся полученные с помощью компьютерного моделирования количественные оценки влияния температурных полей на долговечность оболочек тепловыделяющих элементов ядерных реакторов.

Ключевые слова: повреждаемость; ползучесть; оболочка твєла; долговечность; компьютерное моделирование

2010 Mathematics Subject Classification: 74S99, 74R99.

1. Introduction

Inhomogeneous temperature fields and creep deformations exist during operation, and it is necessary to estimate the influence of these temperature fields on the damageability due to the creep of the fuel cladding of nuclear reactors.

Really, the temperature in centers of fuel pins is limited about 1973K, but the temperature in the outer boundary of the cladding, contacting with the heat carrier, is about 630K. At the same time, the outer diameter of the cladding is about 10mm in modern nuclear reactors with the ceramic nuclear fuel and the pressurized water as the heat carrier, which are the most widely-used at present

[1]. Thus, the significantly temperature difference about 1343K exists between the places separated by the small distance about 5mm (one half of the diameter), and the width of the cladding occupies about 0,5mm of this distance. The temperature in the inner boundary of the cladding is defined by the heat conduction from the heated fuel pellet across the gaseous filled the gap and next thru the cladding to the heat carrier cooling the reactor core [1].

It is well-known that the temperature in the inner boundary of the cladding can be estimated for the given density of internal heat sources in fuel pellets, for the given heat contact conditions between the pellet and the gas, between the gas and the cladding, considering also given heat transfer conditions between the cladding and the heat carrier [2]. The heat transfer conditions between the outer boundary of the cladding and the moving heat carrier must provide the limited difference of temperatures in the inner and outer boundaries of the cladding due to the strength limiting conditions with the temperature stresses considering; this difference can be about 20-30K for the structural materials, widely using for manufacturing elements of the reactors core. The mode of the heat carrier flow and the state of the outer of the fuel assemblies are can be controlled in the corresponding limits to provide the necessary heat transfer conditions between the outer boundary of the cladding and the heat carrier, although the condition of heat transfer between the fuel cladding and the heat carrier can be different in the each places of the reactor core due to the local properties of the flow and can have significant changes during operation. From other side, it is practically impossible to accurately control during operation the internal state of each one of the fuel elements, especially the density of internal heat sources in the fuel pellets and the width of the gaseous gap inside the fuel element, which can changed due to deformations of the pellet and cladding and significantly defines the heat transfer processes, when the core of modern nuclear reactors is formed by means about 50000 fuel elements [1], [2]. Due to these circumstances, the temperature fields can significantly differ in the cladding of each fuel elements, and it is practically impossible to predict the temperature field in each cladding absolutely accurately. Thus, the temperature fields in the cladding can be significantly different in each of the fuel elements even for the similar heat transfer conditions between the outer boundary of the cladding and the moving heat carrier, i.e. the average temperature in the wall thickness of some cladding can be noticeably greater or lesser relatively the expected value, averaged for the all core of the reactor.

The damages due to the creep deformation growth are the one of the most dangerous for the fuel cladding of nuclear reactors, because they can lead to the leakage of the activated fission products form inner volume of the cladding into the heat carrier, which is not isolated and can fall into the environment [1], [2], [3]. The creep deformation growth is significantly depended on the temperature, and it is necessary to have the estimations for influence of the temperature fields on the damageability due to the creep of the cladding [2], [3], [4], especially when the temperature fields can not be estimated accurately.

2. Mathematical formulation of the problem

The possibilities of experimental approaches are significantly limited for research the processes in the reactor core, because it is very difficult and sometime practically impossible to create artificially the conditions similar existing in the reactor core during operation. Thus, the mathematical modeling and computer simulation are the most effective approaches to research the processes in the reactor core in different operation modes, including the damageability of structural elements and different disasters. Next, we will consider the mathematical models of mechanical behavior under creep deformations and damageability for the fuel cladding with cylindrical shape, which is widely used in modern nuclear reactors [2] and, very possibly, will be used in reactors of next generations.

The characteristic length L is significantly greater than the outer diameter b of the fuel element's cladding in modern reactors (pic. 1-a). Due to this circumstance, it is possible to consider the stress-strain state of the cladding only for its axial segment (pic. 1-b), which can be imagined as the thick round cylinder under the small deformations under the well-known conditions of the plane problem [5], [6], taking into account the inner pressure produced by the gases between the pellets and cladding, the outer pressure produced by the moving heat carrier, the temperature field produced by heat conduction thru the wall thickness, as well as creep deformations. Thus, it is necessary to consider the linear kinematic equations for total deformations, and the equilibrium equations, and the linear equations of elastic deforming, taking into account that the total deformations consist of the elastic and creep deformations. It is well-known [5], [6], how to reduce the general view of listed equations, to the particular equations for the plane quasi-static problem for thick-walled round cylinder under the noticed above assumptions. It is not necessary in this article to present the way from listed above general equations to the particular equations, corresponding to the assumptions of the plane problem, but it is necessary to present the differential equations and the boundary conditions of the mathematical model of the stress-strain state of the cladding in the final view used for computer simulations:

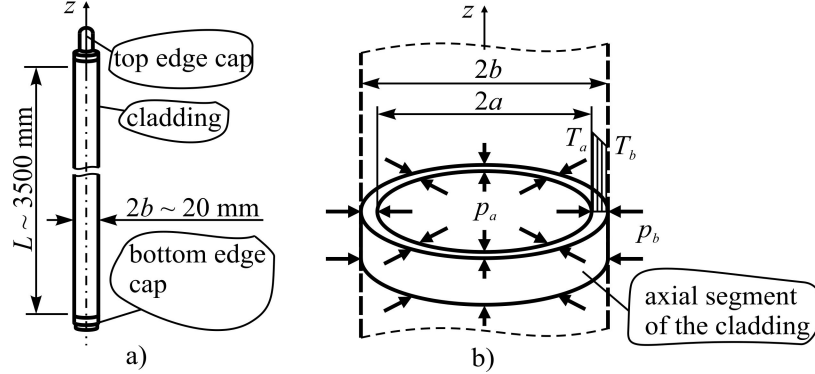
$$\begin{aligned} -\frac{1}{E}\sigma_r + \frac{\nu}{E}\sigma_\theta + \frac{\partial u}{\partial r} &= \alpha(T - T_0) + c_r - \frac{\nu}{E}\sigma_z, \quad a \leq r \leq b, \\ \frac{\nu}{E}\sigma_r - \frac{1}{E}\sigma_\theta + \frac{u}{r} &= \alpha(T - T_0) + c_\theta - \frac{\nu}{E}\sigma_z, \quad a \leq r \leq b, \\ \sigma_z &= p_a \frac{b^2 - a^2}{b^2 - a^2} - p_b \frac{b^2 - a^2}{b^2 - a^2}, \quad a \leq r \leq b, \\ \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r} &= 0, \quad a < r < b, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\sigma_r|_{r=a} = -p_a, \quad \sigma_r|_{r=b} = -p_b, \quad (2)$$

where a , b are the inner and outer radii of the cladding; r is the radial coordinate across the cladding wall thickness; σ_r , σ_θ , σ_z and u are the radial, circumferential, axial stresses and radial displacement; E , ν and α are Young's

module, Poisson's ratio and the thermal expansion coefficient of the material used to make the cladding; c_r , c_θ are the radial and circumferential creep deformations; T is the temperature of the cladding; $T_0 = 293K$ is the temperature of the naturally unloaded state of the cladding; p_a and p_b are the inner and the outer pressures, acting on the cladding.

It is possible to find the stresses $\sigma_r = \sigma_r(r)$, $\sigma_\theta = \sigma_\theta(r)$ and displacement $u = u(r)$ fields at the some time $t \geq 0$ by solving the linear boundary-value problem (1), (2) for the given pressures p_a , p_b , for the given temperature field $T = T(r)$ and for the given creep deformations $c_r = c_r(r, t)$, $c_\theta = c_\theta(r, t)$ at this time moment t . The average values of the pressures p_a , p_b are usually known for the given type of nuclear reactors and for modern types of widely-used pressurized-water reactors these values are $p_a \approx 6MPa$ and $p_b \approx 16MPa$ [1], [2], but it is necessary to have the additional equations to find the temperature T and the creep deformations c_r , c_θ .



Pic. 1. Fuel element schematic design (a) and axial segment of it's cladding (b)

The temperature field in the wall of the cladding must be found as the solution of the heat conduction problem for the cylinder, representing the cladding. Next, we will take into account the temperature field, corresponding to the well-known axi-symmetrical stationary heat conduction, which can be represented in the form of boundary-value problem [7]:

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = 0, \quad a \leq r \leq b, \quad T|_{r=a} = T_a, \quad T|_{r=b} = T_b, \quad (3)$$

where T_a and T_b are the temperatures on the inner and outer radii of the cladding, and it is evidently that $T_a \geq T_b$, because the heat sources are inside the cladding.

The solution of the heat conduction problem (3) can be easily found by analytical integration of differential equation and analytical finding the necessary constants from the boundary conditions. It is not necessary to show the elementary analytical transformations, leading to the solution of the heat conduction problem (3), but it is necessary to present final well-known result for the temperature field

in the cylindrical wall:

$$T(r) = T_b - (T_b - T_a) \frac{\ln(r/b)}{\ln(a/b)}, \quad a \leq r \leq b. \quad (4)$$

where T_a and T_b are the temperatures on the inner and outer radii of the cladding; it is evidently that $T_a \geq T_b$ because the heat sources are inside the cladding.

The result (4) for the temperature field will be used next in the computer simulations of the cladding.

To find the creep deformations and the damageabilities in the structural material of the cladding, it is necessary to propose the corresponding mathematical model. This model can be represented in the form of differential equations with initial conditions, which for wide classes of the creep deformations and the damageabilities, which are existed in different structural materials, can be represented by using the Cachanov-Rabotnov scalar damage parameter in the next well-known [6], [8] view:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_r}{\partial t} &= \frac{3 f_c(c_{eq}, \omega, \sigma_{eq}; T)}{2 \sigma_{eq}} \left(\frac{2}{3} \sigma_r - \frac{1}{3} \sigma_\theta - \frac{1}{3} \sigma_z \right), \\ \frac{\partial c_\theta}{\partial t} &= \frac{3 f_c(c_{eq}, \omega, \sigma_{eq}; T)}{2 \sigma_{eq}} \left(\frac{2}{3} \sigma_\theta - \frac{1}{3} \sigma_r - \frac{1}{3} \sigma_z \right), \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} &= f_\omega(c_{eq}, \omega, \sigma_{eq}; T), \end{aligned} \quad (5)$$

$$c_r(r, 0) = 0, c_\theta(r, 0) = 0, \omega(r, 0) = 0, \quad a \leq r \leq b, \quad (6)$$

where $\omega = \omega(r, t)$ is the Cachanov-Rabotnov scalar damage parameter; $f_c(c_{eq}, \omega, \sigma_{eq}; T)$ and $f_\omega(c_{eq}, \omega, \sigma_{eq}; T)$ are the velocities of the creep equivalent deformation and the damage parameter; $c_{eq} = c_{eq}(c_r, c_\theta)$ and $\sigma_{eq} = \sigma_{eq}(\sigma_r, \sigma_\theta)$ are the equivalent creep deformation and the equivalent stress necessary to equivalence the uni-axial and multi-axial stress-strain states.

The effect of the temperature field influence on the damageability of cladding can be estimated by using the mathematical model (1)-(6) due to the presence of the temperature field (4) in the mathematical model (1), (2) of the stress-strain state, and in the kinetic equations (5) for the creep deformations and the damage parameter. The velocities $f_c(c_{eq}, \omega, \sigma_{eq}; T)$ and $f_\omega(c_{eq}, \omega, \sigma_{eq}; T)$, presenting in creep-damage kinetic equations (5) must be obtained using the experimental data about the rupture of the specimens of materials under the uni-axial tensile in the creep conditions [6], [8], and it is relatively easy to obtain the velocities f_c and f_ω for given temperatures only. Next, we will consider the cladding made from the the zirconium-based alloys which are widely used to make the cladding in modern widely-used reactors [1], [2]. For zirconium-based alloys we will use the

creep-damage velocities in the form:

$$\begin{aligned}
 f_c(c_{eq}, \omega, \sigma_{eq}; T) &= 0,25 f_\omega(c_{eq}, \omega, \sigma_{eq}; T), \\
 f_\omega(c_{eq}, \omega, \sigma_{eq}; T) &= B_1(T) \left(\frac{\sigma_{eq}}{1-\omega} \right)^{k_1(T)} \left(1 - 2^{-\exp(100\sigma_{eq}-S(T))} \right) + \\
 &+ B_2(T) \left(\frac{\sigma_{eq}}{1-\omega} \right)^{k_2(T)} 2^{-\exp(100\sigma_{eq}-S(T))},
 \end{aligned} \tag{7}$$

where $B_1(T)$, $k_1(T)$, $B_2(T)$, $k_2(T)$ and $S(T)$ are the parameters defined for the given temperature T ; $2^{-\exp(100\sigma_{eq}-S(T))}$ is the approximation of the step function [9]; $\sigma_{eq} = \sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2} / \sqrt{2}$.

First relation (7) form is in the consequence of zirconium-based alloys properties that the rupture creep deformation is not depended on the stress and equals approximately 0,25 [10]. Two items, introduced in the second relation (7), are necessary to take into account the differences in the tilts angles of two characteristic straight sections, typically existing when logarithmic coordinates are used to represent the depending between the rupture time and stress under the creep for the given temperature and existing also for the zirconium-based alloys [10]. For the available experimental data, consisting of the stresses and corresponding to them the times of the rupture times for the given temperature, as, for example, in [10], it is possible to find the parameters $B_1(T)$, $k_1(T)$, $B_2(T)$, $k_2(T)$ and $S(T)$ values, corresponding to that given temperature, by using the least squares. It is impossible to represent the parameters $B_1(T)$, $k_1(T)$, $B_2(T)$, $k_2(T)$ and $S(T)$ values, corresponding to the given temperature, in the form of finite formulas, but it is only possible to propose the algorithms, which allow to obtain these parameters values; it is not suitable do discuss these algorithms in this article, but it is necessary to note, that these algorithms are reduced to the least squares applications for different combinations of points from the available experimental data to find the optimal matching to these data. Thus, it is possible to find the parameters $B_1(T)$, $k_1(T)$, $B_2(T)$, $k_2(T)$ and $S(T)$ values in equations (7) for same given temperature, using the necessary available corresponding experimental data, but are no possibilities to find these parameters values for some required temperatures without corresponding experimental data. In this situation it seems naturally to build the extrapolation of available experimental data such that to have the data necessary to find the parameters $B_1(T)$, $k_1(T)$, $B_2(T)$, $k_2(T)$ and $S(T)$ values for some required temperature when are no experimental data for this required temperature. This approach naturally requires the extrapolation of the experimental data about dependencies between the rupture time and the stress, available for the given temperatures, to the required temperatures, and it is naturally to use the long-term strength extrapolation based on the well-known [11] Larson-Miller parameter

$$\sigma_{eq} = A + BP_{LM}, \quad P_{LM} = T(C + \lg(t^*)), \tag{8}$$

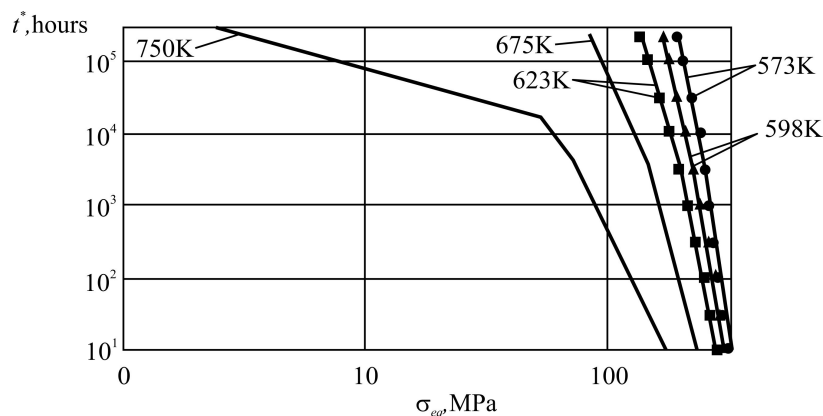
where $A \cong 827,516$, $B \cong -518,932$ and $C \cong 15,895$ are the parameters defined using the primary data about rupture of the Zr-Nb alloy under the creep conditions [10] for the creep in MPa, time in hours and temperature in K; P_{LM} is Larson-Miller parameter; t^* is the rupture time under the creep conditions.

In the case of absence of the finite formulas and clear denoted algorithms for the evaluation the parameters $B_1(T)$, $k_1(T)$, $B_2(T)$, $k_2(T)$ and $S(T)$ from relations (7) as well as of the material constants from the Larson-Miller parameter (8) it is necessary to substantiate using the presented in the form (6)-(8) creep law. For this substantiation it is possible to estimate the rupture times using the creep law (6)-(8), the last equation (5) and the initial condition (6) for the given constant stresses and temperatures:

$$t^* = \int_0^1 \frac{d\omega}{f_\omega(\omega, \sigma_{eq}; T)}, \tag{9}$$

where is took in consideration that the $f_\omega(c_{eq}, \omega, \sigma_{eq}; T)$ is not depended on c_{eq} in the particular case (7) and is reduced to $f_\omega(\omega, \sigma_{eq}; T)$.

Using the formula (9), it is possible to estimate the rupture times, corresponding for the given stresses and temperatures, including the available data used to find the parameters in relations (7), (8), that gives the opportunities to estimate the differences. The results, obtaining using the formula (9), last relation (7) and relation (8), show us (pic. 2) that the relations (7), (8) allow us to predict fairly accurate the rupture time under the creep conditions for wide choice for values of the stress and the temperature; the curves in pic. 2, corresponding to the temperatures $T = 675K$ and $T = 750K$, are obtained only due to the extrapolations using Larson-Miller parameter. It is obviously, that the errors in relations (7), (8) are defined first of all by errors of the Larson-Miller extrapolations, which are allowed for the engineering applications [11]. Thus, the results, presenting in pic. 2, give some substantiation for the relations (7), (8), defining the velocities of creep deformations and damage parameter.



Pic. 2. Long-term strength data (markers) and computed results (curves) obtained using proposed creep-damage law equations for different temperatures

Solving the equations (1), (5) with the boundary conditions (2) and the initial conditions (6) taking into account the relations (7), (8) allows to find the stress-strain state, the creep deformations and the Cachanov-Rabotnov damage parameter and, as the result, the time t^* before the rupture moment of the cladding, which can be defined by using the condition

$$t^* : \quad \omega(r, t^*) = 1 \quad \forall r, a \leq r \leq b. \quad (10)$$

Thus, the mathematical model of the cladding deformation and damage accumulation under the inner and outer pressures and the temperature field are proposed in the form (1), (2), (4)-(8) of the system of boundary-value and initial value problems.

3. Approaches for the numerical computer simulations

It is necessary to execute the computer simulations of the cladding damaging for the different temperatures to research the influence of the temperature state on the damageability due to the creep of the cladding. Such computer simulations require to numerically solve the differential equations (1), (5) with the boundary conditions (2) and initial conditions (6) taking into account the temperature field (4) and the relations (7), (8). Next, the semi-discretization method also all-known as the method of lines will be used to solve the differential equations (1), (5). To realize this approach we will use the spatial grid with number n of the nodes with coordinates

$$r_k = a + (k - 1)\Delta r, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (11)$$

where $\Delta r = \frac{b - a}{n - 1}$ is the step of the spatial grid.

We will exclude the spatial derivatives from equations (1) using the finite differences formulas. Thus, the all-known [12] scheme of finite differences method applied to the boundary-value problem (1), (2) lead us to the algebraic relation

$$\mathbf{A}_n^{(1)} \mathbf{u}_n^{(1)} = \mathbf{f}_n^{(1)} + \mathbf{A}_n^{(2)} \mathbf{u}_n^{(2)}, \quad (12)$$

where $\mathbf{u}_n^{(1)}$ is the vector consisting the nodal values of the σ_r , σ_θ and u in the spatial grid nodes (11); $\mathbf{u}_n^{(2)}$ is the vector consisting the nodal values of the c_r , c_θ and ω in the spatial grid nodes (11); $\mathbf{A}_n^{(1)}$, $\mathbf{A}_n^{(2)}$ and $\mathbf{f}_n^{(1)}$ are the matrices and the vector obtained as the results of the excluding of the spatial derivatives using the finite differences formulas.

We can consider the initial-value problem (5), (6) in the grid nodes (11):

$$\frac{\partial \mathbf{u}_n^{(2)}}{\partial t} = \mathbf{f}_n^{(2)} \left(\mathbf{u}_n^{(2)}; \mathbf{u}_n^{(1)} \right), \quad \mathbf{u}_n^{(2)}(0) = \mathbf{0}, \quad (13)$$

where $\mathbf{f}_n^{(2)}$ is the vector corresponding to the velocities of the creep deformations and the damage parameter from the equations (5) obtained in the grid nodes (11).

The relation (12) allows us to exclude the vector $\mathbf{u}_n^{(1)}$ from the equation (13) and as a result leads us to Cauchy problem in the canonical form

$$\frac{\partial \mathbf{u}_n^{(2)}}{\partial t} = \mathbf{f}_n^{(2)}(\mathbf{u}_n^{(2)}), \quad \mathbf{u}_n^{(2)}(0) = \mathbf{0}, \quad (14)$$

where $\mathbf{f}_n^{(2)}(\mathbf{u}_n^{(2)}) = \mathbf{f}_n^{(2)}(\mathbf{u}_n^{(2)}); \mathbf{u}_n^{(1)} = (\mathbf{A}_n^{(1)})^{-1}(\mathbf{f}_n^{(1)} + \mathbf{A}_n^{(2)}\mathbf{u}_n^{(2)})$.

We will use Merson method [13] to solve the initial-value problem (12), because this method gives us the effective way to define the integrating step on time corresponding to increasing velocities of the creep deformations and the damage accumulations on the third stage [14]. Thus, we have the effective scheme (11)-(14) to numerical solve the equations (1), (5) necessary for the computer simulations of the cladding.

4. Results of the numerical computer simulations

The aim of computer simulations is to obtain the quantity estimations about the temperature influence on the damageability of the zirconium cladding with cylindrical shape widely used in modern reactors. To reach this aim we will consider the computer simulations based on the mathematical model (1)-(8) and numerical solution scheme (11)-(14) for the zirconium cladding with the parameters typical for modern nuclear reactors used the pressurized light water as the heat carrier:

$$a = 3,855mm, \quad b = 4,55mm, \\ p_a = 6MPa, \quad p_b = 16MPa, \quad T_b = T_a - 25K.$$

We will consider the computer simulations for the several values of the inner temperature T_a :

$$T_a = 625K, \quad T_a = 650K, \quad T_a = 675K, \\ T_a = 700K, \quad T_a = 725K, \quad T_a = 750K.$$

Results of computer simulations depends on the number n of nodes in the grid (10) and it is necessary to substantiate the number n of nodes necessary to obtain the solutions with required errors of the approximation. The simplest practical way to substantiate number n of the nodes is to make the series of computer simulations with different numbers of nodes to compare each other the results of these simulations. It is naturally to use first of all the rupture time (10) of the cladding as the integrated characteristic of the numerical solutions for the differential equations (1), (5). The results of simulations with different numbers

n for the temperature $T_a = 750K$ lead to next results:

$n = 12,$	$t^* = 1.91462321695327759 \cdot 10^4 hours,$
$n = 22,$	$t^* = 1.92791736355613031 \cdot 10^4 hours,$
$n = 32,$	$t^* = 1.97832680938720703 \cdot 10^4 hours,$
$n = 42,$	$t^* = 2.06514756988187117 \cdot 10^4 hours,$
$n = 52,$	$t^* = 2.07993760411059251 \cdot 10^4 hours,$
$n = 62,$	$t^* = 2.03998893927619300 \cdot 10^4 hours,$
$n = 72,$	$t^* = 2.09723706951267550 \cdot 10^4 hours,$
$n = 82,$	$t^* = 2.04467821414862175 \cdot 10^4 hours,$
$n = 92,$	$t^* = 2.09752126695804298 \cdot 10^4 hours,$
$n = 102,$	$t^* = 2.10205232226189223 \cdot 10^4 hours,$
$n = 112,$	$t^* = 2.06086735430503826 \cdot 10^4 hours.$

The analysis of the results of the computer simulations obtained for the different number n of the nodes shows that the proposed numerical scheme (11)-(14) with the relatively low numbers n of nodes allows to obtain the numerical solution of the problem (1)-(8) with errors of the approximations available for engineering applications, and number $n = 52$ is sufficiently for computer simulations of the cladding.

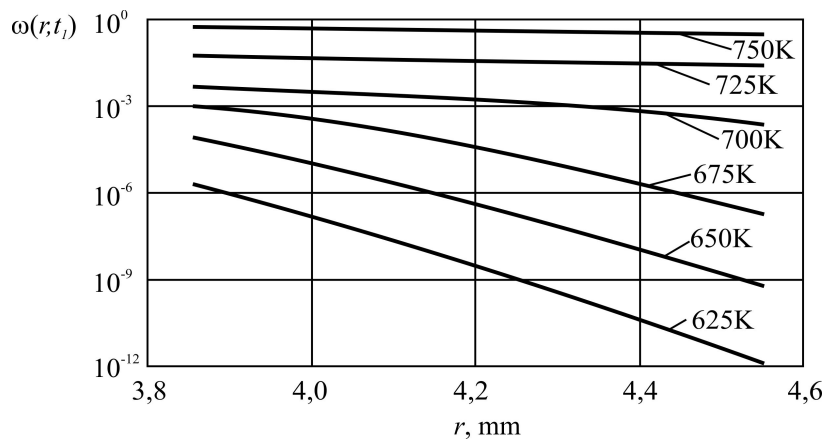
The damage parameter $\omega(r, t)$ can be used as the measure of the damageability due to its properties that the value $\omega = 0$ corresponds to the non-damaged state and the value $\omega = 1$ corresponds to the state of rupture. To estimate the temperature influence on the damageability of the cladding it is necessary to present the fields of the damage parameter obtained for different values of the temperature T_a at the some given time moment $t = t_1$; next we use the value t_1 corresponding two years of operation:

$$t_1 = 17520 hours.$$

Obtained results showing in the pic.3 give us the quantities estimation of the temperature significant influence on the damageability of the cladding made from the zirconium based alloys. The damageability of the cladding not leads to the rupture during two-years operation even for the temperature $T_a = 750K$. At the same time, possibilities of the operation of the cladding are limited by the leakages of the fission's gaseous products also [1, 2] which can exist without the rupture of the cladding and can be realized by the diffusion mechanisms for example. It is naturally that the damageability of the cladding can accelerate the diffusion mechanisms and increase the leakage of the fission's gaseous products, such that the cladding damaged even without the rupture can not be operated further.

The core of nuclear reactors includes more than 50000 fuel elements and the normal operation admits the rupture not more than 10 fuel elements [2]. It is generally recognized that the ruptures of the cladding are the result of the contact interacting between the fuel pellets and the cladding [2]. This interaction is not fully researched now, but it is obviously that the contact interaction between

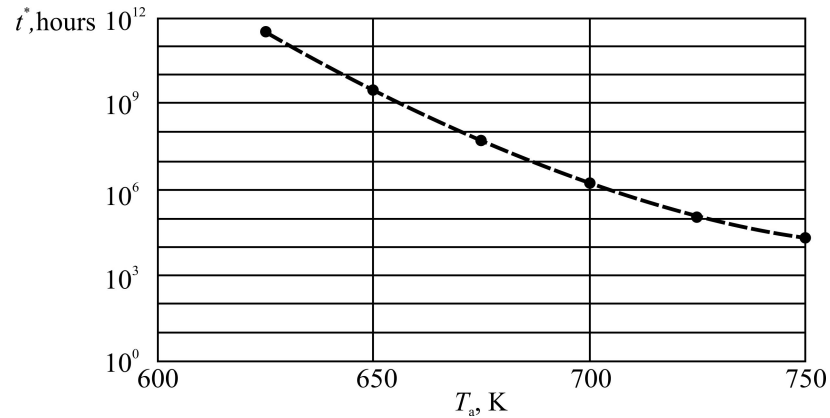
the pellet and the cladding leads to the increasing the temperature inside the cladding and it is necessary to have the quantity estimations of the temperature influence of the rupture time of the cladding. The computer simulations of the cladding for the different values of the temperature T_a with the relation (10) give us the opportunities to estimate the corresponding rupture times of the cladding that it leads us to the dependence between the rupture time t^* and the inner temperature T_a , which is presented in pic. 4. It is can be saw (pic. 4) that for the cladding, making from the zirconium-based alloys, the rupture time has a widely changing for the inner temperatures $625K \leq T_a \leq 750K$, corresponding to the parameters of the modern pressurized water reactors. Taking into account that the values $625K \leq T_a \leq 750K$ of the temperature in the inner surface of the cladding are possible for the some particular cladding, the result (pic. 4) shows that the rupture of the some cladding are possible for modern and future generations of the reactors, which use the pressurized light water as a heat carrier and use the zirconium-based alloys as the structural materials of the cladding. With accounting of this circumstances, it is necessary to design the core of reactors with the some given probability of the rupture of the cladding, considering that the ruptures of the cladding for not more than 10 from more than 50000 fuel elements are allowed during required time of operating [1, 2].



Pic. 3. Fields of the damage parameter in the thickness of the cladding obtained in the time moment $t = t_1$ for different values of the temperature T_a

It seems, that the significant rupture time of the cladding, corresponding to the expected value $T_a \approx 650K$ of the temperature in the inner surface during the normal operation, provides the absence of ruptures of the cladding during 4 years operation for modern reactors normally and the duration of the operation of the modern nuclear fuel can be increased significantly. Concerning with this circumstance, it is necessary to note, that the rupture times, presented in pic. 4, are obtained by using the conditions (10), which corresponds to the full mechanical fracture of the cladding with forming the visually observed ruptures. At the same time, the failure of the fuel element is defined by increasing the radioactivity of

the heat carrier, which it is possible more early than the mechanical fracture due to the leakages thru the micro-defects in the cladding, forming during operating due to damageabilities including.



Pic. 4. Influence of the inner temperature on the rupture time of the cladding

5. Conclusions

It is evidently from the fundamental knowledge and qualitative assessments in solids mechanics, that the temperature fields have certain influence on the damageability and on the permissible life time of the cladding, but the importance of that influence can be estimated using the only corresponding quantitative data in each from the particular cases. These quantitative data can be obtained using only the computer simulations, because it is difficult to realize the testing conditions similar to the conditions into reactor core, and it is difficult to estimate the damageability in the structural materials using instrumental measures. The computer simulations of the cladding necessary to estimate the influence of the temperature on the damageability must define the changing of the state of the cladding during the operation, corresponding to their modes and conditions, and it is necessary to have the numerical scheme allows to solve the mathematical problem, which will be generated by that mathematical model. The quality of the quantitative data, obtained using the computer simulations, will be defined by the opportunities of the used mathematical models first of all.

The mathematical model of the cladding stress-strain state and damaging due to the inner and outer pressures in the temperature field under the creep conditions was proposed to obtain the quantitative estimation for the influence of the temperature fields on the damageability of the cladding. That mathematical model was presented as the system of the some boundary-value problem and the some initial-value problem, what it allows to estimate changing of the stress-strain states and its influence on changing of the creep deformations and damage parameter. But, it is necessary to note, that the proposed mathematical model has significant limitations in the considering deformations of the cladding and allows to only estimate the axial-symmetric stress-strain state of the cladding, but, at

the same time, other deformations, including bending of the cladding, are possible during operation. It is necessary further to have the mathematical models with taking into account the different deformations, especially including bending or 3-D deformations, to more precisely estimate the state of the cladding. The rupture of the cladding is the consequence the result of only the thermal creep deformations and the damages due to the thermal creep in the proposed mathematical model of the cladding, and it is requires the significantly caution to the obtained results, because the different processes lead to rupture at the same time. It is necessary to consider the corrosion, the radiation damaging and creep, and the another damaging processes leading to the rupture to the more precisely estimate the state of the cladding. But, it is sufficiently to consider the only axial-symmetric deformations and the thermal creep to obtain the approximately quantitative estimations of the influence of the temperature field on the damageability of the cladding what it is corresponds to the purpose due to significant influence the temperature on the creep.

The numerical scheme based on the semi-discretization method, also well-known as the method of lines, was proposed to numerically solve the system of the some boundary-value problem and the some initial-value problem, presenting the proposed mathematical model of the cladding. That approach leads to the resolved initial-value problem, which can be solved using the well-known numerical methods. The experience of the computer simulations shows, that the proposed numerical scheme allows to obtain quickly the numerical solutions with the necessary accuracy, and it is possible to recommend to use that numerical scheme in further researches.

It is proposed to use the scalar damage parameter obtained for the some interesting given time and the rupture time as the damageability measures of the cladding. It is shown, that the fields of the damage parameter are noticeably nonuniform in the wall of the cladding. The number values of the damage parameter, testified the absence of the rupture of the cladding for the average temperatures expected for the normal operation, but the computer simulations allow to illustrate the constantly accumulation of the damageabilities in the material. The significant decreasing of the rupture time of the cladding with increasing before 750K of the temperature evidences that the rupture of the some cladding in reactor's core is possible due to the extremal operating conditions, when the difference between the inner and the outer temperatures of the fuel element is about 1350K, and this temperature's difference is realized on 5 mm of the fuel element's transverse dimension due to the heat conductivity and the heat transfer mechanisms. It is assumed, that at this significant temperature differences the temperature on the inner boundary of the cladding is about 650K, and it is shown, using the computer simulations, that the time before rupture of the cladding under the creep conditions at that temperature is practically unlimited. At the same time, the temperature on the inner boundary of the cladding is the result of the heat conduction and the heat transfers in the spatial domain inside the cladding with the size about 5 mm between the temperature about

1400K and 340K and that result is significantly depended from the condition of the heat conduction and the heat transfer. It is possible, that the heat transfer's and the heat conduction's conditions inside of the some fuel element may be significantly differ from the average conditions in the core, consisting of more than 50000 fuel elements, such so in the some of fuel element the temperature on the inner boundary is more than 650K, corresponding to the average conditions and can be 700K or 750 K actually. Due to these circumstances, it is actually necessary to design the cladding of fuel elements with the some given probability of the rupture of the cladding, considering that the ruptures of the cladding for not more than 10 from more than 50000 fuel elements are allowed during operating. Thus, the probability of the rupture is necessary to substantiate quality of the fuel elements and their cladding's design solutions, that must be developed in further researches.

Obtained results for the time before rupture of the cladding, corresponding to the expected value $T_a \approx 650K$ of the temperature in the inner surface during the normal operation, show that the mechanical rupture of the cladding due to the creep is impossible during 4 years operating. This is agreed with experience of exploitation of the fuel elements in industrial nuclear reactors, that failures of the fuel elements occur due to the leakages of the fission products outside the volume of fuel elements, which is defined by increasing the radioactivity of the heat carrier without the visually observed ruptures of the cladding. It is naturally to assume, that the depressurization of the fuel elements is the result of damageabilities of the cladding, including due to the creep. Thus, to estimate the the reliability indexes of the fuel elements it is necessary to propose the mathematical models of the leakages outside the fuel elements, considering with the damageabilities and creep deformations of the cladding.

REFERENCES

1. R.E. Masterson. Nuclear engineering fundamentals. A practical perspective, CRC Press, 2017. – 961 p.
2. Brian R.T. Frost. Nuclear fuel elements. Design, fabrication and performance, Pergamon Press, 1982. – 2841 p.
3. B.M. Ma. Nuclear reactor materials and applications, Van Nostrand Reinhold Co., 1983. – 610 p.
4. T. Yokobori. An interdisciplinary approach to fracture and strength of solids, Wolters-Noordhoff Scientific Publications LTD, 1968. – 323 p.
5. J.R. Barber. Elasticity, Kluwer Academic Publishers, 2004. – 410 p.
6. J. Betten. Creep mechanics, Springer-Verlag, 2008. – 367 p.
7. N.M. Ozisik. Heat conduction, John Wiley & Sons, Inc., 1993. – 692 p.

8. J.Lemaitre, R. Desmorat. Engineering damage mechanics. Ductile, creep, fatigue and brittle failures, Springer, 2005. – 394 p.
9. G.A. Korn, T.M. Korn. Mathematical handbook for scientists and engineers, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1961. – 943 p.
10. Norms for calculating the strength of elements of equipment and pipelines of nuclear power plants, Moscow, 1989, 525 p. (in Russian) [Original 'Нормы расчета на прочность элементов оборудования и трубопроводов атомных энергетических установок (ПНАЭ Г-7-002-86). Москва. Энергоатомиздат. 1989'].
11. A.J. McEvily. Metals failures: mechanisms, analysis, prevention, John Wiley & Sons, Inc., 2002. – 324 p.
12. C. A. J. Fletcher. Computational techniques for fluid dynamics. 1 Fundamental and general techniques, Springer-Verlag, 1988, 1991. – 404 p.
13. J.D. Hoffman, S. Frankel. Numerical Methods for Engineers and Scientists, Marcel Dekker, Inc., 2001. – 825 p.
14. O.K. Morachkovskii, Yu.V. Romashov. Solving initial-boundary-value creep problems, International Applied Mechanics.– 2009. – vol. 45, No **10**. – P. 1061–1070.

Ромашов Ю.В., Поволоцький Е.В. **Вплив температурного стану на пошкоджуваність внаслідок повзучості оболонок циліндричних тепловиділяючих елементів.** Наводяться отримані за допомогою комп'ютерного моделювання кількісні оцінки впливу температурних полів на довговічність оболонок тепловиділяючих елементів ядерних реакторів. Комп'ютерне моделювання здійснено за допомогою математичної моделі деформування та руйнування оболонки твелу внаслідок повзучості під дією тисків осколків ділення та теплоносія в неоднорідному температурному полі, що встановлюється при експлуатації уздовж товщини оболонки. Математична модель представлена у вигляді крайової задачі, яка визначає напружено-деформований стан оболонки з урахуванням деформацій повзучості на основі відомих концепцій механіки деформівного твердого тіла, та початкової задачі, яка визначає розвиток у часі деформацій повзучості та скалярного параметру пошкоджуваності при заданих напруженнях та температурі. Числові параметри, що характеризують конструкційний матеріал у рівняннях для деформацій повзучості та параметру пошкоджуваності, для заданої температури визначалися на основі даних, що отримані шляхом екстраполяції відомих даних, відповідних обмежених кількості значень температури та напруження, із використанням параметру Ларсона-Мілера. Для розв'язування диференціальних рівнянь, що представляють математичну модель деформування та руйнування оболонки твелу, використано метод напівдискретизації. Результати розрахунків свідчать, що оболонки твелів мають достатньо високу довговічність при температурах, які відповідають середнім температурам, що очікуються в активній зоні реактору. В той же час, розрахунки свідчать, що довговічність оболонок твелів суттєво зменшується до небезпечного рівня при підвищених температурах, які є цілком можливими через локальні відхилення процесів теплообміну в активній зоні реактору. Це є дуже суттєвим, оскільки у використаній математичній моделі граничний стан оболонки твелу, що обмежує можливості її експлуатації, відповідає повному механічному руйнуванню оболонки, хоча насправді експлуатація твелів обмежується більш жорсткими умовами щодо рівня герметичності оболонки, який може не забезпечуватися навіть й для незруйнованої цілком оболонки.

Ключові слова: пошкоджуваність; повзучість; оболонка твелу; довговічність; комп'ютерне моделювання

Article history: Received: 18 August 2018; Final form: 11 October 2018;

Accepted: 15 October 2018.

Mathematical model of liver regeneration processes: homogeneous approximation

V. V. Karieva, S. V. Lvov

*V. N. Karazin Kharkiv National University,
Kharkiv, 4 Svobody sqr., 61022, Ukraine
valerija.kareva@gmail.com, lvovser@gmail.com*

This paper deals with the rules and the mechanisms regulation of liver regeneration. The generalized mathematical model was developed. This model has an explicit dependence on the control parameters. To solve this problem there were accepted such assumptions: homogeneous approximation; small toxic factors.

Keywords: mathematical model, liver regeneration, homogeneous approximation

Карєва В. В., Львов С. В. **Математична модель процесів регенерації печінки: однорідне наближення.** У статті розглядаються правила й механізми регуляції процесів регенерації печінки. Було розроблено узагальнену математичну модель, що явно залежить від керуючих параметрів. Для цього були зроблені наступні припущення: однорідне наближення; помірний токсичний вплив.

Ключові слова: математична модель, регенерація печінки, однорідне наближення

Карєва В. В., Львов С. В. **Математическая модель процессов регенерации печени: однородное приближение.** В статье рассматриваются правила и механизмы регуляции процессов регенерации печени. Была разработана обобщенная математическая модель в явной зависимости от управляющих параметров. При этом были сделаны следующие предположения: однородное приближение, умеренное токсическое воздействие.

Ключевые слова: математическая модель, регенерация печени, однородное приближение.

2010 Mathematics Subject Classification: 92C37, 65C20.

1. Introduction

The defining of principles and rules regulation of biological processes during development and maintenance/restoration (regeneration) of dynamic organs' and tissues' homeostasis is one of the most important fundamental problems in theoretical Biology and Medicine.

Liver diseases are an important medical problem. Knowledge about the rules and mechanisms of liver regeneration is the basis for the development of new

effective medicaments and the choice of rational strategies for the therapy of liver diseases.

The regeneration processes in liver represents particular interest. The liver has the greatest plasticity and the largest set of possible regeneration strategies. In addition, there are a large experimental data that enable to elaborate and prove mathematical models for study liver regeneration *in silico* and their verification *in vivo* [1].

The processes of liver regeneration and their mathematical models have been studied in the many interdisciplinary projects [2, 3, 4].

Despite of the achievements in the field of modeling of the liver regeneration processes there are still enough "difficult" problems requiring the new ideas, approaches and methods of justification and development of mathematical models.

The mathematical models of liver regeneration can be considered as dynamic networks of intracellular processes and processes of cell-cell communication. Such non-linear dynamic networks are extremely complex. They can represent processes in hundreds of millions of cells of different types and much more interactions between them.

Such mathematical models of liver regeneration processes can have an almost unlimited set of potentially possible parametric phase organization.

However, in the experiment we observe only a limited number of strategies and qualitative phenomena of maintenance and restoration (regeneration) of the liver's dynamic homeostasis. It can be supposed that the processes of liver regeneration are the subject of some control which provides "regularization" of the dynamics of the whole system.

According to one of the most general hypothesis of theoretical biology the regulation processes of maintaining and restoring dynamic homeostasis is realized due to the phenomenon of appearing self-organization in a complex dynamic network of interacting liver cells [5]. But the common rules and mechanisms of the self-organization and regulation of liver regeneration observed in the experiment are unknown.

The mathematical cell biology at the present time is an empirical discipline. It is represented by a set of experimental data, knowledge and rules that are derived from the experiment and determine the properties of the system and its possible dynamics.

At the modern biological experimental technology we are not able to observe many crucial molecular processes that occur in the cell during liver regeneration. Consequently, the mathematical models of liver regeneration assume a large number of hypotheses about the rules of regulation. Verification of these hypotheses requires a large number of high-cost experiments.

One possible way to solve the problems associated with the complexity and non-observability of the biological processes of liver regeneration is based on the following assumption.

The main hypothesis.

The regulation of processes of maintaining/restoring the dynamic liver homeostasis based on the appearing self-organization is provided according to

some principles, the optimal criteria which are formed during the organism's evolution.

These principles and criteria are true for any level of detail description of the processes of liver regeneration. The regulation of processes that we do not observe in the experiment or cannot characterize because of their extreme complexity is subjected to these principles and criteria.

One of the main approaches to the development of mathematical models of biological systems of interacting cells is the agent model based on empirical rules [6].

In this approach the agent represents some "input-state-output" model of the cell (group of cells). The network of interactions between agents are defined as maps that connect the outputs and inputs of agents. These maps determine the collective dynamics of the network, depending on the state of agents.

Even at the generalized level of description of process, such networks contain hundreds of thousands of parameters. It is not possible to solve the problems of verification of various hypotheses about the principles and criteria of regulation using such models.

Thus, in order to confirm hypotheses simple ("toy") models in explicit dependence on the control parameters are required.

2. Phenomenological description of liver regeneration processes

The liver is the central metabolic organ of vertebrates. First, the liver keeps the concentration of numerous plasma compounds such as amino acids, fatty acids, nucleosides, plasma proteins, and lipoproteins within a narrow concentration range at varying physiological conditions (e.g., starvation or physical exercise), to ensure an almost constant metabolic environment for non-hepatic tissues. This homeostatic function includes the transient storage in the liver of carbohydrates and lipids. Second, the liver provides secretion of bile. Hepatic production of bile is needed for the efficient intestinal digestion of lipids and serves as the excretion pathway for metabolic waste products, many xenobiotics and also cholesterol. Finally, the most important function of the liver is to detoxify endogenous and exogenous compounds and remove pathogens [7].

Most of the metabolic functions are undertaken by parenchymal cells (hepatocytes and cholangiocytes), which make up about two-thirds of the organ's cell population, and possessing the most versatile metabolic function of all human cell types. Removal of pathogens and antigens is predominantly accomplished by hepatic endothelial cells and liver macrophages (hepatic Kupffer cells). Hepatic stellate cells are involved in the formation of the connective tissue of the liver and actively contribute to liver fibrosis after damage or injury of the organ. Resident stem cells can be transformed into almost any type of liver cell. Stem/progenitor cells are among the most resistant cells in relation to various damaging factors and play a major role in the regeneration processes [8, 9].

The smallest structural division of the liver is the liver lobule. It takes the approximate shape of a hexagonal prism with a size of 1-2 μ m and consists of all

types of liver cells. The number of lobules in the liver can range from hundreds of thousands to a million, depending on the body.

Presently there are two main types of liver regeneration.

1. When the liver is severely damaged or toxic factors are strong, the liver regeneration process occurs due to the replication of liver stem / progenitor cells and stellate cells. Stem cells can differentiate into liver parenchymal and epithelial cells. And stellate cells provide reparative fibrosis processes [10, 11, 12].

2. In the case of partial (two-thirds) surgical hepatectomy (PH) or small toxic factors, the regeneration process does not require such stem / progenitor cells or fibrosis [13, 19].

In the second type the liver regeneration occurs due to hyperplasia processes, replication and division of binuclear hepatocytes into mononuclear.

All of the above processes are aimed at increasing the functional activity of the liver. As the main functional cells we consider only hepatocytes of various types. Each of the different types of hepatocytes in a lobule has its own index of functionality. This coefficient determines how efficiently the cell performs its functions. The hyperplasia process increases the functionality of the liver by increasing the protein complexes. Polyploid and binuclear hepatocytes function more efficiently due to the increased number of chromosomes. As a result of the replication process, two fully functioning cells are formed.

Each of these processes has its characteristic time. Under ideal conditions, replication lasts 24 hours, the transition to polyploidy - 12 hours, hyperplasia - 6 hours, the division of binuclear hepatocytes - 1 hour. The main processes of liver regeneration occur in heterogeneous conditions of external stress, which leads to a significant increase in their characteristic times. Also different types of hepatocytes have different indicators of resistance to toxic factors and the rate of increase in their functionality due to hyperplasia. For example, due to the greater number of chromosomes polyploid and binuclear hepatocytes are more resistant to toxic factors.

3. General process model

A mathematical model of liver regeneration processes is considered for the second type of liver regeneration (liver resection or small toxic factors).

In our model the hepatic lobule is represented in the form of its cellular structure. Lobules are about a million in the liver.

The cellular structure of the lobules is the same in space - homogeneity. Toxic factors are evenly distributed throughout the liver cells. The processes occurring in different lobules are independent.

Under the assumptions of homogeneity and independence, an approximation on average is valid. It gives the equations of population dynamics for various types of liver cells.

In the idealized limited case the possible formulation of the optimization problem can be considered as follows.

1) An equation which describes the dynamics of populations of liver cells:

$$\bar{x}(t+1) = f(\bar{x}(t), \tau(t), \bar{\lambda}(t)), \quad (1)$$

where $\bar{x}(t)$ - types of functional liver cells at moment t , $\tau(t)$ - given function of external toxicity, $\bar{\lambda}(t)$ - control parameters.

Each type of cells has its own index of functionality and calculate the function $\Phi(t) = \sum_{i=0}^m c_i(x_i(t), \tau(t))$ - generalized liver function index.

2) An equation which describes the change in the functional state of the organism depending on the function of external toxicity $\tau(t)$ and the functional state of the liver $\Phi(t)$:

$$\tilde{\Phi}(t+1) = \Psi(\tau(t), \Phi(t)). \quad (2)$$

Consider an abstract organism as the result of a potentially feasible experiment of synthetic evolution for a sufficiently large chain of generations of populations. We believe that each generation is subject to a typical stress $\tau(t)$.

A necessary condition for successful evolutionary selection is not a break of the evolutionary chain, but its result is a strategy for achieving suboptimal functional activity of the organism $\bar{\lambda}(t)$.

An example of an optimal control problem criterion which satisfies these requirements:

$$\sum_{t=0}^T (K - \tilde{\Phi}(t))^2 + A\tilde{\Phi}(T') \leq E \quad (3)$$

under the condition

$$\sum_{t=T'_0}^{T'} I(\tilde{\Phi}(t)) \geq C, \quad (4)$$

where

$$I(\tilde{\Phi}(t)) = \begin{cases} 1 & \text{if } (K - \tilde{\Phi}(t))^2 \leq E, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Where T – the end of the life cycle of the body, $T'_0(T')$ – moment of the beginning (end) of the reproductive period, K – optimal functional activity of the body, E – a constant defining the set of reachability of the functional activity of the organism, C – a constant which is responsible for the survival of the organism.

The regulation of biological processes is determined by the processes of self-organization of the cellular network, which appeared during stress disturbances. Phase transitions define some virtual control system $\bar{\lambda}(t) = M(\tau(t), \bar{x}(0))$, which has the self-criticality property [14, 15].

4. Mathematical models of processes

In our model the cellular structure of the liver at each time moment is described by the following parameters:

- $\Gamma(t)$ - the number of normal hepatocytes at moment t ;

- $\Gamma_2(t)$ - the number of diploid hepatocytes at moment t ;
- $\Gamma_4(t)$ - the number of tetraploid hepatocytes at moment t ;
- $\Gamma^2(t)$ - the number of binuclear hepatocytes at moment t ;
- $\Gamma_{gip}(t)$ - the number of hepatocytes in a state of hyperplasia at moment t ;
- $As(t)$ - the number of hepatocytes in a state of antistress at moment t ;
- $Ap(t)$ - the number of hepatocytes in a state of apoptosis at moment t ;
- $N(t)$ - the number of hepatocytes in a state of necrosis at moment t .

Toxic factors - $Tox(t)$:

- $\tau(t)$ - the external toxicity (exotoxicity) at moment t ;
- $DP(t)$ - the internal toxicity due to decay products of necrosis (endotoxicity) at moment t .

The system dynamics is defined by the following control parameters and transition rules.

- $a(t)$ - the relative number of hepatocytes which are initiated to enter the cell-division cycle;
- $b(t)$ - the relative number of hepatocytes which are initiated into polyploidy;
- $b_{2j}(t)$ - the relative number of hepatocytes which are initiated into binuclear cells;
- $a_{2j}(t)$ - the relative number of hepatocytes which are initiated from binuclear hepatocytes per division;
- $g(t)$ - the relative number of hepatocytes which are initiated into hyperplasia;
- $\omega(t)$ - the relative number of hepatocytes which are initiated into controlled apoptosis. This parameter is different for each type of cell.

Considering the fact that the characteristic times of the main processes are significantly different and the processes depend on the external (non-stationary) toxic factors, each such process must be modeled separately.

Assume that all simulated processes are cyclical. In general, the transition to a new cycle, exit from a cycle or a new process is determined by the control parameters.

The discrete state space of the process is a set of states $(1, 2, \dots, n)$, where the number of states n is determined from the characteristic time of the process in ideal conditions and the discrete interval.

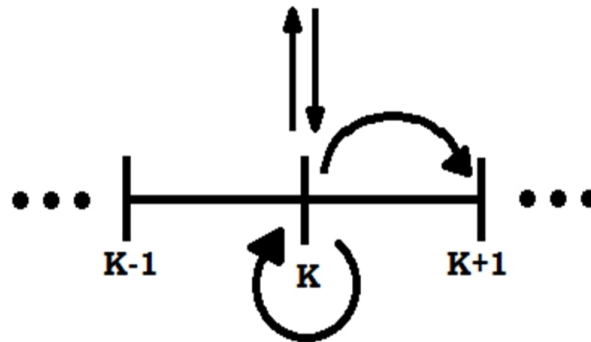


Fig. 1. The discrete state space of the process.

Also, there is competition parameter in our mathematical model:

$$k(t) = 1 - \frac{1}{K} (\Gamma(t) + \Gamma_2(t) + \Gamma_4(t) + \Gamma^2(t) + \Gamma_{gip}(t))$$

where $k(t)$ - coefficient of competition for the resource, K - environment capacity.

4.1. Replication process and transition processes during replication

Under normal conditions the replication process takes place within 24-32 hours during the cell-division cycle.

Our model assumes that the following events may occur during replication: cell doubling (completed replication), cell transition to polyploidy, cell transition to binuclear cell.

The replication process and the indicated transitions are inherent for normal (diploid) hepatocytes, tetraploid hepatocytes and hepatocytes in a state of hyperplasia.

The cell cycle consists of strictly deterministic series of sequential processes [17]:

- 1) the preparatory phase for cell division - "interphase" consisting of phase $G1$, phase S and phase $G2$,
- 2) the period of cell division - "mitosis" (phase M).

Usually the interphase takes at least 90 % of the time of the entire cell cycle (the M phase lasts 1-2 hours).

The $G1$ phase and $G2$ phase are intermediate phases. DNA replication occurs in the S phase. As a result of the doubling of DNA molecules, each chromosome has twice as much DNA as it was before the S phase, i.e. the amount of DNA in diploid cells corresponds to the tetraploid set. As a result of mitosis (phase M) two daughter cells with the same set of chromosomes arise from one cell.

During the cell-division cycle the cell passes the so-called "checkpoints". Checkpoints prevent cell cycle progression at specific points, allowing verification of necessary phase processes and repair of DNA damage. In case of failure to pass checkpoint the cell is sent for apoptosis. There are three most important points: the G_1 (restriction) checkpoint, the G_2 (DNA damage) checkpoint and the mitotic (spindle) checkpoint [18].

Under the control signal $b(t)$ some cells exit the cell cycle and return to functioning as polyploid cells. A such transition can occur in the S phase of the cell cycle.

In the middle of mitosis some cells exit the cell cycle under the control signal $b_{2j}(t)$ and turn into dual-core cells that perform the normal functions of the hepatocyte. Binuclear hepatocytes under the control signal $a_{2j}(t)$ complete the cell cycle and form two normal cells.

The replication cycle and possible controlled transitions are shown in next figure:

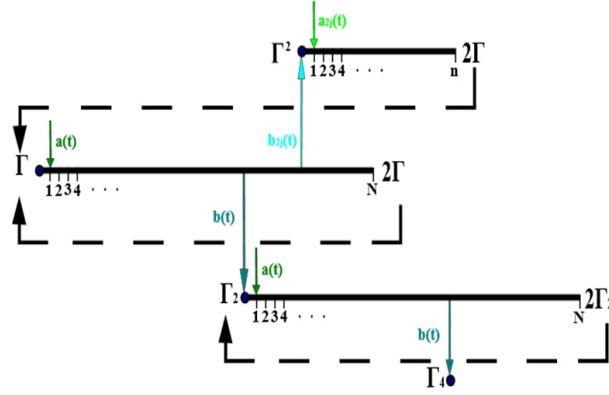


Fig. 2. Replication process and transition processes during replication.

Population dynamics of normal hepatocytes, polyploid hepatocytes and binuclear hepatocytes:

$$\begin{aligned} \Gamma(t+1) = & \Gamma(t) - a(t)k(t)\Gamma(t) + 2\mu(Tox(t))\Gamma(t) + a_{2j}(t)\Gamma^2(t) - g(t)\Gamma(t) - \\ & - \omega(t)\Gamma(t) - k(t)b(t)\Gamma(t) - r(Tox(t))\Gamma(t) + As(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_2(t+1) = & \Gamma_2(t) - a(t)k(t)\Gamma_2(t) + 2\mu(Tox(t))\Gamma_2(t) + k(t)b(t)\Gamma(t) - g(t)\Gamma_2(t) - \\ & - k(t)b(t)\Gamma_2(t) - \omega(t)\Gamma_2(t) - r(Tox(t))\Gamma_2(t) + As(t) \end{aligned}$$

$$\Gamma^2(t+1) = \Gamma^2(t) + b_{2j}(t)\Gamma(t) - a_{2j}(t)\Gamma^2(t) - g(t)\Gamma^2(t) - \omega(t)\Gamma^2(t) -$$

$$-r(Tox(t))\Gamma^2(t) + As(t)$$

Where: $\mu(Tox(t))$ - the cycle parameter; $r(Tox(t))$ - the parameter that sends cells to necrosis under high toxicity.

4.2. Hyperplasia

The hyperplasia process is an additional expression of intracellular molecular complexes and structures that provide an increase in its functional activity [19].

Hyperplasia consists of cycles. In each cycle protein expression occurs and the number of protein complexes is increased in the cell. One cycle of hyperplasia lasts about an hour. It should be noted that for polyploid and binuclear hepatocytes the hyperplasia process occurs faster due to the greater number of DNA.

The process of hyperplasia can be performed for all types of cells.

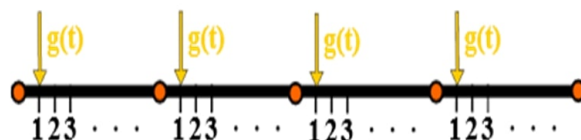


Fig. 3. Hyperplasia process.

The initialization of the hyperplasia process is controlled by the parameter $g(t)$ which determines the relative number of hepatocytes for hyperplasia.

The equation of dynamics for hepatocytes in a state of hyperplasia:

$$\Gamma_{gip}(t + 1) = \Gamma_{gip}(t) + g(t) (\Gamma(t) + \Gamma_2(t) + \Gamma_4(t) + \Gamma^2(t)) - \omega(t)\Gamma_{gip}(t) - r(Tox(t))\Gamma_{gip}(t) + As(t)$$

4.3. The process of the cell antistress request

When toxic factors act on the cell, the so-called antistress program is launched [20].

The antistress program involves several cycles of expression of antistress protein complexes that can neutralize toxic factors. Each cycle lasts about 15 minutes. In our mathematical model it is assumed that the antistress program has the highest priority and it cancels all other processes.

Note that hepatocytes in the S , M phase of the cell cycle cannot start the antistress program because in these phases the DNA of the cell is not functional.

If after one cycle of the antistress program the effect of toxic factors on the cell decreased, the cell completes the antistress process and returns to the interrupted process. However, if the effect of toxic factors on the cell still the same, the cell

goes on a new cycle of the antistress program. Due to the failure of the antistress program, the cell goes into either apoptosis or necrosis depending on the level of toxic factors [20].

The equation of dynamics for hepatocytes in a state of antistress:

$$As(t+1) = As(t) + \mu(Tox(t)) (\Gamma(t) + \Gamma_2(t) + \Gamma_4(t) + \Gamma^2(t) + \Gamma_{gip}(t)) - \omega(t)As(t) - r(Tox(t))As(t) - As(t)$$

4.4. Apoptosis

Apoptosis is closely associated with programmed cell death [20]. The mechanisms of apoptosis are triggered when the toxic factors are not strong enough to cause necrosis. The body responds to the danger of mass cell death with a kind of protection - suicide of a relatively small number of cells so that the factors of pathological effects are not so great.

As a result of apoptosis the decay products of a cell are almost immediately destroyed by resident macrophages and do not have a toxic effect on neighboring cells. The apoptosis is quite a long process, it takes more than 24 hours.

Note that the body is able to purposefully reduce cell populations. This ability of the body is called controlled apoptosis.

In our model controlled apoptosis occurs under the control signal $\omega(t)$ - the relative number of hepatocytes which are initiated into controlled apoptosis. This parameter is different for each cell type.

The equation for cells in a state of apoptosis is:

$$Ap(t+1) = Ap(t) + \omega(t) (\Gamma(t) + \Gamma_2(t) + \Gamma_4(t) + \Gamma^2(t) + \Gamma_{gip}(t)) - r(Tox(t))As(t)$$

4.5. Necrosis

Uncontrolled cell death as a result of effect of a strong toxic factors on the cell is called necrosis [20].

During necrosis process the decay products of necrosis (DP) are appeared. They form internal toxicity. Necrosis decay products are highly toxic factors for surrounding cells. Their action can lead to stopping of the regeneration processes, apoptosis and even necrosis of the surrounding cells.

The necrosis process proceeds fairly quickly (about one hour).

Due to the locality of necrosis its distribution should be described using space-time mathematical models. However we make an assumption about the environment uniformity. Consequently the spread of necrosis occurs regardless of the location of the necrotic cell in space (suppose that one necrotic cell affects some number of healthy cells per unit of time).

$$N(t+1) = N(t) + r(Tox(t)) (\Gamma(t) + \Gamma_2(t) + \Gamma_4(t) + \Gamma^2(t) + \Gamma_{gip}(t) + As(t) + Ap(t))$$

4.6. Toxicity

Common toxicity consists of two factors: external (given function) and internal toxicity due to the toxicity of the decay products as a result of necrosis.

$$Tox(t) = DP(t) + \tau(t)$$

The equation which describes change of external toxicity:

$$\tau(t+1) = \tau(t) - \tau(t)x(t) - \tau(t)e_1$$

where $x(t) = \sum_k c_k \Gamma(t)$ - toxicity reduction coefficient due to functional activity of hepatocytes, e_1 - toxicity reduction coefficient due to blood flow.

The equation which describes change of internal toxicity:

$$DP(t+1) = DP(t) - DP(t)F - DP(t)e_2$$

where F - toxicity reduction coefficient due to phagocytic activity, e_2 - toxicity reduction coefficient due to blood flow.

Remark. $e_2 < e_1$, the decay products of necrosis act locally and external toxicity affects a large area.

5. Conclusion

The developed model is linear in control parameters. It is important for solving optimal control problems.

This model will be the basis for the development of a more complex model for considering the regeneration strategies of the first type.

It is supposed to justify the principles and criteria for optimal regulation of liver regeneration processes and verify them in numerical experiments based on the developed model.

The proposed model of population dynamics includes such models of population dynamics as the generalized Lotka-Volterra equations, the Lotka-Volterra equations with transitions, the Lotka-Volterra delay equations, the Volterra integro-differential equations[16].

REFERENCES

1. B. Christ, U. Dahmen, K-H. Herrmann, M. Konig, JR. Reichenbach, T. Ricken, J. Schleicher, L. Ole Schwen, S. Vlaic, N. Waschinsky. Computational Modeling in Liver Surgery. *Frontiers in Physiology*. – 2017. – Vol. 8. Article 906. – P.1–26. DOI: 10.3389/fphys.2017.00906
2. Virtual Liver Network: A major national initiative funded by the German Federal Ministry for Education and Research, 2010–2015. – <http://www.virtual-liver.de/>

3. LiSyM - Liver Systems Medicine: Research network of German centers and institutions, 2016–2020. – <http://www.lisym.org/>
4. D. Cook, B. A. Ogunnaike, R. Vadigepalli. Systems analysis of non-parenchymal cell modulation of liver repair across multiple regeneration models. *BMC Systems Biology*, – 2015. – Vol. **9**:71. – P.1–24. DOI: 10.1186/s12918-015-0220-9.
5. Ye. Dayong, Zh. Minjie, V. Athanasios. Computational Modeling in Liver Surgery. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*. –2017. – Vol. 47. No. **3**. – P. 441–462.
6. M. Hwang, M. Garbey, S. A. Bercali, R. Tran-Son-Tay. Rule-Based Simulation of Multi-Cellular Biological Systems—A Review of Modeling Techniques. *Cellular and Molecular Bioengineering*. – 2009. – Vol. **2**(3). – P. 285–294.
7. H. Holzhutter, D. Drasdo, T. Preusser, J. Lippert, A.M. Henney. The virtual liver: a multidisciplinary, multilevel challenge for systems biology. *WIREs Syst Biol Med*. – 2012. – Vol. **4**(3). – P.221–235.
8. K. Jungerman. Metabolic zonation of liver parenchyma. *Semin Liver Dis*. – 1988. – Vol. **8**. – P. 329–341.
9. K. Jungermann, T. Kietzmann. Oxygen: modulator of metabolic zonation and disease of the liver. *Hepatology*. – 2000. – Vol. **31**. – P. 255–260.
10. MR. Alison, S. Islam, S. Lim. Stem cells in liver regeneration, fibrosis and cancer: the good, the bad and the ugly. *J Pathol*. – 2009. – Vol. **217**(2): – P. 282–298.
11. KS. Zaret, M. Grompe. Generation and regeneration of cells of the liver and pancreas. *Science*. – 2008. – Vol. **322**. – P. 1490–1494.
12. M. Tanaka, T. Itoh, N. Tanimizu, A. Miyajima. Liver stem/progenitor cells: their characteristics and regulatory mechanisms. *J Biochem*. – 2011. – Vol. **149**. – P. 231–239.
13. Y. Miyaoka, A. Miyajima. To divide or not to divide: revisiting liver regeneration. *Cell Division*. – 2013. – Vol. **8**(1):8. – P.1–12. DOI:10.1186/1747-1028-8-8.
14. K. Mahmoodi, B. West, P. Grigolini. Self-organizing complex networks: individual versus global rules. *Frontiers in Physiology*. – 2017. – Vol. **8**. Article 478. – P.1–11. DOI:10.3389/fphys.2017.00478.
15. N. W. Watkins and others. 25 years of self-organized criticality: concepts and controversies. *Space Science Reviews*. – 2016. – Vol. **198**(1-4) – P. 3–44.

16. J. M. Cushing. Integrodifferential Equations and Delay Models in Population Dynamics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. – 1977. – Vol. 20 – 196 p.
17. C. Hutchison, D. M. Glover. Cell Cycle Control. Frontiers in molecular biology. – 1995. – Vol. 10. – 304 p.
18. K. J. Barnum, M. J. O’Connell. Cell Cycle Regulation by Checkpoints. Methods Mol Biol. – 2014. – Vol. 1170. – P. 29–40.
19. F. Marongiu et al. Hyperplasia vs Hypertrophy in Tissue Regeneration after Extensive Liver Resection. World Journal of Gastroenterology. – 2017. – Vol. 23(10). – P. 1764–1770.
20. S. Fulda, A. M. Gorman, O. Hori, A. Samali. Cellular Stress Responses: Cell Survival and Cell Death. International Journal of Cell Biology. – 2010. – P. 1–23.

Карєва В. В., Львов С. В. **Математична модель процесів регенерації печінки: однорідне наближення.** У даній статті розглядаються принципи, правила й механізми регуляції біологічних процесів під час розвитку і підтримки/відновлення (регенерації) динамічного гомеостазу органів і тканин організму. Ця проблема є однією з найбільш важливих фундаментальних проблем біології і медицини. Знання про правила і механізми регенерації печінки організму є основою для розробки нових ефективних лікарських препаратів і вибору раціональних стратегій терапії захворювань печінки.

Згідно з поточними уявленнями теоретичної біології, розвиток, поведінка і підтримка динамічного гомеостазу визначається саморегуляцією, яка забезпечується за рахунок виникаючої самоорганізації біологічних процесів під впливом того чи іншого збурення.

Автори запропонували гіпотезу, що регуляція процесів підтримки/відновлення динамічного гомеостазу печінки на основі виникаючої самоорганізації відбувається згідно з деякими принципами, критеріями оптимальності, що склалися в ході еволюції організму.

Було розроблено узагальнену математичну модель, що явно залежить від керуючих параметрів. Запропонована математична модель процесів регенерації печінки є узагальненням таких відомих моделей популяційної динаміки, як узагальнені рівняння Лотки-Вольтерра, рівняння Лотки-Вольтерра з запізнілими аргументами, інтегродиференціальні рівняння Вольтерра.

Під час розробки моделі були зроблені наступні припущення: однорідне наближення, незалежність біологічних процесів, помірний токсичний вплив.

Дана модель буде базою для розробки більш складної моделі, яка буде враховувати стратегії регенерації за рахунок стовбурових клітин печінки і клітин Іто. У перспективі передбачається обґрунтувати принципи і критерії оптимальності регуляції процесів регенерації печінки і верифікувати їх у численних експериментах.

Ключові слова: математична модель, регенерація печінки, однорідне наближення

Article history: Received: 15 October 2018; Final form: 20 October 2018;

Accepted: 21 October 2018.

Усреднённые тензор проводимости и функция поглощения локально-периодической пористой среды

Гончаренко М.В.¹, Хилькова Л.А.²

¹*Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б. Веркина,
Україна*

²*Інститут хімічних технологій ВНУ ім. В. Даля, Україна
marusyab1@yahoo.co.ua, LarisaHilkova@gmail.com*

Рассматривается задача, описывающая процесс стационарной диффузии в локально-периодической пористой среде с нелинейным поглощением на границе. Опираясь на работу, в которой эта задача рассматривалась в более широком классе перфорированных областей (сильно связанных областях), мы получаем явные формулы для эффективных характеристик среды: тензора проводимости и функции поглощения.

Ключевые слова: усреднение, стационарная диффузия, нелинейная третья краевая задача, локально-периодическая пористая среда, тензор проводимости, функция поглощения.

Гончаренко М.В., Хилькова Л.О. **Усреднені тензор провідності та функція поглинання локально-періодичного пористого середовища.** Розглядається задача, яка описує процес стаціонарної дифузії в локально-періодичному пористому середовищі з нелінійним поглинанням на межі. Опираючись на роботу, в якій ця задача розглядалася в більш широкому класі перфорованих областей (сильно зв'язних областях), ми отримуємо явні формули для ефективних характеристик середовища: тензора провідності та функції поглинання.

Ключові слова: усереднення, стаціонарна дифузія, нелінійна третя крайова задача, локально-періодичне пористе середовище, тензор провідності, функція поглинання.

M.V. Goncharenko, L.O. Khilkova. **Homogenized conductivity tensor and absorption function of a locally periodic porous medium.** We consider a problem describing the process of stationary diffusion in a locally-periodic porous medium with nonlinear absorption at the boundary. We base on a work, in which this problem considered in a wider class of perforated domains. We obtain explicit formulas for the effective characteristics of the medium: a conductivity tensor and a function of absorption.

Keywords: homogenization; stationary diffusion; non-linear third boundary value problem; locally periodic porous medium, conductivity tensor, function of absorption.

2010 Mathematics Subject Classification: 35G65; 35Q80.

1. Введение

В химических технологиях, экологии и многих естественных науках возникает потребность в исследовании процессов диффузии в пористых средах с поглощением на границе пор. Эти процессы описываются краевой задачей для эллиптического уравнения, рассматриваемого в сложной перфорированной области, с третьим краевым условием на границе перфорации (в том числе нелинейным). В виду малости локального масштаба пористости среды ε и сложности рассматриваемой перфорированной области, непосредственное решение таких краевых задач практически невозможно ни аналитическими, ни численными методами. Поэтому естественный подход в этой ситуации заключается в исследовании асимптотического поведения решения, когда $\varepsilon \rightarrow 0$, и переходе к усреднённой макроскопической модели процесса, рассматриваемой уже во всей области без учёта перфорации.

Такие задачи в последнее время интенсивно изучались, но в основном для периодически перфорированных областей (см. [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]). Задачи усреднения в перфорированных непериодических областях рассматриваются значительно реже, первые результаты для таких задач были получены в работах В.А. Марченко, Е.Я. Хрушова ([12]), в которых было введено понятие сильной связности, играющее важную роль в вопросах усреднения. Усреднению уравнения диффузии в сильно-связных перфорированных областях с нелинейным поглощением на границе перфорации посвящены работы [13, 14]. В этих работах было доказано, что в сильно-связных областях усреднённое уравнение имеет вид

$$-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + c(x, u) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

где Ω – область процесса. Коэффициенты уравнения (1) являются эффективными характеристиками среды: $\{a_{ij}(x)\}_{i,j}$ – усреднённый тензор проводимости пористой среды, $c(x, u)$ – усреднённая функция поглощения на её границе; они выражаются через «мезоскопические» (локальные энергетические) характеристики среды, определяемые в малых кубах, размеры которых, тем не менее, много больше масштаба микроструктуры ε .

В работах [13, 14] теоремы сходимости доказывались при условиях существования предельных плотностей «мезоскопических» характеристик, выполнение которых показать в общем случае очень трудно, но в ряде конкретных ситуаций это можно сделать. В настоящей работе мы показываем выполнение этих условий и, исследуя их, получаем явные формулы для эффективных характеристик локально-периодической пористой среды. Точная формулировка этого результата была приведена в работе [15] без доказательства, в данной работе мы даём полное его доказательство.

2. Постановка задачи

В пространстве \mathbb{R}^3 рассмотрим локально-периодическую перфорированную область Ω^ε . Для уточнения структуры области Ω^ε введём следующие обозначения:

$$\Pi = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^3 : |\xi_i| \leq \frac{\theta_i}{2}, i = \overline{1, 3} \right\}, \quad \Pi^{\pm\delta} = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^3 : |\xi| \leq \frac{\theta_i}{2}(1 \pm \delta), i = \overline{1, 3} \right\} -$$

параллелепипеды в \mathbb{R}^3 с центрами в 0, здесь δ – произвольное малое число ($\delta \ll 1$),

$$\Pi_{x^\alpha}^\varepsilon = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : |x_i - x_i^\alpha| \leq \frac{\theta_i \varepsilon}{2}, i = \overline{1, 3} \right\} -$$

параллелепипеды в \mathbb{R}^3 с центрами в точках $x^\alpha = \varepsilon \sum_{i=1}^3 x_i^\alpha e^i$, где $x_i^\alpha = m_i^\alpha \theta_i$ ($m_i^\alpha \in \mathbb{Z}$), и рёбрами, ориентированными по координатным осям. Параллелепипеды $\Pi_{x^\alpha}^\varepsilon$ образуют периодическую решётку с периодом $\theta_i \varepsilon$ ($i = \overline{1, 3}$). Пусть F – область в Π с гладкой границей ∂F и центром масс в начале координат. Предположим, что пространство \mathbb{R}^3 разрезано на параллелепипеды $\Pi_{x^\alpha}^\varepsilon$. В каждом параллелепипеде $\Pi_{x^\alpha}^\varepsilon$, принадлежащем области Ω , находится множество $F_{x^\alpha}^\varepsilon$

$$F_{x^\alpha}^\varepsilon = \varepsilon F_{x^\alpha} + x^\alpha,$$

которое является трансляцией и гомотетическим сжатием F_{x^α} , полученного из множества F следующим образом:

$$F_x = f_x(F), \quad \partial F_x = f_x(\partial F), \quad (2)$$

где $f_x(\xi)$ – диффеоморфизм из \mathbb{R}^3 в \mathbb{R}^3 , зависящим от точки $x \in \Omega$ (как от параметра) так, что $f_0(\xi) = I$ (I – тождественное отображение), $\forall x \in \Omega : F_x \subset \Pi^{-2\delta}$ и

$$\|f_{x_1} - f_{x_2}\|_{C^1(\Omega)} \leq C |x_1 - x_2|. \quad (3)$$

Область $\Omega^\varepsilon = \Omega \setminus F^\varepsilon$, где $F^\varepsilon = \cup_\alpha F_{x^\alpha}^\varepsilon$ будем называть локально-периодической.

Другое определение локально-периодической структуры перфорированной области было дано в работе [16].

В локально-периодической области Ω^ε рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} -\Delta u^\varepsilon = f^\varepsilon(x), & x \in \Omega^\varepsilon, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu} + \sigma^\varepsilon(x, u^\varepsilon) = 0, & x \in \partial F^\varepsilon, \\ u^\varepsilon = 0 & \text{на } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4)$$

где функции $f^\varepsilon(x) \in L^2(\Omega^\varepsilon)$ и $\sigma^\varepsilon(x, u)$ заданы. Относительно функции $\sigma^\varepsilon(x, u)$ предположим, что она удовлетворяет следующим условиям:

a_1 : $\sigma^\varepsilon(x, u) = \varepsilon\sigma(x, u)$, где $\sigma(x, u)$ непрерывна по $x \in \Omega^\varepsilon$ и по переменной u удовлетворяет следующему условию Липшица $\forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}$:

$$|\sigma(x, u_1) - \sigma(x, u_2)| \leq C(1 + |u_1|^{\Theta-1} + |u_2|^{\Theta-1})|u_1 - u_2| \left(\Theta < \frac{n}{n-2} \right);$$

a_2 : $\forall u_1, u_2 \in \mathbb{R} : (\sigma^\varepsilon(x, u_1) - \sigma^\varepsilon(x, u_2)) \cdot (u_1 - u_2) \geq 0$;

a_3 : $\sigma(x, 0) = 0$.

Определение 1 *Обобщенным решением задачи (4) будем называть функцию $u^\varepsilon(x)$ из пространства $H^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega) = \{u(x) \in H^1(\Omega^\varepsilon) : u|_{\partial\Omega} = 0\}$, удовлетворяющую тождеству*

$$\int_{\Omega^\varepsilon} (\nabla u^\varepsilon, \nabla \varphi) dx + \int_{\partial F^\varepsilon} \sigma^\varepsilon(x, u^\varepsilon) \varphi d\Gamma = \int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon \varphi dx, \quad \forall \varphi(x) \in H^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega). \quad (5)$$

Известно, что при каждом фиксированном ε существует единственное обобщённое решение $u^\varepsilon(x)$ задачи (4). Асимптотическое поведение при $\varepsilon \rightarrow 0$ решения задачи (4), рассматриваемой в более широком классе перфорированных областей – в сильно связных областях, было изучено в работах [13, 14]. В этих работах были определены условия сходимости (более сильные в работе [13] и более слабые в [14]) и получена усреднённая модель. Основной целью данной работы является проверка выполнения условий сходимости работы [13] для локально-периодических перфорированных областей и получение явных формул для эффективных характеристик пористой среды, которые являются коэффициентами усреднённого уравнения. При этом сходимость понимается в следующем смысле:

Определение 2 *Будем говорить, что последовательность функций $\{u^\varepsilon(x) \in L^p(\Omega^\varepsilon)\}_\varepsilon$ сходится в $L^p(\Omega^\varepsilon, \Omega)$, если существует функция $u(x) \in L^p(\Omega)$ такая что*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u^\varepsilon - u\|_{L^p(\Omega^\varepsilon)} = 0.$$

Основной результат работы заключается в следующей теореме:

Теорема 1 *Пусть области Ω^ε являются локально-периодическими и функция $f^\varepsilon(x)$, продолженная нулём на множество F^ε , сходится слабо в $L^2(\Omega)$ к функции $f(x)$. Тогда решение $u^\varepsilon(x)$ задачи (4) сходится при $\varepsilon \rightarrow 0$ в $L^p(\Omega^\varepsilon, \Omega)$ ($p < \frac{2n}{n-2}$) к решению $u(x)$ усредненной задачи:*

$$\begin{cases} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{2} c_u(x, u) = f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (6)$$

коэффициенты которой вычисляются по формулам:
функция поглощения

$$c_u(x, u) = \frac{2|\partial F_x|}{|\Pi|} \sigma(x, u); \quad (7)$$

тензор проводимости $\{a_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$

$$a_{ij}(x) = \delta_{ij} \left(1 - \frac{|F_x|}{|\Pi|} \right) - \frac{1}{|\Pi|} \int_{\Pi \setminus F_x} \sum_{k=1}^n \frac{\partial V_i(\xi, x)}{\partial \xi_k} \frac{\partial V_j(\xi, x)}{\partial \xi_k} d\xi, \quad (8)$$

где $|\partial F_x|$, $|F_x|$, $|\Pi|$ — поверхностная и объёмные меры соответствующих множеств, функция $V_i(\xi) = V_i(\xi, x)$ ($i = \overline{1, n}$) является решением следующей „ячеечной“ задачи:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 V_i(\xi)}{\partial \xi_k^2} = 0, \quad \xi \in \Pi \setminus F_x, \\ \frac{\partial V_i(\xi)}{\partial \nu_\xi} = \cos(\nu(\xi), e^i), \quad \xi \in \partial F_x, \\ V_i|_{\Gamma_k^+} = V_i|_{\Gamma_k^-}, \quad \frac{\partial V_i}{\partial \xi_k}|_{\Gamma_k^+} = \frac{\partial V_i}{\partial \xi_k}|_{\Gamma_k^-}, \quad k = \overline{1, n}, \\ \int_{\Pi \setminus F_x} V_i(\xi) d\xi = 0, \end{array} \right. \quad (9)$$

где Γ_k^\pm — противоположные грани в Π , $\nu = \nu(\xi)$ — единичный вектор внешней нормали к F_x в точке $\xi \in F_x$.

Доказательство данной теоремы строится на изучении предельных переходов в условиях 1), 2) теоремы 1 работы [13], определяющих существование предельных плотностей мезоскопических характеристик пористой среды. Для удобства читателя определения мезоскопических характеристик и формулировку теоремы 1 работы [13] (теорема 2) мы приводим в следующем разделе.

3. Мезоскопические характеристики среды и основное усреднённое уравнение диффузии

Мезоскопические характеристики перфорированных областей Ω^ε — это локальные средние характеристики микроструктуры, рассматриваемые в «мезокубе» $K_h^z = K(z, h)$ с центром в точке z и рёбрами длиной h , ориентированными по координатным осям. Приставка «мезо» означает, что размер куба существенно больше размера микроструктуры ε , но существенно меньше размера всей области Ω^ε ($0 < \varepsilon \ll h \ll 1$).

Количественную характеристику проводимости зададим с помощью функционала относительно произвольного вектора $\ell \in \mathbb{R}^n$:

$$T_{h,z}^\varepsilon(\ell) = \inf_{v^\varepsilon} \int_{K_h^z \cap \Omega^\varepsilon} \{|\nabla v^\varepsilon|^2 + h^{-2-\tau}|v^\varepsilon - (x - z, \ell)|^2\} dx, \quad (10)$$

где инфимум берётся в классе функций $v^\varepsilon(x) \in H^1(K_h^z \cap \Omega^\varepsilon)$, $\tau \in (0, 2)$ – параметр штрафа. Этот функционал является однородно квадратичным относительно ℓ [12] и представим в виде

$$T_{h,z}^\varepsilon(\ell) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(z, \varepsilon, h) \ell_i \ell_j, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} a_{ij}(z, \varepsilon, h) &= \\ &= \int_{K_h^z \cap \Omega^\varepsilon} \{(\nabla v_i^\varepsilon, \nabla v_j^\varepsilon) + h^{-2-\tau}[v_i^\varepsilon - (x_i - z_i)][v_j^\varepsilon - (x_j - z_j)]\} dx \end{aligned} \quad (12)$$

и v_i^ε – минимизант функционала $T_{h,z}^\varepsilon(\ell)$ при $\ell = e^i$ – орт оси x_i .

Количественную характеристику поглощения на границе ∂F^ε зададим с помощью функционала относительно произвольного $s \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} c(z, s; \varepsilon, h) &= \\ &= \inf_{w^\varepsilon} \left[\int_{K_h^z \cap \Omega^\varepsilon} \{|\nabla w^\varepsilon|^2 + h^{-2-\tau}|w^\varepsilon - s|^2\} dx + \int_{K_h^z \cap \partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x, w^\varepsilon) d\Gamma \right], \end{aligned} \quad (13)$$

где инфимум берётся в классе функций $w^\varepsilon \in H^1(K_h^z \cap \Omega^\varepsilon)$, а функция $g^\varepsilon(x, u)$ определена формулой

$$g^\varepsilon(x, u) := 2 \int_0^u \sigma^\varepsilon(x, s) ds. \quad (14)$$

Определение 3 Будем говорить, что система областей $\Omega^\varepsilon \subset \Omega$ удовлетворяет условию сильной связности (или просто являются сильно связными), если для любой функции $v^\varepsilon(x) \in H^1(\Omega^\varepsilon)$ существует функция $\tilde{v}^\varepsilon(x) \in H^1(\Omega)$ такая, что $v^\varepsilon(x) = \tilde{v}^\varepsilon(x)$ при $x \in \Omega^\varepsilon$ и справедливо неравенство

$$\|\tilde{v}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|v^\varepsilon\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}. \quad (15)$$

Основной результат работы [13] заключался в следующей теореме:

Теорема 2 Пусть области Ω^ε являются сильно связными и $\exists \tau \in (0, 2)$ при котором равномерно по $x \in \Omega$ выполняются условия:

$$1) \lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{a_{ij}(x, \varepsilon, h)}{h^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{a_{ij}(x, \varepsilon, h)}{h^n} = a_{ij}(x),$$

где $a_{ij}(x)$ – кусочно-непрерывные функции от x и $\{a_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$ – положительно определённый, симметричный тензор в \mathbb{R}^n ;

$$2) \lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{c(x, s; \varepsilon, h)}{h^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{c(x, s; \varepsilon, h)}{h^n} = c(x, s), \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

где функция $c(x, s)$ ограничена по x , дифференцируема по s и её производная $c_s(x, s) = \frac{\partial}{\partial s} c(x, s)$ по переменной s удовлетворяет условиям монотонного возрастания и ограниченности на рост

$$\forall s \in \mathbb{R} : c_s(x, s) \leq C(1 + |s|^\theta), \quad \left(\theta < \frac{n+2}{n-2}\right);$$

3) функция $f^\varepsilon(x)$, продолженная нулём на множество F^ε , при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится слабо в $L^2(\Omega)$ к функции $f(x)$.

Тогда обобщённое решение $u^\varepsilon(x)$ задачи (4) сходится в $L^p(\Omega^\varepsilon, \Omega)$ ($p < \frac{2n}{n-2}$) к функции $u(x)$, являющейся обобщённым решением усреднённой задачи (6).

4. Доказательство теоремы 1

Прежде всего, докажем ряд вспомогательных лемм, которые будут использованы при доказательстве теоремы.

Лемма 1 При достаточно малых ε существует единственное решение $v_\alpha^\varepsilon(\xi)$ задачи

$$\begin{cases} \Delta_\xi v_\alpha^\varepsilon(\xi) = 0, & \xi \in \mathbb{R}^3 \setminus F_{x^\alpha}, \\ \frac{\partial v_\alpha^\varepsilon(\xi)}{\partial \nu_\xi} + \varepsilon \sigma(x^\alpha + \varepsilon \xi, s + \varepsilon v_\alpha^\varepsilon(\xi)) = 0, & \xi \in \partial F_{x^\alpha}, s \in \mathbb{R}, \\ v_\alpha^\varepsilon(\xi) \rightarrow 0 & \text{при } |\xi| \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (16)$$

где ν_ξ – единичная нормаль к границе ∂F_{x^α} , внешняя по отношению к области $\mathbb{R}^3 \setminus F_{x^\alpha}$. Для этого решения справедливы следующие оценки:

$$\max_{\xi \in \Pi \setminus F_{x^\alpha}} |v_\alpha^\varepsilon(\xi)| < C\varepsilon, \quad (17)$$

$$\max_{\xi \in \Pi^{+\delta} \setminus \Pi^{-\delta}} |\nabla v_\alpha^\varepsilon(\xi)| < \frac{C}{\delta} \varepsilon. \quad (18)$$

Доказательство. Решение задачи (16) будем искать в виде потенциала простого слоя

$$v_\alpha^\varepsilon(\xi) = \int_{\partial F_{x^\alpha}} \frac{\rho^\varepsilon(\eta)}{|\eta - \xi|} d\Gamma_\eta, \quad \xi \in \mathbb{R}^3 \setminus F_{x^\alpha}.$$

Для того, чтобы функция $v_\alpha^\varepsilon(\xi)$ удовлетворяла граничному условию, плотность $\rho^\varepsilon(\xi)$ должна быть решением интегрального уравнения ([17, гл. 15])

$$\rho^\varepsilon(\xi) + R\rho^\varepsilon(\xi) = -\frac{1}{2\pi} \psi^\varepsilon(\xi), \quad \xi \in \partial F_{x^\alpha}, \quad (19)$$

где оператор R , определённый равенством

$$R\rho^\varepsilon := \frac{1}{2\pi} \int_{\partial F_{x^\alpha}} \frac{(\eta - \xi, \nu_\eta)}{|\eta - \xi|^3} \rho^\varepsilon(\eta) d\Gamma_\eta,$$

действует из пространства $C(\partial F_{x^\alpha})$ в $C(\partial F_{x^\alpha})$, а функция $\psi^\varepsilon(\xi)$ является решением уравнения

$$\psi^\varepsilon(\xi) = -\varepsilon\sigma(x^\alpha + \varepsilon\xi, s + \varepsilon N\psi^\varepsilon(\xi)). \quad (20)$$

Здесь через N обозначен оператор «Neumann to Dirichlet», который нормальной производной решения задачи (16) на границе ∂F_{x^α} ставит в соответствие значение самого решения на этой границе.

Обозначим оператор

$$A\psi^\varepsilon := -\varepsilon\sigma(x^\alpha + \varepsilon\xi, s + \varepsilon N\psi^\varepsilon)$$

и запишем уравнение (20) в виде

$$\psi^\varepsilon = A\psi^\varepsilon. \quad (21)$$

Покажем, что при малых ε уравнение (21) имеет единственное решение в пространстве $C(\partial F_{x^\alpha})$. Прежде всего, если это уравнение имеет решение, то в силу свойств функции $\sigma(x, u)$ и ограниченности оператора N оно должно удовлетворять неравенству:

$$\|\psi^\varepsilon\|_{C(\partial F_{x^\alpha})} \leq C_1\varepsilon \left(1 + s^\Theta + \varepsilon^\Theta \|\psi^\varepsilon\|_{C(\partial F_{x^\alpha})}^\Theta\right),$$

из которого вытекает следующая априорная оценка

$$\|\psi^\varepsilon\|_{C(\partial F_{x^\alpha})} \leq C_2\varepsilon \quad (22)$$

и тогда

$$\begin{aligned} \|A\psi_1^\varepsilon - A\psi_2^\varepsilon\|_{C(\partial F_{x^\alpha})} &= \varepsilon \max_{\xi \in \partial F_{x^\alpha}} |\sigma(x^\alpha + \varepsilon\xi, s + \varepsilon N\psi_1^\varepsilon) - \sigma(x^\alpha + \varepsilon\xi, s + \varepsilon N\psi_2^\varepsilon)| \leq \\ &\leq \varepsilon^2 \max_{\xi \in \partial F_{x^\alpha}} (1 + |s + \varepsilon N\psi_1^\varepsilon|^{\Theta-1} + |s + \varepsilon N\psi_2^\varepsilon|^{\Theta-1}) |N\psi_1^\varepsilon - N\psi_2^\varepsilon| \leq \\ &\leq C_3\varepsilon^2 \|\psi_1^\varepsilon - \psi_2^\varepsilon\|_{C(\partial F_{x^\alpha})}, \end{aligned}$$

откуда следует, что при малых ε оператор A является сжимающим, и, следовательно, существует единственное решение уравнения (21) в пространстве $C(\partial F_{x^\alpha})$, которое удовлетворяет оценке (22).

Кроме того, функция $\psi^\varepsilon(\xi)$ является нормальной производной решения $v_\alpha^\varepsilon(\xi)$ на границе ∂F_{x^α} , тогда для функции $v_\alpha^\varepsilon(\xi)$ в силу принципа максимума справедлива оценка

$$\max_{\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus F_{x^\alpha}} |v_\alpha^\varepsilon(\xi)| \leq \max_{\xi \in \partial F_{x^\alpha}} |v_\alpha^\varepsilon(\xi)| = \|N\psi^\varepsilon(\xi)\|_{C(\partial F_{x^\alpha})} \leq C_4\varepsilon.$$

Оценка (17) доказана.

Докажем оценку (18). В силу свойств потенциала простого слоя существует ограниченный обратный оператор $(I + R)^{-1}$, тогда из уравнения (19) плотность $\rho^\varepsilon(\xi)$ равна

$$\rho^\varepsilon(\xi) = -\frac{1}{2\pi}(I + R)^{-1}\psi^\varepsilon,$$

и для неё в силу (22) справедлива оценка

$$\|\rho^\varepsilon\|_{C(\partial F_{x^\alpha})} = \frac{1}{2\pi}\|(I + R)^{-1}\psi^\varepsilon\|_{C(\partial F_{x^\alpha})} \leq C_5\varepsilon.$$

Тогда при $\xi \in \Pi^{+\delta} \setminus \Pi^{-\delta}$ имеем

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial v_\alpha^\varepsilon(\xi)}{\partial \xi_i} \right| &= \left| \int_{\partial F_{x^\alpha}} \frac{(\eta_i - \xi_i)\rho^\varepsilon(\eta)}{|\eta - \xi|^3} d\Gamma_\eta \right| \leq \int_{\partial F_{x^\alpha}} \frac{|\rho^\varepsilon(\eta)|}{|\eta - \xi|^2} d\Gamma_\eta \leq \\ &\leq \frac{C_5\varepsilon}{\delta} \int_{\partial F_{x^\alpha}} \frac{1}{|\eta - \xi|} d\Gamma_\eta \leq \frac{C_6\varepsilon}{\delta}. \end{aligned}$$

Откуда и следует оценка (18). Лемма 1 доказана.

Далее построим «разбиение единицы» – набор гладких функций, используемых при построении аппроксимирующих функций. Построение «разбиения единицы» неоднократно рассматривалось ранее (см. например [18, гл. 2]), но обычно не делаются оценки производных, которые будут нужны нам в дальнейшем. Поэтому приводим доказательство полностью.

Покроем пространство \mathbb{R}^n пересекающимися кубами $\{K_h^\alpha = K(x^\alpha, h)\}_\alpha$, с центрами в точках x^α и сторонами $h \ll 1$, ориентированными по координатным осям, образующими периодическую решётку периодом $h - r$, где r – толщина перекрытия.

Лемма 2 По покрытию $\{K_h^\alpha = K(x^\alpha, h)\}_\alpha$ можно построить «разбиение единицы» $\{\varphi_\alpha(x)\}_\alpha$ – набор гладких функций, удовлетворяющих условиям:

- 1) $\varphi_\alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$;
- 2) $0 \leq \varphi_\alpha(x) \leq 1$ при $x \in \mathbb{R}^n$;
- 3) $\varphi_\alpha(x) = 1$ при $x \in K_{h-2r}^\alpha$;
- 4) $\varphi_\alpha(x) = 0$ при $x \notin K_h^\alpha$;
- 5) $|D^\lambda \varphi_\alpha(x)| < \frac{C}{r^\lambda}$, $\lambda = 1, 2$, где константа C не зависит от значений h, r ;
- 6) $\sum_\alpha \varphi_\alpha(x) = 1$ при $x \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Рассмотрим на вещественной оси $x \in \mathbb{R}$ функцию

$$f(x) := \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x^2 - 1}\right) & \text{при } -1 < x < 1, \\ 0 & \text{при остальных } x, \end{cases}$$

функція $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Пусть $0 < r \ll \frac{h}{2} \ll \frac{1}{2}$ – вещественные числа. Далее рассмотрим функцию, полученную сжатием в $\frac{r}{2}$ раз функции $f(x)$:

$$f_r(x) := f\left(\frac{2x}{r}\right),$$

которая также $f_r(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$. По функции $f_r(x)$ построим функцию $F(x)$, определённую равенством

$$F(x) := \begin{cases} \frac{\int_{-\infty}^{x+\frac{h-r}{2}} f_r(t) dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_r(t) dt} & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{\int_{x-\frac{h-r}{2}}^{+\infty} f_r(t) dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_r(t) dt} & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что $F(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ и $F(x) = 1$ при $-\frac{h}{2} + r \leq x \leq \frac{h}{2} - r$, $F(x) = 0$ при $x \leq -\frac{h}{2}$ или $x \geq \frac{h}{2}$, $F(x)$ возрастает от 0 до 1 при $-\frac{h}{2} < x < -\frac{h}{2} + r$ и убывает от 1 до 0 при $\frac{h}{2} - r < x < \frac{h}{2}$.

Оценим первую и вторую производные функции $F(x)$.

$$|F'(x)| \leq \frac{\max_{+\infty} f_r(x)}{\int_{-\infty} f_r(t) dt} = \frac{\exp(-1)}{\frac{r}{2} \int_{-1}^{+1} f(t) dt} = \frac{C_1}{r},$$

$$|F''(x)| = \frac{\max_{+\infty} |f'_r(x)|}{\int_{-\infty} f_r(t) dt} = \frac{\frac{2}{r} \max_{+1} |f'(x)|}{\frac{r}{2} \int_{-1} f(t) dt} = \frac{C_2}{r^2},$$

где константы C_1, C_2 не зависят от h, r .

Покроем вещественную ось \mathbb{R} точками $x^{\alpha_i} = i(h - r)$ ($i = -\infty, \dots, +\infty$) и определим функции, полученные с помощью сдвига функции $F(x)$

$$F_{\alpha_i}(x) = F(x - x^{\alpha_i}).$$

Очевидно, что в силу свойств функции $F(x)$ функции $F_{\alpha_i}(x)$ обладают свойствами: $F_{\alpha_i}(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ и $F_{\alpha_i}(x) = 1$ при $x^{\alpha_i} - \frac{h}{2} + r \leq x \leq x^{\alpha_i} + \frac{h}{2} - r$, $F_{\alpha_i}(x) = 0$ при $x \leq x^{\alpha_i} - \frac{h}{2}$ или $x \geq x^{\alpha_i} + \frac{h}{2}$, $F_{\alpha_i}(x)$ возрастает от 0 до 1 при $x^{\alpha_i} - \frac{h}{2} < x < x^{\alpha_i} - \frac{h}{2} + r$ и убывает от 1 до 0 при $x^{\alpha_i} + \frac{h}{2} - r < x < x^{\alpha_i} + \frac{h}{2}$, и их производные удовлетворяют оценкам

$$|F'_{\alpha_i}(x)| \leq \frac{C_1}{r}, \quad |F''_{\alpha_i}(x)| \leq \frac{C_2}{r^2},$$

где константы C_1, C_2 не зависят от h, r .

Докажем справедливость равенства

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} F_{\alpha_i}(x) = 1. \quad (23)$$

Пусть точка $x \in [x^{\alpha_j} - h/2 + r, x^{\alpha_j} + h/2 - r]$, тогда это равенство очевидно

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} F_{\alpha_i}(x) = F_{\alpha_j}(x) = 1.$$

Пусть точка $x \in [x^{\alpha_j} + h/2 - r, x^{\alpha_j} + h/2] = [x^{\alpha_{j+1}} - h/2, x^{\alpha_{j+1}} - h/2 + r]$ принадлежит двум смежным отрезкам разбиения, то есть лежит в их пересечении, тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} F_{\alpha_i}(x) &= F_{\alpha_j}(x) + F_{\alpha_{j+1}}(x) = \frac{\int_{x-(x^{\alpha_j} + \frac{h-r}{2})}^{+\infty} f_r(t) dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_r(t) dt} + \frac{\int_{-\infty}^{x-(x^{\alpha_{j+1}} - \frac{h-r}{2})} f_r(t) dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_r(t) dt} = \\ &= \frac{\int_{x-(x^{\alpha_j} + \frac{h-r}{2})}^{+\infty} f_r(t) dt + \int_{-\infty}^{x-(x^{\alpha_{j+1}} - \frac{h-r}{2})} f_r(t) dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_r(t) dt} = 1. \end{aligned}$$

Равенство (23) доказано.

Рассмотрим теперь функцию $\varphi_\alpha(x)$ ($\alpha = \{\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n\}$ – мультииндекс), определённую при $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in \mathbb{R}^n$ формулой

$$\varphi_\alpha(x) := \prod_{i=1}^n F_{\alpha^i}(x_i).$$

Легко видеть, что $\varphi_\alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\varphi_\alpha(x) = 1$ при $x \in K_{h-2r}^\alpha$, $\varphi_\alpha(x) = 0$ при $x \notin K_h^\alpha$, $0 \leq \varphi_\alpha(x) \leq 1$ при $x \in K_h^\alpha \setminus K_{h-2r}^\alpha$. И кроме того,

$$|D\varphi_\alpha(x)| \leq \frac{\tilde{C}_1}{r}, \quad |D^2\varphi_\alpha(x)| \leq \frac{\tilde{C}_2}{r^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

где константы \tilde{C}_1, \tilde{C}_2 не зависят от h, r . Таким образом, функция $\varphi_\alpha(x)$ удовлетворяет свойствам 1)-5). Докажем справедливость свойства 6). В силу (23) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \varphi_\alpha(x) &= \sum_{i_1=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{i_n=-\infty}^{+\infty} \prod_{j=1}^n F^{\alpha_{i_j}^j}(x_j) = \sum_{i_1=-\infty}^{+\infty} F^{\alpha_{i_1}^1}(x_1) \left(\sum_{i_2=-\infty}^{+\infty} F^{\alpha_{i_2}^2}(x_2) \times \right. \\ &\times \left. \left(\dots \left(\sum_{i_n=-\infty}^{+\infty} F^{\alpha_{i_n}^n}(x_n) \right) \right) \right) = 1. \end{aligned}$$

Свойство 6) доказано, искомая система функций построена. Лемма 2 доказана.

Для вывода формул (7) и (8) проведём предварительное построение. Предположим, что пространство \mathbb{R}^3 разрезано на не пересекающиеся параллелепипеды $\Pi_{x^\alpha}^\varepsilon$. Построим концентрические с ними параллелепипеды

$$\Pi_{x^\alpha}^{\pm\delta\varepsilon} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : |x_i - x_i^\alpha| \leq \frac{\theta_i\varepsilon}{2}(1 \pm \delta), i = \overline{1,3} \right\} \quad (0 < \delta \ll 1)$$

с которыми свяжем разбиение единицы $\{\varphi_\alpha^\varepsilon(x)\}_\alpha$ – набор гладких функций, удовлетворяющих условиям: $\varphi_\alpha^\varepsilon(x) = 1$ при $x \in \Pi_{x^\alpha}^{-\delta\varepsilon}$, $\varphi_\alpha^\varepsilon(x) = 0$ при $x \notin \Pi_{x^\alpha}^{+\delta\varepsilon}$, $\sum_\alpha \varphi_\alpha^\varepsilon(x) = 1$, $|D^\lambda \varphi_\alpha^\varepsilon(x)| \leq \frac{C}{\varepsilon^{|\lambda|} \delta^{|\lambda|}}$ ($|\lambda| = 0, 1, 2$) при $x \in \Omega$.

4.1. Вывод формулы (7). Определим функцию

$$v^\varepsilon(x) = s + \varepsilon \sum_\alpha v_\alpha^\varepsilon \left(\frac{x - x^\alpha}{\varepsilon} \right) \varphi_\alpha^\varepsilon(x), \quad x \in \Omega^\varepsilon, s \in \mathbb{R}. \quad (24)$$

где $\{\varphi_\alpha^\varepsilon(x)\}_\alpha$ – разбиение единицы, описанное выше, а функция $v_\alpha^\varepsilon(\xi)$ – решение задачи (16) для данного s . Функцию, минимизирующую функционал (13) в области $K_h^z \cap \Omega^\varepsilon$, будем искать в виде

$$w^\varepsilon(x) = v^\varepsilon(x) + \hat{v}^\varepsilon(x). \quad (25)$$

Тогда функция $\hat{v}^\varepsilon(x)$ должна минимизировать функционал

$$J[\hat{v}^\varepsilon] = I_0(\varepsilon, h) + I_1(\varepsilon, h) + I_2(\varepsilon, h)$$

в классе функций $H^1(K_h^z \cap \Omega^\varepsilon)$, где

$$\begin{aligned} I_0(\varepsilon, h) &= \int_{K_h^z \cap \Omega^\varepsilon} [|\nabla \hat{v}^\varepsilon(x)|^2 + h^{-2-\tau} |\hat{v}^\varepsilon(x)|^2] dx, \\ I_1(\varepsilon, h) &= -2 \int_{K_h^z \cap \Omega^\varepsilon} [\Delta v^\varepsilon(x) \hat{v}^\varepsilon(x) - h^{-2-\tau} (v^\varepsilon(x) - s) \hat{v}^\varepsilon(x)] dx, \\ I_2(\varepsilon, h) &= \int_{K_h^z \cap \partial F^\varepsilon} \left[g^\varepsilon(x, v^\varepsilon + \hat{v}^\varepsilon) - g^\varepsilon(x, v^\varepsilon) + 2 \frac{\partial v^\varepsilon(x)}{\partial \nu} \hat{v}^\varepsilon(x) \right] d\Gamma. \end{aligned}$$

Так как $J[\hat{v}^\varepsilon] \leq J[0] = 0$, то

$$I_0(\varepsilon, h) \leq |I_1(\varepsilon, h)| + |I_2(\varepsilon, h)|. \quad (26)$$

Оценим каждое слагаемое правой части этого неравенства.

Из (17), (18), (24) и неравенства Коши-Буняковского получаем

$$\begin{aligned}
|I_1(\varepsilon, h)| &\leq 2 \left| \int_{K_h^z \cap \Omega^\varepsilon} \Delta v^\varepsilon \hat{v}^\varepsilon dx \right| + 2h^{-2-\tau} \left| \int_{K_h^z \cap \Omega^\varepsilon} (v^\varepsilon - s) \hat{v}^\varepsilon dx \right| \leq \\
&\leq 2 \sqrt{\int_{K_h^z \cap \Omega^\varepsilon} |\Delta v^\varepsilon|^2 dx} \sqrt{\int_{K_h^z \cap \Omega^\varepsilon} |\hat{v}^\varepsilon|^2 dx} + 2h^{-2-\tau} \sqrt{\int_{K_h^z \cap \Omega^\varepsilon} |v^\varepsilon - s|^2 dx} \times \\
&\times \sqrt{\int_{K_h^z \cap \Omega^\varepsilon} |\hat{v}^\varepsilon|^2 dx} \leq 2h^{1+\tau/2} I_0^{1/2}(\varepsilon, h) \sqrt{\sum_{\alpha} \int_{\Pi_{x^\alpha}^\varepsilon \setminus \Pi_{x^\alpha}^{-\delta\varepsilon}} |\Delta v^\varepsilon|^2 dx} + \\
&+ 2h^{-1-\tau/2} I_0^{1/2}(\varepsilon, h) \sqrt{\sum_{\alpha} \int_{\Pi_{x^\alpha}^\varepsilon \setminus F_{x^\alpha}^\varepsilon} |v^\varepsilon - s|^2 dx} \leq C_1 I_0^{1/2}(\varepsilon, h) \times \\
&\times \left(h^{1+\tau/2} \sqrt{\frac{1}{\delta^4} \sum_{\alpha} \text{mes}(\Pi_{x^\alpha}^\varepsilon \setminus \Pi_{x^\alpha}^{-\delta\varepsilon})} + h^{-1-\tau/2} \sqrt{\varepsilon^4 \sum_{\alpha} \text{mes}(\Pi_{x^\alpha}^\varepsilon \setminus F_{x^\alpha}^\varepsilon)} \right) \leq \\
&\leq C_2 I_0^{1/2}(\varepsilon, h) \left(\frac{h^{3/2+1/2+\tau/2}}{\delta^{3/2}} + h^{3/2-1-\tau/2} \varepsilon^2 \right).
\end{aligned}$$

Таким образом, при $\delta = h^{1/3+\tau/6}$ и $0 < \varepsilon \leq h^{1/2+3\tau/8}$ имеем

$$|I_1(\varepsilon, h)| \leq Ch^{3/2+\tau/4} I_0^{1/2}(\varepsilon, h). \quad (27)$$

Получим оценку для $I_2(\varepsilon, h)$. Так как ([13, Л.1])

$$\forall x \in K_h^z \cap \Omega^\varepsilon : |w^\varepsilon(x)| \leq |s|,$$

тогда в силу определений функций $w^\varepsilon(x)$ (25), $g^\varepsilon(x, s)$ (14), свойств функции $\sigma(x, u)$ и интегральной теоремы о среднем, имеем

$$\begin{aligned}
|I_2(\varepsilon, h)| &= \left| \int_{K_h^z \cap \partial F^\varepsilon} \left[g^\varepsilon(x, v^\varepsilon + \hat{v}^\varepsilon) - g^\varepsilon(x, v^\varepsilon) + 2 \frac{\partial v^\varepsilon(x)}{\partial \nu} \hat{v}^\varepsilon(x) \right] d\Gamma \right| = \\
&= 2\varepsilon \left| \int_{K_h^z \cap \partial F^\varepsilon} \left[\int_{v^\varepsilon}^{v^\varepsilon + \hat{v}^\varepsilon} \sigma(x, r) dr - \sigma(x, v^\varepsilon) \hat{v}^\varepsilon \right] d\Gamma \right| \leq \\
&\leq 2\varepsilon \int_{K_h^z \cap \partial F^\varepsilon} |\sigma(x, v^\varepsilon + \hat{v}^\varepsilon) - \sigma(x, v^\varepsilon)| |\hat{v}^\varepsilon| d\Gamma \leq \\
&\leq C_1 (1 + 2|s|^{\Theta-1}) \varepsilon \int_{K_h^z \cap \partial F^\varepsilon} |\hat{v}^\varepsilon|^2 d\Gamma = C_2 \varepsilon \int_{K_h^z \cap \partial F^\varepsilon} |\hat{v}^\varepsilon|^2 d\Gamma.
\end{aligned}$$

Здесь $0 \leq \tilde{v}^\varepsilon(x) \leq \hat{v}^\varepsilon(x)$ при $\hat{v}^\varepsilon(x) \geq 0$ и $\hat{v}^\varepsilon(x) \leq \tilde{v}^\varepsilon(x) \leq 0$ при $\hat{v}^\varepsilon(x) < 0$.

Для любой функции $\varphi \in H^1(\Omega^\varepsilon)$ справедливо интегральное неравенство

$$\varepsilon \int_{K_h^z \cap \partial F^\varepsilon} \varphi^2 d\Gamma_x \leq C \left(\int_{K_h^z \cap \Omega^\varepsilon} \varphi^2 dx + \varepsilon^2 \int_{K_h^z \cap \Omega^\varepsilon} |\nabla_x \varphi|^2 dx \right).$$

Из которого при $0 < \varepsilon \leq h^{1+\tau/2}$ для $I_2(\varepsilon, h)$ следует

$$|I_2(\varepsilon, h)| \leq Ch^{2+\tau} I_0(\varepsilon, h). \quad (28)$$

Из (26), (27), (28) при $0 < \varepsilon \leq h^{1+\tau/2}$, $\delta = h^{1/3+\tau/6}$ получаем оценку

$$I_0(\varepsilon, h) = O(h^{3+\tau/2}) = o(h^3).$$

Таким образом, функция \hat{v}^ε даёт малый вклад в предельную функцию поглощения. Тогда согласно (25) функция $v^\varepsilon(x)$ при малых h аппроксимирует минимизант $w^\varepsilon(x)$ функционала (13) в области $K_h^z \cap \Omega^\varepsilon$.

Подставляем $w^\varepsilon(x)$ в (13), учитывая свойства функции $\sigma(x, u)$, при $0 < \varepsilon \leq h^{1+\tau/2}$ и $\delta = h^{1/3+\tau/6}$ получаем

$$\begin{aligned} c(z, s; \varepsilon, h) &= \int_{K_h^z \cap \Omega^\varepsilon} [|\nabla v^\varepsilon|^2 + h^{-2-\tau}|v^\varepsilon - s|^2] dx + \int_{K_h^z \cap \partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x, v^\varepsilon) d\Gamma + o(h^3) = \\ &= \int_{K_h^z \cap \partial F^\varepsilon} 2\varepsilon \int_0^s \sigma(x, r) dr d\Gamma + o(h^3) = \frac{2|\partial F_z| h^3}{|\Pi|} \int_0^s \sigma(z, r) dr + o(h^3). \end{aligned}$$

Откуда делаем вывод, что условие 2) теоремы 2 выполняется. Разделив $c(z, s; \varepsilon, h)$ на h^3 и перейдя к пределу при $h \rightarrow 0$, получаем выражение (7) для функции поглощения.

4.2. Вывод формулы (8). Вывод данной формулы производится в основном так же, как в книге [12, гл. 2], где рассмотрена задача Неймана для частного случая локально-периодической среды, определенной в данной работе. Поэтому некоторые технические выкладки, идентичные [12] мы опустим.

Рассмотрим в области $K_h^z \cap \Omega^\varepsilon$ функции

$$U_i^\varepsilon(x) = (x_i - z_i) - \varepsilon \sum_\alpha \tilde{V}_i \left(\frac{x - x^\alpha}{\varepsilon}, x^\alpha \right) \varphi_\alpha^\varepsilon(x), \quad (i = \overline{1, 3}), \quad (29)$$

где $\tilde{V}_i(\xi, \eta)$ – периодическое продолжение решения $V_i(\xi, \eta)$ задачи (9) на всё пространство R^3 , $\{\varphi_\alpha^\varepsilon\}$ – разбиение единицы.

Будем искать функцию $w_i^\varepsilon(x)$, минимизирующую функционал (10) при $\ell = e^i$ в виде

$$w_i^\varepsilon(x) = U_i^\varepsilon(x) + v_i^\varepsilon(x), \quad (30)$$

где функция $U_i^\varepsilon(x)$ определена равенством (29), тогда функция $v_i^\varepsilon(x)$ должна минимизировать функционал

$$J[v_i^\varepsilon] = I_0(\varepsilon, h) + I_1(\varepsilon, h) + I_2(\varepsilon, h),$$

в классе функций $H^1(K_h^z \cap \Omega^\varepsilon)$, где

$$\begin{aligned} I_0(\varepsilon, h) &= \int_{K_h^z \cap \Omega^\varepsilon} [|\nabla v_i^\varepsilon|^2 + h^{-2-\tau} |v_i^\varepsilon|^2] dx, \\ I_1(\varepsilon, h) &= 2 \int_{K_h^z \cap \Omega^\varepsilon} (\nabla U_i^\varepsilon, \nabla v_i^\varepsilon) dx, \\ I_2(\varepsilon, h) &= 2h^{-2-\tau} \int_{K_h^z \cap \Omega^\varepsilon} (U_i^\varepsilon - (x_i - z_i)) v_i^\varepsilon(x) dx. \end{aligned}$$

Так как $J[v_i^\varepsilon] \leq J^\varepsilon[0] = 0$, то справедливо неравенство

$$I_0(\varepsilon, h) \leq |I_1(\varepsilon, h)| + |I_2(\varepsilon, h)|. \quad (31)$$

Оценим каждое слагаемое правой части. Пользуясь неравенством Коши-Буняковского, формулой (29) и определением $I_0(\varepsilon, h)$ при $0 < \varepsilon \leq h^{1+\tau}$, получаем оценку $I_2(\varepsilon, h)$

$$\begin{aligned} |I_2(\varepsilon, h)| &\leq 2h^{-2-\tau} \|U_i^\varepsilon - (x_i - z_i)\|_{L^2(K_h^z \cap \Omega^\varepsilon)} \|v_i^\varepsilon\|_{L^2(K_h^z \cap \Omega^\varepsilon)} \leq \\ &\leq Ch^{\frac{3+\tau}{2}} I_0^{1/2}(\varepsilon, h). \end{aligned} \quad (32)$$

Оценим $I_1(\varepsilon, h)$. Применив интегрирование по частям, запишем

$$I_1(\varepsilon, h) = -2 \int_{K_h^z \cap \Omega^\varepsilon} \Delta U_i^\varepsilon v_i^\varepsilon dx + 2 \int_{\partial K_h^z \cap \Omega^\varepsilon} \frac{\partial U_i^\varepsilon}{\partial \nu} v_i^\varepsilon d\Gamma. \quad (33)$$

В работе [19] было доказано, что при выполнении условий (2), (3) имеет место гладкая зависимость решения „ячеечной“ задачи $V_i(\xi, \eta)$ от параметра η :

$$\left\| D_\xi^\lambda V_k(\xi, \eta_1) - D_\xi^\lambda V_k(\xi, \eta_2) \right\|_{C(\Pi \setminus \Pi^{-\delta})} \leq C |\eta_1 - \eta_2|, \quad |\lambda| = 0, 1,$$

отсюда, в силу периодичности $\tilde{V}_i(\xi, \eta)$ по ξ при $x \in \Pi_{x^\alpha}^{+\delta\varepsilon} \cap \Pi_{x^\beta}^{+\delta\varepsilon}$ следует:

$$\begin{aligned} \left| D_x^\lambda \tilde{V}_i \left(\frac{x - x^\alpha}{\varepsilon}, x^\alpha \right) - D_x^\lambda \tilde{V}_i \left(\frac{x - x^\beta}{\varepsilon}, x^\beta \right) \right| &\leq \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon^{|\lambda|}} |x^\alpha - x^\beta| \leq C\varepsilon^{1-|\lambda|}, \quad |\lambda| = 0, 1. \end{aligned} \quad (34)$$

С помощью этого неравенства, учитывая свойства разбиения единицы $\{\varphi_\alpha^\varepsilon(x)\}_\alpha$, получаем

$$\|\Delta U_i^\varepsilon\|_{L^2(K_h^z \cap \Omega^\varepsilon)} \leq Ch\delta^{-3/2}.$$

Отсюда, учитывая определение $I_0(\varepsilon, h)$, при $\delta \geq h^{1/3}$ имеем

$$\left| \int_{K_h^z \cap \Omega^\varepsilon} \Delta U_i^\varepsilon v_i^\varepsilon dx \right| \leq \|\Delta U_i^\varepsilon\|_{L^2(K_h^z \cap \Omega^\varepsilon)} \|v_i^\varepsilon\|_{L^2(K_h^z \cap \Omega^\varepsilon)} \leq \tag{35}$$

$$\leq C\delta^{-3/2} h^{2+\tau/2} I_0^{1/2}(\varepsilon, h) \leq Ch^{\frac{3+\tau}{2}} I_0^{1/2}(\varepsilon, h).$$

В силу сильной связности областей Ω^ε функция $v_i^\varepsilon \in H^1(K_h^z \cap \Omega^\varepsilon)$ может быть продолжена до функции $\tilde{v}_i^\varepsilon \in H^1(K_h^z)$ с выполнением неравенства (15). Кроме того, согласно лемме 2.1 [12, гл.4] $\tilde{v}_i^\varepsilon(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\int_{\partial K_h^z} |\tilde{v}_i^\varepsilon|^2 d\Gamma \leq 6 \left[\varkappa \int_{K_h^z} |\nabla \tilde{v}_i^\varepsilon|^2 dx + \left(\frac{4}{\varkappa} + \frac{1}{h} \right) \int_{K_h^z} |\tilde{v}_i^\varepsilon|^2 dx \right],$$

тогда при $\varkappa = h^{1+\frac{\tau}{2}}$, согласно определения функции $U_i^\varepsilon(x)$ (29) и свойств решения $V_i(\xi, \eta)$ „ячеечной“ задачи (9), для поверхностного интеграла в (33) справедлива оценка

$$\left| \int_{\partial K_h^z \cap \Omega^\varepsilon} \frac{\partial U_i^\varepsilon}{\partial \nu} v_i^\varepsilon d\Gamma \right| \leq \left[\int_{\partial K_h^z} \left| \frac{\partial U_i^\varepsilon}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma \right]^{1/2} \left[\int_{\partial K_h^z} |\tilde{v}_i^\varepsilon|^2 d\Gamma \right]^{1/2} \leq$$

$$\leq C_1 h \left[h^{1+\tau/2} \int_{K_h^z} |\nabla \tilde{v}_i^\varepsilon|^2 dx + \frac{4+h^{\tau/2}}{h^{1+\tau/2}} \int_{K_h^z} |\tilde{v}_i^\varepsilon|^2 dx \right]^{1/2} \leq$$

$$\leq C_2 h^{2+\tau/2} \left[\int_{K_h^z \cap \Omega^\varepsilon} |\nabla v_i^\varepsilon|^2 dx + \frac{4+h^{\tau/2}}{h^{2+\tau}} \int_{K_h^z \cap \Omega^\varepsilon} |v_i^\varepsilon|^2 dx \right]^{1/2} \leq C_3 h^{2+\tau/2} I_0^{1/2}(\varepsilon, h).$$

Отсюда и из (33), (35) имеем

$$|I_1(\varepsilon, h)| \leq Ch^{1+\tau/2} I_0^{1/2}(\varepsilon, h). \tag{36}$$

Из (31), (32), (36) при $0 < \varepsilon \ll h^{1+\tau}$ получаем оценку для $I_0(\varepsilon, h)$

$$I_0(\varepsilon, h) = \int_{K_h^z \cap \Omega^\varepsilon} [|\nabla v_i^\varepsilon|^2 + h^{-2-\tau} |v_i^\varepsilon|^2] dx \leq Ch^{3+\tau} = o(h^3).$$

Отсюда следует, что функция $v_i^\varepsilon(x)$ даёт малый взнос в предельный тензор проводимости. Таким образом, согласно (30) функция U_i^ε при малых h аппроксимирует функцию $w_i^\varepsilon(x)$, минимизирующую функционал (10) при $\ell = e^i$.

Подставим w_i^ε в виде (30) в формулу (12) для $a_{ij}(z, \varepsilon, h)$, получаем

$$\begin{aligned} a_{ij}(z, \varepsilon, h) &= \sum_{\alpha} \varepsilon^2 \int_{\Pi_{x^\alpha}^\varepsilon \setminus F_{x^\alpha}^\varepsilon} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{x_i - z_i}{\varepsilon} - \tilde{V}_i \left(\frac{x - x^\alpha}{\varepsilon}, x^\alpha \right) \right) \times \\ &\quad \times \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{x_j - z_j}{\varepsilon} - \tilde{V}_j \left(\frac{x - x^\alpha}{\varepsilon}, x^\alpha \right) \right) dx + o(h^3) = \\ &= \delta_{ij} h^3 \left(1 - \frac{|F_z|}{|\Pi|} \right) - \frac{1}{|\Pi|} \int_{K_h^z} \int_{\Pi \setminus F_z} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial V_i(\xi, \eta)}{\partial \xi_k} \frac{\partial V_j(\xi, \eta)}{\partial \xi_k} d\xi d\eta + o(h^3). \end{aligned}$$

Из этого равенства делаем вывод, что условие 1) теоремы 2 выполнено. Разделив $a_{ij}(z, \varepsilon, h)$ на h^3 и перейдя к пределу при $h \rightarrow 0$, получаем выражение для предельного тензора проводимости (8).

Теорема 1 доказана.

Благодарность. Авторы выражают глубокую благодарность Е.Я. Хруслову, чьи критические замечания позволили существенно улучшить работу.

REFERENCES

1. B. Cabarrubias, P. Donato. Homogenization of a quasilinear elliptic problem with nonlinear Robin boundary condition, Appl. Anal. – 2012. – Vol. 91, No. 6. – P. 1111-1127.
2. B. Calmuschi, C. Timofte. Upscaling of Chemical Reactive Flows in Porous Media, «Caius Iacob» Conference on Fluid Mechanics & Texnical Applications, Bucharest, Romania. – 2005. – P. 1-9.
3. D. Cioranescu, P. Donato. On Robin problems in perforated domains, Math. Sci. Appl. – 1997. – No. 9. – P. 123-135.
4. D. Cioranescu, P. Donato, R. Zaki. The periodic unfolding method in perforated domains, Portugaliae Math. – 2006. – Vol. 63, No.4. – P. 467-496.
5. C. Conca, J. Diaz, A. Linan, C. Timofte. Homogenization in chemical reactive floes, Electron. J. Differ. Equ. – 2004. – No.40. – P. 1-22.
6. C. Conca, J. Diaz, A. Linan, C. Timofte. Homogenization results for chemical reactive flows through porous media, New Trends in Continuum Mechanics. – 2005. – P. 99-107.
7. J. Diaz. Two problems in homogenization of porous media, Extracta Mathematica. – 1999. – No. 14. – P. 141-155.

8. W. Jäger, O.A. Oleinik, A.S. Shamaev. On Homogenization of Solutions of Boundary Value Problem for the Laplace Equation in Partially Perforated Domain with the Third Boundary Type Condition on the Boundary of Cavities, *Trudy Mosk. Math. Soc.* – 1997. – Vol. **58**. – P. 187–223.
9. T.A. Mel'nyk, O.A. Sivak. Asymptotic analysis of a boundary-value problem with the nonlinear multiphase interactions in a perforated domain, *Ukr. Math. Journal.* – 2009. – Vol. 61, No. **4**. – P. 494-512.
10. T.A. Mel'nyk, O.A. Sivak. Asymptotic approximations for solutions to quasilinear and linear elliptic problems with different perturbed boundary conditions in perforated domains, *Asymptot. Anal.* – 2011. – Vol. **75**. – P. 79-92.
11. C. Timofte. Homogenization in Nonlinear Chemical Reactive Flows, *Proceedings of the 9th WSEAS International Conference on Applied Mathematics, Istanbul, Turkey, May 27-29.* – 2006. – P. 250-255.
12. V.A. Marchenko, E.Ya. Khruslov. *Homogenization of Partial Differential Equations.* – Birkhäuser Boston, 2006. – 401 p.
13. M.V. Goncharenko, L.A. Khilkova. Homogenized model of diffusion in porous media with nonlinear absorption on the boundary, *Ukr. Math. Journal.* – 2016. – Vol. 67, No. **9**. – P. 1349-1366.
14. E.Ya. Khruslov, L.O. Khilkova, M.V. Goncharenko. Integral conditions for convergence of solutions of non-linear Robin's problem in strongly perforated domains, *J. Math. Phys. Anal. Geom.* – 2017. – Vol. 13, No. **3**. – P. 1-31.
15. M.V. Goncharenko, L.A. Khilkova. Homogenized model of diffusion in a locally periodic porous medium with nonlinear absorption at the boundary, *Reports of NAS of Ukraine.* – 2016. – No. **6**. – P. 15-19.
16. G.A. Chechkin, A.L. Piatnitski. Homogenization of Boundary-Value Problem in a Locally Periodic Perforated Domain, *Appl. Anal.* – 1999. – Vol. **71**(1-4). – P. 215–235.
17. S.G. Mikhlin. *Linear partial differential equations.* – M.: Vysshaya shkola, 1977. – 431 p.
18. B.A. Dubrovin, S.P. Novikov, A.T. Fomenko. *Modern geometry. Methods and applications.* – M.: Nauka, 1986. – 760 p.
19. L.A. Khilkova. The smooth dependence of the solution of the Neumann boundary-value “cell” problem on the parameters of a domain, *Reports of NAS of Ukraine.*, – 2014. – No. **4(8)**. – P. 32-36.

Article history: Received: 3 October 2018; Final form: 22 October 2018;
Accepted: 23 October 2018.

Гончаренко М.В., Хилькова Л.О. **Усереднені тензор провідності та функція поглинання локально-періодичного пористого середовища.** Вивчається процес стаціонарної дифузії в локально-періодичному пористому середовищі з нелінійним поглинанням на межі пір. Цей процес описується крайовою задачею для еліптичного рівняння, яке розглядається в складній перфорованій області, з нелінійною третьою крайовою умовою на межі перфорації. З причини малості локального масштабу пористості середовища і складності перфорованої області, безпосередній розв'язок таких крайових задач практично неможливий. Тому природний підхід в цій ситуації полягає в дослідженні асимптотичної поведінки розв'язку, коли масштаб мікроструктури прямує до 0, і перехід до усередненої макроскопічної моделі процесу, що розглядається вже в усій області без урахування перфорації. Усередненню рівняння дифузії в широкому класі не періодично перфорованих областей: сильно-зв'язних областях, який включає в себе і локально-періодично перфоровані області, були присвячені наші більш ранні роботи. У цих роботах була отримана усереднена модель, коефіцієнти якої виражаються через «мезоскопічні» (локальні енергетичні) характеристики середовища, що визначаються в малих кубах, розміри яких, тим не менш, значно більше масштабу мікроструктури. У цих роботах теореми збіжності доводилися за умов існування граничних щільностей «мезоскопічних» характеристик, виконання яких показати в загальному випадку дуже важко, але в ряді конкретних ситуацій це можна зробити. У даній роботі ми показуємо виконання цих умов і, досліджуючи їх, отримуємо явні формули для ефективних характеристик локально-періодичного пористого середовища: тензора провідності і функції поглинання.

Ключові слова: усереднення, стаціонарна дифузія, нелінійна третя крайова задача, локально-періодичне пористе середовище, тензор провідності, функція поглинання.

M.V. Goncharenko, L.O. Khilkova. **Homogenized conductivity tensor and absorption function of a locally periodic porous medium.** We study a process of stationary diffusion in locally-periodic porous media with nonlinear absorption at the pore boundary. This process is described by a boundary-value problem for an elliptic equation considered in a complex perforated domain, with a nonlinear third boundary condition on the perforation boundary. In view of the smallness of the local scale of porosity of the media and the complexity of the perforated domain, the direct solution of such boundary-value problems is almost impossible. Therefore, a natural approach in this situation is to study the asymptotic behavior of the solution when the microstructure scale tends to 0, and the transition to the homogenized macroscopic model of the process. Our earlier papers were devoted to homogenization the diffusion equation in a wide class of non-periodically perforated domains: strongly-connected domains, which includes locally-periodically perforated domains. In these works, an homogenized model was obtained, the coefficients of which are expressed in terms of "mesoscopic" (local energy) characteristics of the media, which are determined in small cubes, the size of which, however, are much larger than the microstructure scale. In these papers, convergence theorems were proved under the conditions of the existence of limiting densities of "mesoscopic" characteristics, the fulfillment of which is generally difficult to show, but in a number of specific situations this can be done. In this paper, we show the fulfillment of these conditions and, by studying them, we obtain explicit formulas for the effective characteristics of the locally-periodic porous medium: a conductivity tensor and a function of absorption.

Keywords: homogenization; stationary diffusion; non-linear third boundary value problem; locally periodic porous medium, conductivity tensor, function of absorption.

Boundary-value problems in a layer for evolutionary pseudo-differential equations with integral conditions

A.A. Makarov¹, D.A. Levkin²

¹*V.N. Karazin Kharkiv National University
4, Svobody sqr., 61022, Kharkiv, Ukraine*

²*Kharkiv Petro Vasylenko National Technical University of Agriculture,
44, Alchevskih str., Kharkiv, Ukraine
natvasmak@ukr.net, valoi@i.ua*

Boundary-value problems for evolutionary pseudo-differential equations with an integral condition are studied. Necessary and sufficient conditions of well-posedness are obtained for these problems in the Schwartz spaces. Existence of a well-posed boundary-value problem is proved for each evolutionary pseudo-differential equation.

Keywords: pseudo-differential equations; boundary-value problem; Fourier transform; Schwartz space.

Макаров О.А., Левкін Д.А. **Крайова задача в шарі для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь з інтегральною умовою.** Розглядається крайова задача для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь з інтегральною умовою. Одержано умов коректності цієї задачі у просторах Л. Шварца, а також доведено існування коректної крайової задачі для будь-якого еволюційного псевдодиференціального рівняння.

Ключові слова: псевдодиференціальні рівняння; крайова задача; перетворення Фур'є, простір Шварца.

Макаров А.А., Левкин Д.А. **Краевая задача в слое для эволюционных псевдодифференциальных уравнений с интегральным условием.** Рассматривается краевая задача для эволюционных псевдодифференциальных уравнений с интегральным условием. Получены условия корректности этой задачи в пространствах Л. Шварца, а также доказано существование корректной краевой задачи для любого эволюционного псевдодифференциального уравнения.

Ключевые слова: псевдодифференциальные уравнения; краевая задача; преобразование Фурье; пространство Шварца.

2010 Mathematics Subject Classification: 35S10.

1. Introduction

Numerous papers are dedicated to nonlocal boundary-value problems for differential and pseudo-differential equations. In monograph [1], existing results are

reviewed in details. In papers [2, 3, 4], a two-point boundary-value problem for differential and pseudo-differential equations was studied, and necessary and sufficient conditions of well-posedness were obtained for this problem in various spaces of functions. Moreover, therein, existence of well-posed boundary-value problem was proved for a linear system of differential equations with constant coefficients. In paper [5], these results were extended to multilayer under an additional continuity condition (transmission condition). In the present paper, boundary-value problems for evolutionary pseudo-differential equations with integral conditions are studied. Necessary and sufficient conditions of well-posedness are obtained for this problem in the Schwartz spaces. Existence of a well-posed boundary-value problem is proved for each evolutionary pseudo-differential equation.

2. Main part

Consider the following boundary-value problems

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = A \left(t, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

$$\int_0^T B \left(t, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, t) d\mu(t) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

and

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = A \left(t, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, t) + f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

$$\int_0^T B \left(t, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, t) d\mu(t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (4)$$

Here $A \left(t, \frac{\partial}{\partial x} \right)$ and $B \left(t, \frac{\partial}{\partial x} \right)$ are pseudo-differential operators with symbols belonging to the space of infinitely differentiable functions with power growth $C_{-\infty}^{\infty}$ (see [6]), $\mu(t)$ is a function of bounded variation.

Definition 1 *Problem (1), (2) is said to be well posed from S to $C^1([0, T], S)$ if for any function $\varphi \in S$ there exists a unique solution $u \in C^1([0, T], S)$ to this problem, and this solution depends continuously on φ in appropriate topology.*

Definition 2 *Problem (3), (4) is said to be well posed from $C([0, T], S)$ to $C^1([0, T], S)$ if for any function $f \in C([0, T], S)$ there exists a unique solution $u \in C^1([0, T], S)$ to this problem, and this solution depends continuously on f in appropriate topology.*

Applying the Fourier transform with respect to space variables, we get the dual boundary-value problems

$$\frac{\partial \tilde{u}(x, t)}{\partial t} = A(t, s) \tilde{u}(s, t), \quad s \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, T], \quad (5)$$

$$\int_0^T B(t, s) \tilde{u}(s, t) d\mu(t) = \tilde{\varphi}(s), \quad s \in \mathbb{R}^n, \quad (6)$$

and

$$\frac{\partial \tilde{u}(s, t)}{\partial t} = A(t, s) \tilde{u}(s, t) + \tilde{f}(s, t), \quad s \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, T], \quad (7)$$

$$\int_0^T B(t, s) \tilde{u}(s, t) d\mu(t) = 0, \quad s \in \mathbb{R}^n, \quad (8)$$

where the Fourier transforms \tilde{u} , $\tilde{\varphi}$, and \tilde{f} also belong to S for any $t \in [0, T]$. The function

$$\tilde{u}(s, t) = \psi(s) \exp \left(\int_0^t A(\tau, s) d\tau \right)$$

is the solution to equation (5), where ψ is an arbitrary function. By substituting this formula into equation (6), we obtain

$$\psi(s) \int_0^T B(t, s) \exp \left(\int_0^t A(\tau, s) d\tau \right) d\mu(t) = \tilde{\varphi}(s), \quad s \in \mathbb{R}^n. \quad (9)$$

The condition

$$\Delta(s) = \int_0^T B(t, s) \exp \left(\int_0^t A(\tau, s) d\tau \right) d\mu(t) \neq 0, \quad s \in \mathbb{R}^n, \quad (10)$$

is necessary for solvability of equation (9). Solution \tilde{u} belongs to $C^1([0, T], S)$ if and only if, for the resolving function

$$Q(s, t) = \frac{1}{\Delta(s)} \exp \left(\int_0^t A(\tau, s) d\tau \right),$$

we have $Q(\cdot, t) \in C_{-\infty}^{\infty}$, $t \in [0, T]$ (see [6]). Thus we have the following theorem.

Theorem 1 *The problem (1), (2) is well-posed from S to $C^1([0, T], S)$ if $Q(\cdot, t) \in C_{-\infty}^{\infty}$, $t \in [0, T]$.*

To solve problem (7), (8), we consider Green's function.

Definition 3 *The function $G(s, t, \tau)$ is called Green's function of the problem (7), (8) if it satisfies the following conditions:*

- 1) $G(s, t, \tau)$ is continuously differentiable on $[0, \tau) \cup (\tau, T]$, $s \in \mathbb{R}^n$, $\tau \in [0, T]$;
- 2) $G(s, \tau + 0, \tau) - D(s, \tau - 0, \tau) = 1$ on $t \in [0, \tau) \cup (\tau, T]$, $s \in \mathbb{R}^n$, $\tau \in [0, T]$;
- 3) $\frac{\partial}{\partial t} G(s, t, \tau) = G(s, t, \tau)$ on $t \in [0, \tau) \cup (\tau, T]$, $s \in \mathbb{R}^n$, $\tau \in [0, T]$;
- 4) $\int_0^T B(s, t) G(s, t, \tau) d\mu(t) = 0$, $s \in \mathbb{R}^n$, $\tau \in [0, T]$.

If Green's function exists, then there exists a unique solution to the problem (7), (8). Due to [7], this solution is defined by the formula

$$\tilde{u}(s, t) = \int_0^T G(s, t, \tau) \tilde{f}(s, \tau) d\tau.$$

Lemma 1 *If Q is the resolving function of problem (5), then*

$$G(s, t, \tau) = \begin{cases} \int_0^\tau B(\xi, s) Q(s, t - \tau + \xi) d\mu(\xi), & \tau \leq t, s \in \mathbb{R}^n, \\ - \int_\tau^T B(\xi, s) Q(s, t - \tau + \xi) d\mu(\xi), & \tau > t, s \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

is Green's function of problem (7), (8).

Proof. Evidently, 1) holds. Let us prove 2). We have

$$\begin{aligned} & G(s, \tau + 0, \tau) - G(s, \tau - 0, \tau) \\ &= \int_0^\tau B(\xi, s) Q(s, \xi) d\mu(\xi) + \int_\tau^T B(\xi, s) Q(s, \xi) d\mu(\xi) \\ &= \int_0^T B(\xi, s) Q(s, \xi) d\mu(\xi) \\ &= \frac{1}{\Delta(s)} \int_0^T B(\xi, s) \exp\left(\int_0^\xi A(\tau, s) d\tau\right) d\mu(\xi) = 1. \end{aligned}$$

Condition 3) is true, because Q satisfies equation (5). Now let us prove 4)

$$\begin{aligned} \int_0^T B(s, t) G(s, t, \tau) d\mu(t) &= - \int_0^\tau B(s, t) \int_\tau^T B(s, \xi) Q(s, t - \tau + \xi) d\mu(\xi) d\mu(t) \\ &\quad + \int_\tau^T B(s, t) \int_0^\tau B(s, \xi) Q(s, t - \tau + \xi) d\mu(\xi) d\mu(t) \\ &= - \int_\tau^T \int_0^\tau B(s, t) B(s, \xi) Q(s, t - \tau + \xi) d\mu(\xi) d\mu(t) \\ &\quad + \int_\tau^T \int_0^\tau B(s, t) B(s, \xi) Q(s, t - \tau + \xi) d\mu(\xi) d\mu(t) = 0. \end{aligned}$$

The lemma is proved. \square

Corollary 1 *If problem (5), (6) is well-posed, then problem (7), (8) is also well posed.*

Proof. If $Q(\cdot, t) \in C_{-\infty}^\infty$, $t \in [0, T]$, then $G(s, t, \tau) \in C_{-\infty}^\infty$, $t, \tau \in [0, T]$. Hence, $\tilde{u}(s, t) \in C^1([0, T], S)$. The corollary is proved. \square

Theorem 2 *For each symbol $A(t, \cdot) \in C_{-\infty}^\infty$, $t \in [0, T]$, there exists a function $B(t, \cdot) \in C_{-\infty}^\infty$, $t \in [0, T]$, such that problem (1), (2) is well-posed from S to $C^1([0, T], S)$.*

Proof. Put

$$B(t, s) = \exp \left(-i \operatorname{Im} \int_0^t A(\tau, s) d\tau \right).$$

Then

$$\Delta(s) = \int_0^T \exp \left(\operatorname{Re} \int_0^t A(\tau, s) d\tau \right) dt > 0.$$

Let us show that

$$Q(\cdot, t) = \frac{1}{\Delta(\cdot)} \exp \int_0^t A(\tau, \cdot) d\tau \in C_{-\infty}^{\infty}, \quad t \in [0, T].$$

Since $A \in C \left([0, T], C_{(l)}^{(k)} \right)$ for all k and l , we can approximate A by functions A_ε , $\varepsilon > 0$, that are stepwise with respect to t and obtain

$$\|A(t, \cdot) - A_0(t, \cdot)\|_{(l)}^{(k)} < \varepsilon, \quad t \in [0, T], \quad \left\| \int_0^t A(\tau, s) d\tau - \int_0^t A_0(\tau, s) d\tau \right\|_{(l)}^{(k)} < \varepsilon T.$$

Thus we have reduced problem (1), (2) to the multi-point boundary-value problem in a multilayer

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= A_0 \left(t_k, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, t), \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \\ B_0 \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, 0) &+ B_1 \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, t_1) + \dots + B_N \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, T) = \varphi(x), \end{aligned}$$

where $B_k(x) = \exp \left(-i \int_0^{t_k} \operatorname{Im} A_0(\tau, s) d\tau \right)$. In [5], it was proved that the resolving function Q^* of this boundary-value problem satisfies the conditions

$$|Q^*(s, t)| \leq 1 \quad \text{and} \quad \left| \frac{\partial^k Q^*(s, t)}{\partial s^k} \right| \leq C_k (1 + |s|)^{p_k}, \quad s \in \mathbb{R}^n, \quad \tau \in [0, T],$$

i.e., $Q^*(\cdot, t) \in C_{-\infty}^{\infty}$, $t \in [0, T]$. Therefore, $\|A(t, \cdot) - A_0(t, \cdot)\|_{(l)}^{(k)} < M\varepsilon$, $s \in \mathbb{R}^n$, $\tau \in [0, T]$, i.e., $Q(\cdot, t) \in C_{-\infty}^{\infty}$, $t \in [0, T]$. Thus this problem is well posed from S to $C^1([0, T], S)$. The theorem is proved. \square

Corollary 1 yields the following corollary.

Corollary 2 *Problem (3), (4) is also well posed from $C([0, T], S)$ to $C^1([0, T], S)$.*

Example 1 Consider the equation

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = (2t - T)\Delta u(x, t) + c(t)u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, T].$$

In [2], it was shown that there is no well-posed two-point boundary-value problem in S . Consider this equation under the integral boundary condition

$$\int_0^T u(x, t) dt = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Then the boundary value condition is well posed from S to $C^1([0, T], S)$, and

$$Q(s, t) = \frac{\exp\left((Tt - t^2)|s|^2 + \int_0^t c(\tau) d\tau\right)}{\int_0^T \exp\left((Tt - t^2)|s|^2 + \int_0^t c(\tau) d\tau\right) dt}, \quad s \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T].$$

is its resolving function. We use Laplace's method to estimate the denominator [8]. If $f(t)$ and $\sigma(t)$ are real-valued functions, $\sigma''(t_0) < 0$, and σ has a single maximum at the point t_0 , then the asymptotic behavior of the function

$$F(\lambda) = \int_a^b f(t) \exp(\lambda\sigma(t)) dt$$

is following

$$F(\lambda) \sim f(t_0) \exp(\lambda\sigma(t_0)) \sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda\sigma''(t_0)}} \quad \text{as } \lambda \rightarrow +\infty.$$

Therefore,

$$\Delta(s) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{|s|} \exp\left(\int_0^{T/2} c(t) dt\right) \exp\left(\frac{T^2|s|^2}{4}\right) \quad \text{as } |s| \rightarrow +\infty.$$

Hence,

$$Q(s, t) \sim \frac{|s|}{\sqrt{\pi}} \exp\left(\int_{T/2}^t c(\tau) d\tau\right) \exp\left(-\left(t - \frac{T}{2}\right)^2 |s|^2\right) \quad \text{as } |s| \rightarrow +\infty.$$

Thus, $Q(\cdot, t) \in C_{-\infty}^\infty$, $t \in [0, T]$, and the problem is well posed from S to $C^1([0, T], S)$.

Example 2 Consider the more general equation

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a(t)\Delta u(x, t) + \sum_{k=1}^n b_k(t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_k} + c(t)u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T].$$

where $a(t)$, $b_k(t)$, $c(t)$ are real-valued functions continuous on $[0, T]$. Then by theorem 2 the boundary-value problem with the condition

$$\int_0^T u(x_1 - B_1(t), \dots, x_n - B_n(t)) dt = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

where $B_k(t) = \int_0^t b_k(\tau) d\tau$, $1 \leq t \leq n$, is well posed from S to $C^1([0, T], S)$.

3. Conclusion

It is proved that, for pseudo-differential time-dependent equations, well-posed boundary-value problems exist if the boundary conditions have an integral form. Some interesting examples of well-posed boundary-value problems are given.

REFERENCES

1. B.J. Ptashnik. Nonlocal boundary value problems for partial differential equations, [B. J. Ptashnik., V.S. Ilkiv, I.I. Kmit, V.M. Polishchuk]. 2002. K.: Scientific thought, 416 p.
2. A.A. Makarov. The existence of a correct two-point boundary value problem in a layer for systems of pseudo-differential equations, *Differential Equations*, 1994. – V.30, No.1. – P. 144–150.
3. A.A. Makarov. Parabolic boundary value problems for systems of pseudodifferential equations in an infinite layer, *Differential Equations*, 1996. – V.32, No.5. – P. 636–642.
4. L.V. Fardigola. On nonlocal two-point boundary value problems in a layer for equations with variable coefficients, *Siberian Math. J.*, 1997. – V.38, No.2. – P. 424–438.
5. A.A. Makarov, D.A. Levkin. Multipoint boundary value problem for pseudodifferential equations in multilayer, *Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University. Ser. “Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics”*. – 2014. – No.1120. – P. 64–74.
6. L.R. Volevich, S.G. Gindikin. *Distributions and convolution equations*. 1994. M.: Science, 336 p.
7. M.A. Naimark. *Linear differential operators*. 1961. M.: Science, 528 p.
8. M.V. Fedoryuk. *The saddle-point method*. 1977. M.: Science, 366 p.

Макаров О.А., Левкін Д.А. **Крайова задача в шарі для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь з інтегральною умовою.** У даній роботі розглядається крайова задача для еволюційного псевдодиференціального рівняння з інтегральною умовою в просторі Л. Шварца. Ця задача є узагальненням двоточкової і багатоточкової крайових задач для диференціальних рівнянь в частинних похідних, які розглядалися раніше рядом авторів і для яких були отримані умови коректності в різних просторах функцій. Макаровим О.А. в попередніх роботах було доведено існування коректної двоточкової крайової задачі для будь-якого рівняння в частинних похідних зі сталими коефіцієнтами. Пізніше автори даної роботи узагальнили цей результат на багатоточкову крайову задачу в полішарі при додатковій умові трансмісії. Розглянута в цій роботі крайова задача під дією перетворення Фур'є по просторових змінних переходить в крайову задачу для звичайних диференціальних рівнянь, що залежать від параметрів. Отримано умови коректності вихідної крайової задачі в термінах оцінок на розв'язувальну функцію двоїстої задачі. Потім в роботі доводиться, що для будь-якого псевдодиференціального рівняння зазначеного типу існує коректна крайова задача з інтегральною умовою, яка визначається по символу псевдодиференціального оператора. Для цього використовується апроксимаційна крайова задача в полішарі, яка виходить при рівномірній апроксимації неперервного символу псевдодиференціального оператора кусково-постійним символом з відповідною йому багатоточковою крайовою умовою. Така апроксимаційна крайова задача є коректною в просторі Л. Шварца, а значить, і гранична крайова задача з інтегральною умовою також є коректною в цьому просторі. В роботі також наведені приклади таких коректних крайових задач.

Ключові слова: псевдодиференціальні рівняння; крайова задача; перетворення Фур'є, простір Шварца.

Article history: Received: 20 August 2018; Final form: 28 October 2018;

Accepted: 29 October 2018.

Правила для авторів
«Вісника Харківського національного університету
імені В.Н.Каразіна»,
Серія «Математика, прикладна математика і механіка»

Редакція просить авторів при направленні статей керуватися наступними правилами.

1. В журналі публікуються статті, що мають результати математичних досліджень.

2. Поданням статті вважається отримання редакцією файлів статті, анотацій, відомостей про авторів та архіва, що включає LATEX файли статті та файли малюнків.

3. Редакція приймає статті англійською, українською або російською мовами. Стаття має бути оформлена у редакторі LATEX (версія 2e). Файл-зразок оформлення статті можна знайти в редакції журналу та на веб-сторінці (<http://vestnik-math.univer.kharkov.ua>). Стаття повинна починатися з анотацій (обсягом не менш як 1800 знаків кожна), в яких повинні бути чітко сформульовані мета та результати роботи. Анотації повинні бути трьома мовами (англійською, українською та російською): першою повинна стояти анотація тією мовою, якою є основний текст статті. В анотації повинні бути прізвища, ініціали авторів, назва роботи, ключові слова та номер за міжнародною математичною класифікацією (Mathematics Subject Classification 2010). Анотація не повинна мати посилання на літературу та малюнки. На першій сторінці вказується номер УДК класифікації.

4. Список літератури повинен бути оформлений латинським шрифтом. Приклади оформлення списку літератури:

1. А.М. Ляпунов. A new case of integrability of differential equations of motion of a solid body in liquid, Rep. Kharkov Math. Soc., – 1893. – 2. V.4. – P. 81-85.

2. А.М. Ляпунов. The general problem of the stability of motion. 1892. Kharkov Mathematical Society, Kharkov, 251 p.

5. Кожний малюнок повинен бути пронумерований та представлений окремим файлом в одному з форматів: EPS, BMP, JPG. В файлі статті малюнок повинен бути вставлений автором. Під малюнком повинен бути підпис. Назви файлів малюнків повинні починатись з прізвища першого автора.

6. Відомості про авторів повинні містити: прізвища, імена, по батькові, службові адреси та номери телефонів, адреси електронних пошт та інформацію про наукові профайли авторів (orcid.org, www.researcherid.com, www.scopus.com) з відповідними посиланнями. Прохання також повідомити прізвище автора, з яким треба вести листування.

7. Рекомендуємо використовувати останні випуски журналу (vestnik-math.univer.kharkov.ua/currentv.htm) в якості зразка оформлення.

8. У випадку порушення правил оформлення редакція не буде розглядати статтю.

Електронна скринька: vestnik-khnu@ukr.net

Електронна адреса в Інтернеті: <http://vestnik-math.univer.kharkov.ua>

Наукове видання

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна,
Серія “Математика, прикладна математика і механіка”, Том 87

Збірник наукових праць

Англійською, українською, російською мовами

Підписано до друку 30. 10. 2018 р.

Формат 70 × 108/16. Папір офсетний. Друк ризограф.

Ум. друк. арк. 4,3

Обл.– вид. арк. 5,0

Наклад 60 пр. Зам. №

Безкоштовно.

61022, м.Харків, майдан Свободи, 4, Харківський національний університет
імені В.Н.Каразіна. Видавництво.

Надруковано: ХНУ імені В.Н.Каразіна

61022, м.Харків, майдан Свободи, 4, тел. 705-24-32

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.09