Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
Том 86, 2017, с.10–17

Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University
Ser. “Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics”
Vol. 86, 2017, p. 10–17
DOI: 10.26565/2221-5646-2017-86-02

УДК 517.9

Условия единственности положения равновесия задачи Коши для линейных матричных дифференциально-алгебраических уравнений

Д. В. Сысоев

Донбасский государственный педагогический университет,
Славянск, ул. Генерала Батюка, 19, 84116, Украина
chujko-slav@inbox.ru, chujko-slav@ukr.net.

Получены достаточные условия существования единственного положения равновесия задачи Коши для дифференциально-алгебраических уравнений. Предложена конструктивная схема построения положения равновесия задачи Коши в общем случае, когда линейный оператор L, соответствующий однородной части уравнения, не имеет обратного.
Ключевые слова: дифференциально-алгебраические матричные уравнения; псевдообратные матрицы.

Сысоев Д. В. **Умови існування єдиного положення рівноваги задачі Коші для лінійних матричних диференціально-алгебраїчних рівнянь.** Встановлено достатні умови існування єдиного положення рівноваги задачі Коші для диференціально-алгебраїчних рівнянь. Запропонована конструктивна схема побудови положення рівноваги задачі Коші у випадку, коли лінійний оператор L, відповідний однорідної частини рівняння, не має оберненого.
Ключові слова: диференціально-алгебраїчні матричні рівняння; псевдообернена матриця.

D.V. Sysoev. **A condition for the existence of a unique equilibrium position of the Cauchy problem for linear matrix differential-algebraic equations.** Sufficient conditions for the existence of a unique equilibrium position of the Cauchy problem for differential-algebraic equations are proposed. The paper proposes a constructive scheme of the equilibrium position in the Cauchy problem in the general case, when a linear operator L, corresponding to homogeneous of the equation, has no inverse.
Keywords: differential-algebraic matrix equation; pseudoinverse matrix.

2010 Mathematics Subject Classification: 15A24; 34B15; 34C25.

1. Постановка задачи

Исследуем задачу о построении решений [1]

$$Z(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a,b] := \mathbb{C}^1[a,b] \otimes \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

задачи Коши для матричного дифференциально-алгебраического уравнения

$$\mathcal{A}Z'(t) = \mathcal{B}Z(t) + \mathcal{F}(t), \quad Z(a) = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}. \tag{1}$$

Здесь [2, 3]

$$\mathcal{A}Z'(t) := \sum_{i=1}^{p} S_i(t)Z'(t)R_i(t), \quad \mathcal{B}Z(t) := \sum_{j=1}^{q} \Phi_j(t)Z(t)\Psi_j(t)$$

— линейные матричные операторы,

$$S_i(t), \Phi_i(t) \in \mathbb{C}_{\gamma\times\alpha}[a,b], \quad R_i(t), \Psi_j(t) \in \mathbb{C}_{\beta\times\delta}[a,b], \quad F(t) \in \mathbb{C}_{\gamma\times\delta}[a,b]$$

— непрерывные матрицы; кроме того $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{N}$ — произвольные натуральные числа. Матричное дифференциально-алгебраическое уравнение (1) обобщает традиционные постановки, как для матричных дифференциальных уравнений [4, 5], так и для дифференциально-алгебраических уравнений [6, 7, 8]. Изучение краевых задач, как матричных, так и для дифференциально-алгебраических уравнений основано на исследовании алгебраических матричных уравнений, в частности, результаты, полученные для матричного дифференциального уравнения Риккати [4], опираются на исследования матричного алгебраического уравнения типа Ляпунова [9]; результаты статей [2, 3, 5] опираются на исследования матричных уравнений типа Сильвестра и, в частности, уравнения типа Ляпунова [9, 10, 11, 12].

Особенностью задачи Коши (1) для дифференциально-алгебраических уравнений [6, 7, 8] является некорректность ее постановки в классе $\mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a,b]$ при произвольных $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{N}$ и $F(t) \in \mathbb{C}_{\gamma\times\delta}[a,b]$ [13, 14]. Поставим следующую задачу: для каких классов задача Коши (1) имеет единственное решение при произвольных $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{N}$ и $F(t) \in \mathbb{C}_{\gamma\times\delta}[a,b]$. Обозначим

$$\Big\{\Theta_j\Big\}_{j=1}^{\beta\cdot\gamma} \in \mathbb{R}^{\beta\times\gamma}$$

естественный базис [15] пространства $\mathbb{R}^{\beta\times\gamma}$. Задача о нахождении решений матричного дифференциально-алгебраического уравнения (1) приводит к задаче о нахождении вектора $z(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\cdot\beta}[a;b]$, компоненты которого $z_j(t)$ определяют разложение матрицы

$$Z(t) = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \Xi^{(j)} z_j(t), \quad z_j(t) \in \mathbb{C}^1[a;b], \quad j = 1, 2, \ \dots\ , \ \alpha\cdot\beta.$$

Определим оператор $\mathcal{M}[A]: \ \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\cdot n}$ как оператор, который ставит в соответствие матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ вектор-столбец $\mathcal{B} := \mathcal{M}[A] \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$, составленный из n столбцов матрицы A, а также обратный оператор [12]

$$\mathcal{M}^{-1}\Big[\mathcal{B}\Big]: \ \mathbb{R}^{m\cdot n} \to \mathbb{R}^{m\times n},$$

который ставит в соответствие вектору $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$ матрицу $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Линейный дифференциально-алгебраический матричный оператор $\mathcal{A}Z'(t)$ по определению представим в виде

$$\mathcal{A}Z'(t) = \sum_{j=1}^{\alpha\beta} \mathcal{A}\ \Xi^{(j)}(t) z_j'(t),$$

при этом

$$\mathcal{M}\Big[\mathcal{A}Z'(t)\Big] = \Omega(t)\cdot z'(t), \quad \Omega(t) := \Big[\Omega_j(t)\Big]_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \in \mathbb{R}^{\gamma\cdot\delta\times\alpha\cdot\beta},$$

где

$$\Omega_j(t) = \mathcal{M}\left[\mathcal{A}\ \Xi^{(j)}(t)\right], \quad j = 1, 2, \ \dots\ , \ \alpha\cdot\beta.$$

Аналогично

$$\mathcal{M}\Big[\mathcal{B}Z(t)\Big] = \Theta(t)\cdot z(t), \quad \Theta(t) := \Big[\Theta_j(t)\Big]_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \in \mathbb{R}^{\gamma\cdot\delta\times\alpha\cdot\beta}, \quad \Theta_j(t) = \mathcal{M}\left[\mathcal{B}\ \Xi^{(j)}(t)\right].$$

Таким образом, задача о построении решений дифференциально-алгебраического уравнения (1) приведена к задаче о нахождении решений

$$z(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\cdot\beta\times 1}[a; b]$$

традиционного дифференциально-алгебраического уравнения [6, 7]

$$\Omega(t)\cdot z'(t) = \Theta(t)\cdot z(t) + \mathcal{F}(t), \quad \mathcal{F}(t) := \mathcal{M}\Big[F(t)\Big]. \tag{2}$$

2. Основной результат

При условии [2, 3, 5]

$$P_{\Omega^*(t)}\Theta(t) = 0, \quad P_{\Omega^*(t)}\mathcal{F}(t) = 0 \tag{3}$$

система (2) разрешима относительно производной

$$\frac{dz}{dt} = \Omega^+(t)\Theta(t)z + \mathfrak{F}(t, \varphi(t)), \quad \mathfrak{F}(t, \varphi(t)) := \Omega^+(t)\mathcal{F}(t) + P_{\Omega_r}(t)\varphi(t).$$

Здесь $P_{\Omega_r}(t)$ — $(\alpha\cdot\beta\times r)$-матрица, составленная из r линейно-независимых столбцов $(\alpha\cdot\beta\times\alpha\cdot\beta)$-матрицы-ортопроектора $P_\Omega(t):\mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}\to\mathbb{N}(\Omega(t))$. В случае

$$A:=\Omega^+(t)\Theta(t),\ f:=\Omega^+(t)\mathcal{F}(t),\ P_{\Omega_r}(t)=\mathrm{const} \tag{4}$$

система (2) приводится к виду

$$z'=Az+P_{\Omega_r}c_r+f,\quad c_r\in\mathbb{R}^r. \tag{5}$$

Таким образом, при условиях (3) и (4) система (2) имеет положения равновесия $z=\mathrm{const}$, для нахождения которых приходим к уравнению

$$Q\,c+f=0,\quad Q:=\begin{pmatrix} A & P_{\Omega_r}\end{pmatrix},\quad c:=\mathrm{col}\,(z,\ c_r)\in\mathbb{R}^{\alpha\beta+r}. \tag{6}$$

При условии $P_{Q^*}f=0$ (и только при нем) уравнение (6) разрешимо:

$$z=\begin{pmatrix} I_{\alpha\beta} & O\end{pmatrix}\big(P_{Q_\rho}c_\rho-Q^+f\big),\ \ c_r=\begin{pmatrix} O & I_r\end{pmatrix}\big(P_{Q_\rho}c_\rho-Q^+f\big).$$

Здесь P_{Q_ρ} — $((\alpha\beta+r)\times\rho)$-матрица, составленная из ρ линейно-независимых столбцов $((\alpha\beta+r)\times(\alpha\beta+r))$-матрицы-ортопроектора $P_Q:\mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta+r}\to\mathbb{N}(Q)$. Таким образом, при условиях (3) и (4) система (2) имеет положения равновесия

$$z=D\,c_\rho+K[f],\ \ D:=\begin{pmatrix} I_{\alpha\beta} & O\end{pmatrix}P_{Q_\rho}\in\mathbb{R}^{(\alpha\cdot\beta+r)\times\rho},\ \ K[f]:=-\begin{pmatrix} I_{\alpha\beta} & O\end{pmatrix}Q^+f,$$

определяющие решение задачи Коши (1) в случае

$$D\,c_\rho+K[f]=\mathcal{M}(\mathfrak{A}).$$

Последнее уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда

$$P_{D^*}\Big\{\mathcal{M}(\mathfrak{A})-K[f]\Big\}=0. \tag{7}$$

Здесь P_{D^*} — $(\alpha\beta\times\alpha\beta)$-матрица-ортопроектор $P_{D^*}:\mathbb{R}^{\alpha\beta}\to\mathbb{N}(D)$. Итак, при условиях (3), (4) и (7) задача Коши (1) имеет единственное положение равновесия

$$Z(c_r)=\mathcal{M}^{-1}\Big[DD^+\mathcal{M}(\mathfrak{A})\Big]+\mathcal{M}^{-1}\Big\{P_{D^*}K[f]\Big\}.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 0.1 *При условиях (3), (4) и (7) задача Коши (1) имеет единственное положение равновесия*

$$Z(c_r)=W(\mathfrak{A})+K[\mathcal{F}(t)],$$

представленное суммой решения однородного $F(t)=0$ уравнения (1)

$$Z(c_r)=W(\mathfrak{A}):=\mathcal{M}^{-1}\Big[DD^{+}\mathcal{M}(\mathfrak{A})\Big]$$

и частного решения неоднородной задачи Коши (1)

$$Z(c_r)=K[\mathcal{F}(t)]:=\mathcal{M}^{-1}\Big\{P_{D^*}K[f]\Big\}.$$

Пример 0.1 *Условиям доказанной теоремы 0.1 удовлетворяет матричная задачи Коши*

$$\mathcal{A}Z'(t)=\mathcal{B}Z(t)+\mathcal{F}(t),\quad Z(0)=\mathfrak{A},\quad \mathfrak{A}\in\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}; \tag{8}$$

здесь

$$\mathcal{A}Z'(t)=\sum_{i=1}^{2}\mathcal{S}_i\,Z'(t)\,\mathcal{R}_i,\quad \mathcal{S}_1:=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\ \ \mathcal{S}_2:=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{R}_1:=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \mathcal{R}_2:=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\quad \Psi_1:=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B}Z(t):=\sum_{i=1}^{2}\Phi_i\,Z'(t)\,\Psi_i,\quad \Phi_1:=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \Phi_2:=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\Psi_2:=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix},\quad \mathfrak{A}:=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5&5&-1\\5&5&-2\end{pmatrix}^*,\quad \mathcal{F}(t):=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Естественный базис пространства $\mathbb{R}^{3\times 2}$ составляют матрицы

$$\Xi_1:=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}^*,\ \Xi_2:=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}^*,\ \dots,\ \Xi_6:=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^*.$$

Ключевые при исследовании уравнения (8) матрицы имеют вид

$$\Omega:=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\end{pmatrix}^*$$

и

$$\Theta := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^* ;$$

при этом условие (3) выполнено: $P_{\Omega^*(t)}\Theta(t) = 0,\ P_{\Omega^*(t)}\mathcal{F}(t) = 0$, кроме того

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ P_{\Omega_r}(t) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— константы, следовательно, условие (4) также выполнено. Матрицы

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{D^*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

а также оператор Грина задачи Коши для системы (5)

$$K[f] = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

позволяют проверить условие (7). Поскольку все требования доказанной теоремы 0.1 выполнены, задача Коши (8) имеет единственное положение равновесия

$$Z(c_r) = W(\mathfrak{A}) + K[\mathcal{F}(t)],$$

где

$$W(\mathfrak{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K[\mathcal{F}(t)] = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Доказанная теорема может быть использована при решении дифференциальных уравнений Риккати и Бернулли [4], при решении линейных краевых задач для матричных дифференциальных уравнений [3, 5, 16], а также в теории устойчивости движения [17, 18]. Полученные результаты аналогично [19] могут быть перенесены на обобщенные уравнения, содержащие неизвестные матрицы различных размерностей.

Acknowledgement. Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований. Номер государственной регистрации 0115U003182.

ЛИТЕРАТУРА

1. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2-th edition). – Berlin; Boston: De Gruyter, 2016. – 298 p.

2. Чуйко С.М. Обобщенное матричное дифференциально-алгебраическое уравнение // Український математичний вісник, 2015. – **12**, №1. – С. 11 – 26.

3. Chuiko S.M. The Green's operator of a generalized matrix linear differential-algebraic boundary value problem // Siberian Mathematical Journal, 2015. – **56**, №4. – P. 752–760.

4. Boichuk A.A., Krivosheya S.A. A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equations // Differential Equations, 2001. – **37**, №4. – P. 464–471.

5. Chuiko S.M. Generalized Green Operator of Noetherian boundary-value problem for matrix differential equation // Russian Mathematics, 2016. – **60**, №8. – P. 64–73.

6. Campbell S.L. Singular Systems of differential equations. – San Francisco – London – Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program, 1980. – 178 p.

7. Чистяков В.Ф. Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. – Новосибирск; Наука, 1996. – 280 с.

8. Boichuk A.A., Pokutnyi A.A., Chistyakov V.F. Application of perturbation theory to the solvability analysis of differential algebraic equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2013. – **53**. – №6. – P. 777 – 788.

9. Boichuk A.A., Krivosheya S.A. Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type // Ukrainian Mathematical Journal, 1998. – **50**, №8. – P. 1162 – 1169.

10. Чуйко С.М. О решении матричных уравнений Ляпунова // Вісник Харківського національного університету ім. В.Н.Каразіна. Серія «Математика, прикладна математика і механіка». – № 1120, 2014. – С. 85–94.

11. Беллман Р. Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1969. – 367 с.

12. Чуйко С.М. Элементы теории линейных матричных уравнений. — Славянск: Изд. Б.И. Маторина, 2017. — 164 с.

13. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 288 с.

14. Chuiko S.M. On the regularization of a linear Fredholm boundary-value problem by a degenerate pulsed action // Journal of Mathematical Sciences, 2014. – **197**, №1. – P. 138–150.

15. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 318 с.

16. Chuiko S. Weakly nonlinear boundary value problem for a matrix differential equation // Miskolc Mathematical Notes, 2016. – **17**, №1. – P. 139–150.

17. Коробов В.И., Бебия М.О. Стабилизация одного класса нелинейных систем, неуправляемых по первому приближению // Доп. НАН України, 2014. – №2. – С. 20–25.

18. Бебия М.О. Стабилизация систем со степенной нелинейностью // Вісник Харківського національного університету ім. В.Н.Каразіна. Серія «Математика, прикладна математика і механіка», 2014. – №1120, Вип. 69. – С. 75–84.

19. Чуйко С.М. О решении билинейного матричного уравнения // Чебышевский сборник, 2016. – **17**, Вып. 2. – С. 196–205.

Статья получена: 22.02.2017; окончательный вариант: 10.09.2017;
принята: 12.10.2017.