Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.948 № 826, 2008, с.3–37

Применение подхода А.Н. Колмогорова при изучении случайных последовательностей, связанных с ортогональными многочленами

С.М. Загороднюк, Л. Клёц

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, Украина
Лейпцигский университет, Германия

Следуя идеям А.Н. Колмогорова мы рассматриваем случайные последовательности, как элементы абстрактного комплексного гильбертова пространства. Мы изучаем классы последовательностей, связанные с системами ортогональных многочленов на вещественной оси и на единичной окружности (полиномиальные и P-стационарные последовательности). Введено понятие канонического интегрального представления для произвольной последовательности в гильбертовом пространстве. Используя методы теории операторов и теории ортогональных многочленов мы устанавливаем ряд результатов, аналогичных результатам теории стационарных последовательностей (разностные уравнения на корреляционную функцию, разложение спектральной функции последовательности в ряд, законы больших чисел и др.)
2000 Mathematics Subject Classification 42C05, 33C45, 60G.

1. Введение

Теория стационарных случайных последовательностей в абстрактной постановке была развита А.Н. Колмогоровым [1]. Обозначим $L_2 = L_2(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ стандартное гильбертово пространство случайных величин $\xi(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$ с конечным вторым моментом и нулевым математическим ожиданием (здесь Ω есть пространство элементарных событий, $\mathfrak{A}$ есть σ-алгебра событий и P обозначает вероятность). А.Н. Колмогоров рассматривал последовательности в абстрактном гильбертовом пространстве H, которое, в частности, могло быть пространством $L_2(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ элементов H называется стационарной, если корреляционная функция $K_{n,m} :=< x_n, x_m >$ зависит от разности $n - m$ (здесь $< \cdot, \cdot >$ обозначает скалярное произведение в H). К наиболее важным результатам теории А.Н. Колмогорова относятся теорема о спектральном представлении стационарной случайной последовательности и теорема о спектральном представлении корреляционной функции. А именно, справедливы следующие разложения:

$$x_n = U^n x_0 = \int_0^{2\pi} e^{in\theta} dF_\theta x_0, \qquad n \in \mathbb{Z}; \tag{1}$$

$$K_{n,m} = \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d < F_\theta x_0, x_0 >, \qquad n, m \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

где $\{F_\theta\}_{\theta \in [0,2\pi]}$ - ортогональное разложение единицы некоторого унитарного оператора U в H (обычно интегралы принято брать в пределах $[-\pi, \pi]$, но нам удобнее приведенное выше представление).

Используя такой подход, А.Н. Колмогоров изучал также некоторые нестационарные последовательности в гильбертовом пространстве (см. [2, 3]). Некоторые результаты А.Н. Колмогорова были обобщены Ю.А. Розановым на случай многомерных стационарных последовательностей [4]. Отметим, что кривые в гильбертовом пространстве изучались М.Г. Крейном [5, 6].

Обобщением представления (1) является разложение вида

$$x_n = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(\lambda) dZ_\lambda, \ n \in \mathbb{Z}, \tag{3}$$

где φ_n - некоторые комплекснозначные функции на $\mathbb{R}$, Z - некоторая мера на $\mathbb{R}$, а интеграл понимают в том или ином смысле (см. обзорную работу А.М. Яглома [7]). В том случае, когда мера Z имеет ортогональные приращения, К. Карунен показал, что наличие представления (3) эквивалентно наличию представления для корреляционной функции вида [8]

$$K_{n,m} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(\lambda) \overline{\varphi_m(\lambda)} dF_\lambda, \ n, m \in \mathbb{Z}, \tag{4}$$

где F - неотрицательная мера на $\mathbb{R}$ (У К. Карунена индекс n меняется в произвольном множестве T). В случае произвольных меры Z, пространства, по которому интегрируют, и индекса n, который меняется в произвольном множестве T, аналогичный результат также имеет место (см. [7]).

Отметим, что разложение вида (3) с непрерывно меняющимся индексом n в интервале (a, b) является интегральным каноническим представлением случайной функции x_n. Теория канонических представлений случайных функций развивалась В.С. Пугачевым (см. [9]). В случае дискретного параметра n нетрудно показать, что для любой последовательности в H существует представление вида (3) (см. ниже).

Используя теорию неунитарных и несамосопряженных операторов, нестационарные последовательности и кривые в гильбертовом пространстве изучали А.А. Янцевич, К.П. Кирчев, В.А. Золотарев и их ученики (см., например, [10, 11, 12, 13]).

Во втором параграфе мы изучаем последовательности в гильбертовом пространстве H, допускающие следующее представление:

$$x_n = p_n(A) x_0 = \int_{\mathbb{R}} p_n(\lambda) dE_\lambda x_0, \ n \in \mathbb{Z}_+, \tag{5}$$

где $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ есть ортогональное разложение единицы некоторого самосопряженного оператора A в H, а $\{p_n\}_0^\infty$ являются ортогональными многочленами на $\mathbb{R}$. Подобные последовательности (полиномиальные последовательности) были введены в работах [14, 15].

Важными результатами в теории вероятностей являются законы больших чисел для последовательностей случайных величин. Пусть $x_1, x_2, ...,$ - случайные величины. Если при некоторых постоянных $a_1, b_1, a_2, b_2, ...,$ предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} \sum_1^n (x_j - a_j) =: x \tag{6}$$

существует в смысле какой-нибудь сходимости, то говорят, что последовательность $x_1, x_2, ...,$ удовлетворяет закону больших чисел [16]. В том случае, когда случайные величины x_j взаимно независимы и $b_n \to \infty$ при $n \to \infty$, случайная величина x есть константа с вероятностью единица (относительно случая независимых x_j см. монографию В.В. Петрова [17] и ссылки в ней). Относительно законов больших чисел для случая зависимых x_j следует указать на теорему А.А. Маркова [18]. Она гласит, что закон больших чисел (в смысле сходимости средних арифметических случайных величин) применим к зависимым величинам $x_1, x_2, ..., x_n, ...,$ если, при возрастании n, $\frac{B_n}{n^2}$ стремится к нулю, где B_n есть дисперсия суммы $x_1 + x_2 + ... + x_n$. В важнейших случаях эта теорема является и обратимой, т.е. закон больших чисел не может быть применим к величинам $x_1, x_2, ..., x_n, ...,$ если, при возрастании n, $\frac{B_n}{n^2}$ не стремится к нулю. Некоторые достаточные условия для справедливости закона больших чисел в случае зависимых случайных величин появлялись в [19], см. также [20]. Во втором параграфе нами приведен ряд законов больших чисел для полиномиальных последовательностей. Эти соотношения можно также назвать эргодическими, по аналогии с эргодической теоремой для стационарных последовательностей.

Условие стационарности последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ в гильбертовом пространстве H, как легко видеть, эквивалентно выполнению следующего разностного соотношения для корреляционной функции:

$$K_{n+1,m+1} = K_{n,m}, \qquad n, m \in \mathbb{Z}. \tag{7}$$

Для полиномиальных последовательностей это условие заменяется следующим разностным соотношением:

$$\frac{1}{a_n}\left(c_{n-1}K_{n-1,m} - b_nK_{n,m} + c_nK_{n+1,m}\right) =$$
$$= \frac{1}{a_m}\left(c_{m-1}K_{n,m-1} - b_mK_{n,m} + c_mK_{n,m+1}\right), \qquad n, m \in \mathbb{Z}_+, \tag{8}$$

где $a_n, c_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$, и $K_{-1,m} = K_{n,-1} = 0$, $c_{-1} = 0$.

Как показано в пункте 2.2, выполнение условия (8) является характеристическим свойством полиномиальной последовательности.

Заметим, что описанные выше результаты о полиномиальных последовательностях появились ранее в работе [15], где разностное соотношение для корреляционной функции было менее общего вида. Еще раньше часть результатов была анонсирована в [14]. Однако в настоящей работе мы устранили пробелы в доказательствах и некоторые ошибки, имевшиеся в упомянутых работах.

В пункте 2.3 изучается вопрос о восстановлении спектральной функции $< E_\lambda x_0, x_0 >$ полиномиальной последовательности по элементам последовательности.

Вернемся к спектральному разложению (1) стационарной последовательности. Пусть $H = L_2(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Если случайные величины $E_\lambda x_0$ являются вещественными и интеграл можно брать в пределах от 0 до π, то вещественная часть такой последовательности будет полиномиальной (с многочленами Чебышева 1-го рода под интегралом). Заметим также, что если для полиномиальной последовательности в $H = L_2(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ величины $E_\lambda x_0$ из представления (5) являются вещественными, то и последовательность будет вещественной (если только не нормировать многочлены p_n комплексными числами). Поэтому можно предположить, что полиномиальные последовательности могут найти практическое применение при изучении вещественных случайных последовательностей.

В параграфе 3 мы определяем Р-стационарные последовательности в гильбертовом пространстве H. Эти последовательности допускают следующее представление:

$$x_n = p_n(U)x_0 = \int_0^{2\pi} p_n(e^{i\theta}) dF_\theta x_0, \ n \in \mathbb{Z}_+, \tag{9}$$

где $\{F_\theta\}_{\theta\in[0,2\pi]}$ есть ортогональное разложение единицы некоторого унитарного оператора U в H, а $\{p_n\}_0^\infty$ являются ортогональными многочленами на единичной окружности.

Покажем, что любая последовательность элементов гильбертова пространства H допускает представление вида (9), но при этом многочлены могут быть не ортогональны (и произвольной степени). Прежде всего перенумеруем (если это необходимо) заданную последовательность с помощью целого неотрицательного индекса. Не ограничивая общности можно считать, что элементы полученной последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ линейно независимы (поскольку представление вида (9) для зависимых элементов будет следовать из представления для независимых элементов). Проводя процесс ортогонализации Грама-Шмидта получаем ортонормированную последовательность $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$. Заметим, что в силу построения $\mathrm{Lin}\{x_n\}_{n=0}^r = \mathrm{Lin}\{\varepsilon_n\}_{n=0}^r$ $(r \in \mathbb{Z}_+)$. Обозначим $H_x = \mathrm{span}\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ и определим изометрический оператор V в H_x равенствами

$$V\varepsilon_n = \varepsilon_{n+1}, \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{10}$$

Оператор V является хорошо известным оператором сдвига и допускает унитарное расширение W в пространстве $H_1 \supset H_x$. Из равенств (10) непосредственно видно, что

$$\varepsilon_n = W^n \varepsilon_0, \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{11}$$

Следовательно, для элементов последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ справедливы равенства

$$x_n = p_n(W)x_0, \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{12}$$

где p_n есть многочлен степени n, что и требовалось показать.

Для произвольной последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ гильбертова пространства H представление вида (9) с необязательно ортогональными многочленами p_n мы будем называть *каноническим интегральным представлением.*

Очевидно, что с помощью линейных операций можно всегда перейти от канонического интегрального представления к представлению (9) с ортогональными многочленами и использовать преимущества, которые дает ортогональность. В частности, в пункте 3.2 показано, что при некоторых условиях можно определить спектральную функцию стационарной последовательности, используя лишь элементы последовательности с неотрицательными индексами.

В пункте 3.1 приведены равенства, которым удовлетворяет корреляционная функция P-стационарной последовательности. В том случае, когда задана последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ гильбертова пространства H с линейно независимыми элементами, эти равенства являются достаточными, для того, чтобы последовательность была P-стационарной. В пункте 3.2 (помимо упомянутого выше) изучается вопрос разложения спектральной функции P-стационарной последовательности в ряд по элементам последовательности.

Обозначения. Как обычно, мы обозначаем $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ множества комплексных, вещественных, целых и натуральных чисел, соответственно, а также $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Посредством $< \cdot, \cdot >_H$, $|| \cdot ||_H$ мы обозначаем скалярное произведение и норму в гильбертовом пространстве H. Если это не приводит к недоразумению, индекс H мы не пишем. Для линейного обратимого оператора A в H, обозначаем A^{-1} обратный оператор. Посредством $\mathrm{Lin}\, M$ и $\mathrm{span}\, M$ обозначены линейная оболочка и замкнутая линейная оболочка элементов множества M в некотором гильбертовом пространстве, соответственно.

2. Полиномиальные последовательности

2.1 Определение полиномиальной последовательности

Рассмотрим стационарную последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ в гильбертовом пространстве H. Предположим, что она допускает разложение (1), где интеграл берется в пределах $[0, \pi]$. Рассмотрим четную и нечетную части последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$:

$$\widehat{x}_n = \frac{x_n + x_{-n}}{2} = \int_0^\pi \cos(n\theta) dF_\theta x_0, \qquad n \in \mathbb{Z}; \tag{13}$$

$$\widetilde{x}_n = \frac{x_n - x_{-n}}{2} = i\int_0^\pi \sin(n\theta)dF_\theta x_0, \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{14}$$

В случае, когда $H = L_2(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ и $F_\theta x_0$ является вещественным случайным процессом (по θ), последовательности $\widehat{x}_n$ и $\frac{1}{i}\widetilde{x}_n$ являются вещественной и мнимой частью последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, соответственно. Не ограничивая общность, мы можем рассматривать последовательности из (13),(14) лишь для неотрицательных индексов ($n \in \mathbb{Z}_+$). После замены переменной $\theta = \arccos\lambda$ мы получим

$$\widehat{x}_n = \int_{-1}^1 \cos(n\arccos\lambda)dE_\lambda x_0, \qquad n \in \mathbb{Z}_+; \tag{15}$$

$$\widetilde{x}_n = i\int_{-1}^1 \sin(n\arccos\lambda)dE_\lambda x_0, \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{16}$$

где $E_\lambda := F_{\cos\theta}$.

Функции, находящиеся под интегралом в (15), являются многочленами Чебышева 1-го рода $T_n(\lambda)$. Они ортогональны на отрезке $[-1,1]$ с весом $\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}$. Обобщение представления (15) приводит нас к следующему определению (см. [14, с.31],[15, с.62-63]).

Определение 1 *Последовательность* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *элементов гильбертова пространства* H *называется* **полиномиальной** *или* **Р-последовательностью***, если* x_n *допускает следующее представление:*

$$x_n = p_n(A)x_0 = \int_{\mathbb{R}} p_n(\lambda)dE_\lambda x_0, \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{17}$$

где $\{p_n(\lambda)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *является системой ортогональных многочленов на вещественной оси,* A *есть некоторый самосопряженный оператор в* H *и* $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ *есть его ортогональное разложение единицы (не обязательно непрерывное слева или справа).*

Напомним (см. [21],[22]), что набор многочленов $\{p_n(\lambda)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ (p_n имеет степень n и положительный старший коэффициент) является системой ортогональных многочленов на вещественной оси относительно неубывающей функции $\sigma(\lambda)$, если выполнены соотношения:

$$\int_{\mathbb{R}} p_n(\lambda)p_m(\lambda)d\sigma(\lambda) = A_n\delta_{n,m}, \quad A_n > 0, \qquad n,m \in \mathbb{Z}_+. \tag{18}$$

В дальнейшем мы будем обозначать $L_2([a,b], d\sigma)$ пространство измеримых квадратично суммируемых функций на $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ относительно меры $d\sigma$. В том случае, когда носитель меры σ сосредоточен на отрезке $[a,b] \subseteq \mathbb{R}^1$ и σ

[1] Здесь и далее в работе при обозначении некоторого вещественного отрезка $[a,b]$ подразумевается исключение из него бесконечных концов, если a и/или b не являются конечными.

абсолютно непрерывна на $[a,b]$, мы обозначаем $h(\lambda)=\sigma'(\lambda)$, п.в. на $[a,b]$ и пишем $L_2([a,b],h)$ вместо $L_2([a,b],d\sigma)$. При этом функцию $h(\lambda)$ будем называть весом. Введем также следующее обозначение для ортонормированных многочленов: $\widehat{p}_n(\lambda):=\frac{p_n(\lambda)}{\|p_n(\lambda)\|_{L_2([a,b],h)}}$.

2.2 Характеристическое свойство полиномиальной последовательности в терминах разностных соотношений для корреляционной функции

По аналогии со стационарным случаем, для произвольной последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ элементов гильбертова пространства H функцию $K_{n,m}=<x_n,x_m>$ $(n,m\in\mathbb{Z}_+)$ называем корреляционной функцией последовательности. Имеет место следующее характеристическое свойство полиномиальной последовательности:

Теорема 1 *Пусть задана последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ элементов гильбертова пространства H. Эта последовательность является полиномиальной в некотором гильбертовом пространстве $\widetilde{H}\supseteq H$ тогда и только тогда, когда корреляционная функция $K_{n,m}$ последовательности удовлетворяет следующим разностным соотношениям:*

$$\frac{1}{a_n}\left(c_{n-1}K_{n-1,m}-b_nK_{n,m}+c_nK_{n+1,m}\right)=$$

$$=\frac{1}{a_m}\left(c_{m-1}K_{n,m-1}-b_mK_{n,m}+c_mK_{n,m+1}\right),\qquad n,m\in\mathbb{Z}_+,\tag{19}$$

где $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+},\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ - некоторые последовательности положительных чисел, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ - некоторая последовательность вещественных чисел, $c_{-1}=0$, и $K_{-1,m}=K_{n,-1}=0$ $(n,m\in\mathbb{Z}_+)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ элементов гильбертова пространства H является полиномиальной в некотором гильбертовом пространстве $\widetilde{H}\supseteq H$. Из представления (17) следует представление для корреляционной функции последовательности:

$$K_{n,m}=\int_{\mathbb{R}}p_n(\lambda)p_m(\lambda)d<E_\lambda x_0,x_0>_{\widetilde{H}},\qquad n,m\in\mathbb{Z}_+.\tag{20}$$

Заметим, что ортогональные многочлены на вещественной оси удовлетворяют соотношениям (см. [23, с.149])

$$\frac{1}{a_n}\left(c_{n-1}p_{n-1}(\lambda)-b_np_n(\lambda)+c_np_{n+1}(\lambda)\right)=\lambda p_n(\lambda),\qquad n\in\mathbb{Z}_+,\tag{21}$$

где $c_n>0,\ a_n>0,\ b_n\in\mathbb{R}\ (n\in\mathbb{Z}_+),\ c_{-1}=0,\ p_{-1}=0$. Подставляя представление (20) в левую или правую часть равенства (19) с коэффициентами из (21) и используя (21) мы получим $\int_{\mathbb{R}} \lambda p_n(\lambda) p_m(\lambda) d < E_\lambda x_0, x_0 >_{\widetilde{H}}$ в обоих случаях.

Достаточность. Пусть задана последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ в гильбертовом пространстве H, для которой выполняется соотношение (19). Введем в рассмотрение разностный оператор $\mathbf{L}$, действующий на последовательности комплексных чисел:

$$(\mathbf{L}u)_j = \sum_{a=-1}^{1} \beta_{j,a} u_{j+a}, \tag{22}$$

где $u = (u_0, u_1, u_2, ...)$ - последовательность комплексных чисел, $\beta_{k,-1} = \frac{c_{k-1}}{a_k}$, $\beta_{k,0} = -\frac{b_k}{a_k}$, $\beta_{k,1} = \frac{c_k}{a_k}$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Определим также оператор $(\overline{\mathbf{L}}u)_j = \sum_{a=-1}^{1} \overline{\beta}_{j,a} u_{j+a}$. Условие (19) может быть записано в форме

$$(\mathbf{L}_m K_{n,m})_n = (\overline{\mathbf{L}^n} K_{n,m})_m, \qquad n, m \in \mathbb{Z}_+, \tag{23}$$

где $\mathbf{L}_m$ означает применение оператора $\mathbf{L}$ к m-му столбцу матрицы $(K_{n,m})_{n,m\in\mathbb{Z}_+}$, а $\mathbf{L}^n$ означает применение оператора $\mathbf{L}$ к n-й строке матрицы $(K_{n,m})_{n,m\in\mathbb{Z}_+}$. Согласно теоремы Ю.М. Березанского (см. [24, Теорема 5.2, с.723]) мы получаем, что для корреляционной функции $K_{n,m}$ существует представление:

$$K_{n,m} = \int_{\mathbb{R}} X_{1,n}(\lambda) \overline{X_{1,m}(\lambda)} d\sigma_1(\lambda), \qquad n, m \in \mathbb{Z}_+, \tag{24}$$

где $\sigma_1(\lambda)$ является некоторой неубывающей функцией на $\mathbb{R}$, а интеграл существует в смысле $L_2((-\infty, \infty), d\sigma_1)$. Здесь $(X_{1,0}(\lambda), X_{1,1}(\lambda), X_{1,2}(\lambda), ...)$ является решением разностного уравнения

$$(\mathbf{L}u)_j - \lambda u_j = 0, \qquad j \in \mathbb{Z}_+, \tag{25}$$

с начальным условием $X_{1,0} = 1$. Положим $p_n(\lambda) := X_{1,n}(\lambda)$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Из (25) следует, что выполнено (21). По индукции заключаем, что $\deg p_n = n$ и многочлены p_n имеют вещественные коэффициенты ($n \in \mathbb{Z}_+$). Из известной теоремы [23, Теорема 5.2.1, с.147] следует, что многочлены p_n ортогональны на вещественной оси, т.е. выполнено (18) с некоторой неубывающей функцией $\sigma(\lambda)$. Используя многочлены p_n перепишем (24) в форме

$$K_{n,m} = \int_{\mathbb{R}} p_n(\lambda) p_m(\lambda) d\sigma_1(\lambda), \qquad n, m \in \mathbb{Z}_+. \tag{26}$$

Заметим, что $+\infty > ||x_0||_H^2 = K_{0,0} = \int_{\mathbb{R}} d\sigma_1(\lambda) = \sigma_1(+\infty) - \sigma_1(-\infty)$. Положим $C := \sigma_1(+\infty) - \sigma_1(-\infty)$. Если $C = 0$, то $\sigma_1 \equiv \mathrm{const}$ и $K_{n,m} \equiv 0$. Следовательно, $||x_n||^2 = K_{n,n} = 0$ и мы получим $x_n \equiv 0$. В этом случае можно взять любую систему ортогональных многочленов на вещественной оси, любой самосопряженный оператор A, и при этом (17) будет выполнено. Следовательно, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ будет полиномиальной в этом случае.

Пусть $C > 0$. Если $\sigma_1(-\infty) = \pm\infty$, то $\sigma_1(+\infty) = \pm\infty$, и интеграл в (26) не имеет смысла. Значит $\sigma_1(-\infty)$ конечно. Положим

$$\widetilde{\sigma}_1(\lambda) := \frac{\sigma(\lambda) - \sigma(-\infty)}{C}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{27}$$

Можно рассматривать эту функцию, как неубывающую операторнозначную функцию. Ее значением при $\lambda \in \mathbb{R}$ является оператор умножения на $\sigma_1(\lambda)$ в одномерном гильбертовом пространстве $H^1 := \mathbb{C}$:

$$\widetilde{\sigma}_1(\lambda)x := \widetilde{\sigma}_1(\lambda) \cdot x, \qquad x \in H^1. \tag{28}$$

Применяя теорему М.А. Наймарка [25, Теорема 2, с.271] мы заключаем, что существует гильбертово пространство $\widetilde{H} \supseteq H^1$ и ортогональное разложение единицы $\widetilde{E}_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, в $\widetilde{H}$, такие, что

$$\widetilde{\sigma}_1(\lambda)x = P\widetilde{E}_\lambda x, \qquad x \in H^1,$$

где P является оператором ортогонального проектирования на H^1 в $\widetilde{H}$. Мы можем записать $\sigma_1(\lambda) = C\widetilde{\sigma}_1(\lambda) + \sigma_1(-\infty) =< \widetilde{\sigma}_1(\lambda)\sqrt{C}, \sqrt{C} >_{H^1} +\sigma_1(-\infty) = < \widetilde{E}_\lambda\sqrt{C}, \sqrt{C} >_{\widetilde{H}} +\sigma_1(-\infty)$. Значит

$$\sigma_1(\lambda) =< \widetilde{E}_\lambda \widetilde{x}_0, \widetilde{x}_0 >_{\widetilde{H}} +\sigma_1(-\infty), \quad \widetilde{x}_0 := \sqrt{C} \in \widetilde{H}. \tag{29}$$

Положим $\widetilde{x}_n := \int_{\mathbb{R}} p_n(\lambda) d\widetilde{E}_\lambda \widetilde{x}_0$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Это определение корректно, поскольку $\int_{\mathbb{R}} |p_n(\lambda)|^2 d < \widetilde{E}_\lambda \widetilde{x}_0, \widetilde{x}_0 >= \int_{\mathbb{R}} |p_n(\lambda)|^2 d\sigma_1(\lambda) = K_{n,n} < \infty$, что следует из (26). Определим оператор $\widetilde{A} = \int_{\mathbb{R}} \lambda d\widetilde{E}_\lambda$. С его помощью можно записать равенство

$$\widetilde{x}_n = p_n(\widetilde{A})\widetilde{x}_0, \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{30}$$

Из соотношений (26),(29) и (30) заключаем, что

$$< \widetilde{x}_n, \widetilde{x}_m >_{\widetilde{H}} = K_{n,m}, \qquad n, m \in \mathbb{Z}_+. \tag{31}$$

Рассмотрим множества $D := \mathrm{span}\{x_0, x_1, x_2, ...\}$, $\widetilde{D} := \mathrm{span}\{\widetilde{x}_0, \widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, ...\}$, $M := \mathrm{Lin}\{x_0, x_1, x_2, ...\}$. Определим отображение V, $V : M \to \widetilde{D}$:

$$x = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k x_k \to Vx := \sum_{k=0}^{n} \gamma_k \widetilde{x}_k, \qquad \gamma_k \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{Z}_+.$$

Покажем, что такое определение корректно. Допустим, что есть два различных представления элемента $x \in M$:

$$x = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k x_k,\ x = \sum_{k=0}^{n} \gamma'_k x_k,$$

(верхние индексы суммирования можно считать одинаковыми, добавив в случае необходимости слагаемые с нулевыми γ_k). Тогда $\sum_{k=0}^{n} (\gamma_k - \gamma'_k) x_k = 0$ и значит $|| \sum_{k=0}^{n} (\gamma_k - \gamma_k') x_k || = 0$. Используя равенство (31), из последнего равенства получаем

$$0 = \sum_{k,l=0}^{n} (\gamma_k - \gamma_k') \overline{(\gamma_l - \gamma_l')} < x_k, x_l >= \sum_{k,l=0}^{n} (\gamma_k - \gamma_k') \overline{(\gamma_l - \gamma_l')} K_{k,l} =$$

$$= \sum_{k,l=0}^{n} (\gamma_k - \gamma_k') \overline{(\gamma_l - \gamma_l')} < \widetilde{x}_k, \widetilde{x}_l >= || \sum_{k=0}^{n} (\gamma_k - \gamma_k') \widetilde{x}_k ||^2,$$

и значит

$$\sum_{k=0}^{n} \gamma_k \widetilde{x}_k = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k' \widetilde{x}_k.$$

Таким образом, определение корректно. Возьмем произвольные элементы $x^1, x^2 \in M$, $x^1 = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k^1 x_k$, $x^2 = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k^2 x_k$, $(\gamma_k^1, \gamma_k^2 \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{Z}_+)$. Для них можно записать

$$< x^1, x^2 >_H = \sum_{k,l=0}^{n} \gamma_k^1 \overline{\gamma_l^2} < x_k, x_l >_H = \sum_{k,l=0}^{n} \gamma_k^1 \overline{\gamma_l^2} K_{k,l} =$$

$$= \sum_{k,l=0}^{n} \gamma_k^1 \overline{\gamma_l^2} < \widetilde{x}_k, \widetilde{x}_l >_{\widetilde{H}} =< V x^1, V x^2 >_{\widetilde{H}},$$

и, следовательно, оператор V изометричен. Продолжим его по непрерывности до изометрического оператора из D в $\widetilde{D}$. Положим $U := V^{-1}$. Продолжим оператор U до оператора во всем пространстве $\widetilde{H}$. Для $x \in \widetilde{H}$, $x = x_{\widetilde{D}} + x_{\widetilde{H} \ominus \widetilde{D}}$, $x_{\widetilde{D}} \in \widetilde{D}$, $x_{\widetilde{H} \ominus \widetilde{D}} \in \widetilde{H} \ominus \widetilde{D}$, мы полагаем

$$Ux = U x_{\widetilde{D}} + x_{\widetilde{H} \ominus \widetilde{D}}. \tag{32}$$

Продолженный оператор U будет изометрическим оператором из $\widetilde{H}$ в $D \oplus (\widetilde{H} \ominus \widetilde{D})$. Используя (30) мы записываем

$$x_n = U \widetilde{x}_n = U p_n(\widetilde{A}) \widetilde{x}_0 = U p_n(\widetilde{A}) U^{-1} x_0 = p_n(U \widetilde{A} U^{-1}) x_0. \tag{33}$$

Оператор $A := U \widetilde{A} U^{-1}$ будет самосопряженным в $D \oplus (\widetilde{H} \ominus \widetilde{D})$ и равенство (33) дает

$$x_n = p_n(A) x_0. \tag{34}$$

Определим пространство $\widehat{H} := D \oplus (\widetilde{H} \ominus \widetilde{D}) \oplus (H \ominus D) = H \oplus (\widetilde{H} \ominus \widetilde{D})$ и разложение единицы в $\widehat{H}$:

$$E_\lambda^1 := \begin{cases} E_\lambda, & \lambda \leq 0 \\ E_\lambda + P_{H \ominus D}, & \lambda > 0 \end{cases},$$

где $P_{H \ominus D}$ является проектором на $H \ominus D$ в $\widehat{H}$. Это разложение единицы соответствует некоторому самосопряженному оператору A_1 в $\widehat{H}$. Если $x \in$

D, то $A_1 x = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE^1_\lambda x = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_\lambda x = Ax$. Записывая соотношение (21) для операторного аргумента, умножая на x_0 и пользуясь (34) получаем

$$\frac{1}{a_n}\left(c_{n-1}x_{n-1} - b_n x_n + c_n x_{n+1}\right) = Ax_n, \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Следовательно, если $x \in M$, то $Ax \in M$. А тогда и $A^k x \in M$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Покажем по индукции, что

$$A^k x = A_1^k x, \qquad x \in M,\ k \in \mathbb{N}. \tag{35}$$

При $k = 1$ равенство выполнено. Пусть оно выполнено для $k = l \in \mathbb{N}$. Тогда $A_1^{l+1} x = A_1 A^l x = AA^l x = A^{l+1} x$, поскольку $A^l x \in M$. Значит (35) выполнено. Используя (35), в частности, получаем, что

$$p_n(A)x_0 = p_n(A_1)x_0, \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Следовательно, используя (34) можно записать

$$x_n = p_n(A_1)x_0, \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{36}$$

Таким образом, соотношение (17) выполнено и $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ является полиномиальной последовательностью в пространстве $\widehat{H} \supseteq H$. $\Box$

Если в доказательстве необходимости последней теоремы мы дополнительно предположим, что система многочленов $\{p_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ ортонормирована, то $a_n \equiv 1$ в (21) (см. [23]), а значит и в (19).

С другой стороны, если в доказательстве достаточности мы дополнительно предположим, что в (19) $a_n \equiv 1$, то в (18) будет $A_n \equiv 1$ (см. [23]) и $\{p_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ будут ортонормированными. Таким образом, мы приходим к следующему следствию:

Следствие 1 *Пусть задана последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ элементов гильбертова пространства H. Эта последовательность является полиномиальной в некотором гильбертовом пространстве $\widetilde{H} \supseteq H$ с ортонормированной системой многочленов в представлении (17) тогда и только тогда, когда для корреляционной функции $K_{n,m}$ выполняется соотношение:*

$$c_{n-1}K_{n-1,m} - b_n K_{n,m} + c_n K_{n+1,m} = c_{m-1}K_{n,m-1} - b_m K_{n,m} + c_m K_{n,m+1}, \tag{37}$$

$$n, m \in \mathbb{Z}_+,$$

где $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ является некоторой последовательностью положительных чисел, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ является некоторой последовательностью вещественных чисел, $c_{-1} = 0$, $K_{-1,m} = K_{n,-1} = 0$ $(n, m \in \mathbb{Z}_+)$.

2.3 Разложение спектральной функции в ряд.

Хорошо известно, что спектральная функция стационарной последовательности допускает разложение в ряд по элементам последовательности [26, Теорема 6.3, с.38]. Нашей целью в данном пункте будет получить аналогичное разложение для полиномиальной последовательности. Рассмотрим следующую функцию:

$$\mathbf{X}_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2] \\ 0, & \lambda \in \mathbb{R}\backslash[\lambda_1, \lambda_2] \end{cases}. \tag{38}$$

Имеет место следующее предложение:

Предложение 1 *Пусть в гильбертовом пространстве H задана полиномиальная последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, в представлении (17) которой многочлены $\{p_n(\lambda)\}_0^\infty$ ортонормированы с весом $h(\lambda)$ на отрезке $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ и разложение единицы $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ постоянно вне (a,b). Предположим, что*

(i) функция $< E_\lambda x_0, x_0 >$ абсолютно непрерывна на $[a,b]$ и значит п.в. на $[a,b]$ существует производная $(< E_\lambda x_0, x_0 >)' =: f(\lambda)$;

(ii) $f(\lambda) \leq Ch(\lambda),\ C \geq 0$ на $[a,b]$;

(iii) многочлены $\{p_n\}_0^\infty$ плотны в $L_2([a,b],h)$.

Тогда

$$(E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1})x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k, \tag{39}$$

где ряд сходится в метрике H, $\lambda_1, \lambda_2 \in [a,b]$ и

$$a_k = \int_a^b \mathbf{X}_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda) p_k(\lambda) h(\lambda) d\lambda. \tag{40}$$

Доказательство. Пусть $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ - полиномиальная последовательность, удовлетворяющая условиям предложения. Прежде всего заметим, что для функции $\mathbf{X}_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)$ можно записать

$$\int_a^b |\mathbf{X}_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)|^2 d < E_\lambda x_0, x_0 > \leq \int_a^b d < E_\lambda x_0, x_0 > = \|x_0\|^2 < \infty;$$

$$\int_a^b |\mathbf{X}_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)|^2 h(\lambda) d\lambda \leq \int_a^b h(\lambda) d\lambda < \infty.$$

Определим коэффициенты a_k равенством (40). Для произвольных
$\lambda_1, \lambda_2 \in [a,b]$ записываем

$$\|(E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1})x_0 - \sum_{k=0}^{N} a_k x_k\|^2 = \| \int_a^b \mathbf{X}_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda) dE_\lambda x_0 -$$

$$- \int_a^b \sum_{k=0}^{N} a_k p_k(\lambda) dE_\lambda x_0\|^2 = \int_a^b \left| \mathbf{X}_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda) - \sum_{k=0}^{N} a_k p_k(\lambda) \right|^2 *$$

$$*d < E_\lambda x_0, x_0 >= \int_a^b \left| \mathbf{X}_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda) - \sum_{k=0}^{N} a_k p_k(\lambda) \right|^2 f(\lambda) d\lambda \leq$$

$$\leq C \int_a^b \left| \mathbf{X}_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda) - \sum_{k=0}^{N} a_k p_k(\lambda) \right|^2 h(\lambda) d\lambda \to 0, \ N \to \infty,$$

поскольку многочлены плотны в $L_2([a,b], h(\lambda))$. $\square$

2.4 Законы больших чисел

Хорошо известным свойством стационарной последовательности (1) является эргодическое свойство (или закон больших чисел)

$$\frac{1}{s} \sum_{k=0}^{s-1} x_k \to (F(+0) - F(-0)) x_0, \quad s \to \infty; \tag{41}$$

$$\frac{1}{2s+1} \sum_{k=-s}^{s} x_k \to (F(+0) - F(-0)) x_0, \quad s \to \infty. \tag{42}$$

Целью данного пункта является получение аналогичных соотношений для различных типов полиномиальных последовательностей.

Рассмотрим полиномиальную последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ в гильбертовом пространстве H. В зависимости от того, какая система многочленов присутствует в представлении последовательности (17), можно выделить подклассы полиномиальных последовательностей. Мы будем называть последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$
(i) полиномиальной последовательностью Чебышева 1-го рода;
(ii) полиномиальной последовательностью Чебышева 2-го рода;
(iii) полиномиальной последовательностью Лежандра;
(iv) полиномиальной последовательностью Эрмита,
если соответственно
(i) $p_n(\lambda) = \cos(n \arccos \lambda)$, вес $h(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}$ сосредоточен на $[a,b] = [-1,1]$,
(ii) $p_n(\lambda) = \frac{\sin((n+1)\arccos\lambda)}{\sqrt{1-\lambda^2}}$, вес $h(\lambda) = \sqrt{1-\lambda^2}$ сосредоточен на $[a,b] = [-1,1]$,
(iii) $p_n(\lambda) = \frac{1}{n! 2^n} \frac{d^n}{d\lambda^n} [(\lambda^2 - 1)^n]$, вес $h(\lambda) = 1$ сосредоточен на $[a,b] = [-1,1]$,
(iv) $p_n(\lambda) = (-1)^n e^{\lambda^2} \frac{d^n}{d\lambda^n}(e^{-\lambda^2})$, вес $h(\lambda) = e^{-\lambda^2}$ сосредоточен на $[a,b] = (-\infty, \infty)$.

Заметим, что из соотношений (13) и (42) следует, что для четной части стационарной последовательности с разложением на $[0,\pi]$ выполняется

$$\frac{1}{s} \sum_{k=0}^{s-1} \widehat{x}_k \to (F(+0) - F(-0)) x_0, \quad s \to \infty. \tag{43}$$

Принимая во внимание соотношение (15) мы видим, что $\{\widehat{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ является полиномиальной последовательностью Чебышева 1-го рода. При этом разложение единицы $\{E_\lambda\}$ постоянно вне $(-1,1)$. Обратно, всякая полиномиальная последовательность Чебышева 1-го рода с разложением единицы $\{E_\lambda\}$, которое постоянно вне $(-1,1)$, является четной частью стационарной последовательности с разложением на $[0,\pi]$. Следовательно, полиномиальная последовательность Чебышева 1-го рода с разложением единицы $\{E_\lambda\}$, которое постоянно вне $(-1,1)$, обладает свойством (43).

Чтобы получить законы больших чисел для полиномиальной последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ в гильбертовом пространстве H, нам потребуется наложить дополнительные условия:

$$\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}} \text{ постоянно вне } (a,b); \tag{44}$$

$$K_{n,n} \leq M^2 ||p_n||^2_{L_2([a,b],h)}, \qquad n\in\mathbb{Z}_+, \tag{45}$$

где $M = \mathrm{const},\ M\geq 0$.

Отметим, что условие (45) эквивалентно условию

$$||x_n||_H \leq M ||p_n||_{L_2([a,b],h)}, \qquad n\in\mathbb{Z}_+,\ M\geq 0, \tag{46}$$

или условию

$$\int_a^b |p_n(\lambda)|^2 d < E_\lambda x_0, x_0 > \leq M^2 \int_a^b |p_n(t)|^2 h(t) dt, \qquad n\in\mathbb{Z}_+,\ M\geq 0. \tag{47}$$

Заметим, что для многочленов Чебышева 1-го рода $T_n(\lambda)$ условие (47) всегда выполнено (см. [15, с.67-68]). Действительно, поскольку их модули не превышают единицу на $[-1,1]$, мы можем записать $\int_{-1}^1 |p_n(\lambda)|^2 d < E_\lambda x_0, x_0 > \leq ||x_0||^2$. Поскольку $||p_n||_{L_2([a,b],h)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}},\ n\in\mathbb{N},\ ||p_0||_{L_2([a,b],h)} = \sqrt{\pi}$ (см. [21, с.76]), мы получаем $||p_n||_{L_2([a,b],h)} \geq \sqrt{\frac{3}{2}},\ n\in\mathbb{Z}_+$. Если выбрать $M := \sqrt{\frac{2}{3}}||x_0||^2$, мы получим (47).

Напомним, что для ортонормированных многочленов $\widehat{p}_n(\lambda)$ имеет место формула Кристоффеля-Дарбу (см. [21, Теорема 1.5]):

$$\sum_{k=0}^n \widehat{p}_k(\lambda)\widehat{p}_k(t) = \lambda_n \frac{\widehat{p}_{n+1}(\lambda)\widehat{p}_n(t) - \widehat{p}_n(\lambda)\widehat{p}_{n+1}(t)}{\lambda - t}, \tag{48}$$

где $\lambda_n > 0,\ n\in\mathbb{Z}_+,\ \lambda,t\in\mathbb{R} : \lambda\neq t$.

Для дальнейшего нам понадобится следующая лемма:

Лемма 1 *Пусть задана полиномиальная последовательность* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *в гильбертовом пространстве* H, *в представлении (17) которой многочлены* $\{p_n(\lambda)\}_0^\infty$ *ортогональны с весом* $h(\lambda)$ *на отрезке* $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ *и выполнены условия (44),(45). Пусть* $t_0\in[a,b]$ *- конечная точка из* $[a,b]$. *Предположим, что выполнены следующие условия:*

1) $\gamma_{n,t_0} \to 0$, *при* $n \to \infty$, *где*
$\gamma_{n,t_0} := \frac{|\widehat{p}_n(t_0)|+|\widehat{p}_{n+1}(t_0)|}{M_{n,t_0}}$,
$M_{n,t_0} := \widehat{p}'_{n+1}(t_0)\widehat{p}_n(t_0) - \widehat{p}'_n(t_0)\widehat{p}_{n+1}(t_0), \quad n \in \mathbb{N}$;
2) $\max_{\lambda \in U_{\varepsilon_0}(t_0) \cap [a,b]} \frac{|\widehat{p}'_{n+1}(\lambda)\widehat{p}_n(t_0) - \widehat{p}'_n(\lambda)\widehat{p}_{n+1}(t_0)|}{M_{n,t_0}} \le C, \quad n \in \mathbb{N}$,
где $U_{\varepsilon_0}(t_0) = \{\lambda \in R : |\lambda - t_0| \le \varepsilon_0\}$ *является* ε_0*-окрестностью точки* t_0, $\varepsilon_0 > 0$ *и* C *не зависит от* n.
Тогда

$$\frac{1}{\lambda_n M_{n,t_0}} \sum_{k=0}^{n} \widehat{p}_k(t_0) \frac{1}{\|p_k\|_{L_2([a,b],h(\lambda))}} x_k \to (E_{t_0+0} - E_{t_0-0})x_0, \qquad n \to \infty, \tag{49}$$

где $\lambda_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$ *являются коэффициентами из формулы Кристоффеля-Дарбу (48) для многочленов* $\{\widehat{p}_n(\lambda)\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ - полиномиальная последовательность, удовлетворяющая условию леммы. Обозначим $F_n(\lambda, t_0) = \frac{\widehat{p}_{n+1}(\lambda)\widehat{p}_n(t_0) - \widehat{p}_n(\lambda)\widehat{p}_{n+1}(t_0)}{\lambda - t_0}$, $\lambda \in \mathbb{R} : \ \lambda \neq t_0$, $n \in \mathbb{Z}_+$. При $\lambda = t_0$ мы полагаем $F_n(t_0, t_0) := \lim_{\lambda \to t_0} F_n(\lambda, t_0)$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$. Используя (48) при $t = t_0$ получаем

$$F_n(t_0, t_0) = \lim_{\lambda \to t_0} F_n(\lambda, t_0) = \lim_{\lambda \to t_0} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^{n} \widehat{p}_k(\lambda)\widehat{p}_k(t_0) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^{n} \widehat{p}_k^2(t_0). \tag{50}$$

С другой стороны, используя правило Лопиталя получаем

$$F_n(t_0, t_0) = \lim_{\lambda \to t_0} F_n(\lambda, t_0) = \lim_{\lambda \to t_0} \frac{\widehat{p}_{n+1}(\lambda)\widehat{p}_n(t_0) - \widehat{p}_n(\lambda)\widehat{p}_{n+1}(t_0)}{\lambda - t_0} =$$

$$= \widehat{p}'_{n+1}(t_0)\widehat{p}_n(t_0) - \widehat{p}'_n(t_0)\widehat{p}_{n+1}(t_0) = M_{n,t_0}, \tag{51}$$

где M_{n,t_0} из условия леммы.

Отметим, что $F_n(\lambda, t_0)$ является многочленом от λ. Используя (48) при $t = t_0$ записываем

$$F_n(A, t_0) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^{n} \widehat{p}_k(A)\widehat{p}_k(t_0),$$

где оператор A из представления (17) для $\{x_n\}$. Значит

$$F_n(A, t_0)x_0 = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^{n} \widehat{p}_k(t_0) \frac{1}{\|p_k\|_{L_2([a,b],h(\lambda))}} p_k(A)x_0;$$

$$\int_a^b F_n(\lambda, t_0) dE_\lambda x_0 = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\|p_k\|_{L_2([a,b],h(\lambda))}} \widehat{p}_k(t_0)x_k,$$

что следует из (17).

Заметим, что $M_{n,t_0} > 0$ ($n \in \mathbb{Z}_+$), как следует из соотношений (50),(51). Разделим последнее равенство на M_{n,t_0}:

$$\frac{1}{\lambda_n M_{n,t_0}} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\|p_k\|_{L_2([a,b],h(\lambda))}} \widehat{p}_k(t_0) x_k = \int_a^b \frac{F_n(\lambda, t_0)}{M_{n,t_0}} dE_\lambda x_0. \tag{52}$$

Изучим интеграл в правой части. Его можно представить в виде суммы:

$$\int_a^b \frac{F_n(\lambda, t_0)}{M_{n,t_0}} dE_\lambda x_0 = \int_{[a,b]\setminus U_\varepsilon(t_0)} \frac{F_n(\lambda, t_0)}{M_{n,t_0}} dE_\lambda x_0 + \int_{[a,b]\cap U_\varepsilon(t_0)} \frac{F_n(\lambda, t_0)}{M_{n,t_0}} dE_\lambda x_0, \tag{53}$$

где $U_\varepsilon(t_0)$ из условия леммы, $\varepsilon > 0$. Оценим первое слагаемое:

$$\| \int_{[a,b]\setminus U_\varepsilon(t_0)} F_n(\lambda, t_0) dE_\lambda x_0 \|^2 = \int_{[a,b]\setminus U_\varepsilon(t_0)} |F_n(\lambda, t_0)|^2 d < E_\lambda x_0, x_0 >=$$

$$= \int_{[a,b]\setminus U_\varepsilon(t_0)} |\frac{\widehat{p}_{n+1}(\lambda)\widehat{p}_n(t_0) - \widehat{p}_n(\lambda)\widehat{p}_{n+1}(t_0)}{\lambda - t_0}|^2 d < E_\lambda x_0, x_0 >\leq$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{[a,b]\setminus U_\varepsilon(t_0)} |\widehat{p}_{n+1}(\lambda)\widehat{p}_n(t_0) - \widehat{p}_n(\lambda)\widehat{p}_{n+1}(t_0)|^2 d < E_\lambda x_0, x_0 >\leq$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_a^b |\widehat{p}_{n+1}(\lambda)\widehat{p}_n(t_0) - \widehat{p}_n(\lambda)\widehat{p}_{n+1}(t_0)|^2 d < E_\lambda x_0, x_0 >= \frac{1}{\varepsilon^2} *$$

$$* < \int_a^b (\frac{p_{n+1}(\lambda)}{\|p_{n+1}\|_{L_2([a,b],h)}} \widehat{p}_n(t_0) - \frac{p_n(\lambda)}{\|p_n\|_{L_2([a,b],h)}} \widehat{p}_{n+1}(t_0)) dE_\lambda x_0,$$

$$\int_a^b (\frac{p_{n+1}(\lambda)}{\|p_{n+1}\|_{L_2([a,b],h)}} \widehat{p}_n(t_0) - \frac{p_n(\lambda)}{\|p_n\|_{L_2([a,b],h)}} \widehat{p}_{n+1}(t_0)) dE_\lambda x_0 >=$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} \| \frac{\widehat{p}_n(t_0)}{\|p_{n+1}\|_{L_2([a,b],h)}} x_{n+1} - \frac{\widehat{p}_{n+1}(t_0)}{\|p_n\|_{L_2([a,b],h)}} x_n \|^2.$$

Следовательно, можно записать

$$\| \int_{[a,b]\setminus U_\varepsilon(t_0)} \frac{F_n(\lambda, t_0)}{M_{n,t_0}} dE_\lambda x_0 \| \leq \frac{1}{\varepsilon M_{n,t_0}} \| \frac{\widehat{p}_n(t_0)}{\|p_{n+1}\|_{L_2([a,b],h)}} x_{n+1} -$$

$$- \frac{\widehat{p}_{n+1}(t_0)}{\|p_n\|_{L_2([a,b],h)}} x_n \| \leq \frac{1}{\varepsilon M_{n,t_0}} (\frac{|\widehat{p}_n(t_0)| \|x_{n+1}\|}{\|p_{n+1}\|_{L_2([a,b],h)}} + \frac{|\widehat{p}_{n+1}(t_0)| \|x_n\|}{\|p_n\|_{L_2([a,b],h)}}) \leq$$

$$\leq \frac{M}{\varepsilon M_{n,t_0}} (|\widehat{p}_n(t_0)| + |\widehat{p}_{n+1}(t_0)|) = \frac{M}{\varepsilon} \gamma_{n,t_0};$$

$$\| \int_{[a,b]\setminus U_\varepsilon(t_0)} \frac{F_n(\lambda, t_0)}{M_{n,t_0}} dE_\lambda x_0 \| \leq \frac{M}{\varepsilon} \gamma_{n,t_0}, \tag{54}$$

где M из (45), γ_{n,t_0} из условия леммы.

Рассмотрим теперь второе слагаемое в правой части (53). Полагаем

$$\widehat{E}_\lambda = \begin{cases} E_\lambda;\ \lambda < t_0 \\ E_{t_0-0};\ \lambda = t_0 \\ E_\lambda + E_{t_0-0} - E_{t_0+0};\ \lambda > t_0 \end{cases}.$$

Обозначим

$$I := \| \int_{[a,b]\cap U_\varepsilon(t_0)} \frac{F_n(\lambda,t_0)}{M_{n,t_0}} d\widehat{E}_\lambda x_0 \|^2 = \int_{[a,b]\cap U_\varepsilon(t_0)} \left| \frac{F_n(\lambda,t_0)}{M_{n,t_0}} \right|^2 d < \widehat{E}_\lambda x_0, x_0 >,$$

где $\varepsilon > 0$. Тогда

$$I \le \max_{\lambda\in[a,b]\cap U_\varepsilon(t_0)} \left| \frac{F_n(\lambda,t_0)}{M_{n,t_0}} \right|^2 \int_{[a,b]\cap U_\varepsilon(t_0)} d < \widehat{E}_\lambda x_0, x_0 > \le \frac{1}{M_{n,t_0}^2} *$$

$$* \max_{\lambda\in[a,b]\cap U_\varepsilon(t_0)} |F_n(\lambda,t_0)|^2 < (\widehat{E}_{t_0+\varepsilon} - \widehat{E}_{t_0-\varepsilon}) x_0, x_0 > . \tag{55}$$

С помощью формулы Лагранжа для конечных приращений функции (для функции $f(\cdot) = \widehat{p}_{n+1}(\cdot)\widehat{p}_n(t_0) - \widehat{p}_n(\cdot)\widehat{p}_{n+1}(t_0)$ на $[\lambda, t_0]$) мы получаем

$$F_n(\lambda,t_0) = \frac{\widehat{p}_{n+1}(\lambda)\widehat{p}_n(t_0) - \widehat{p}_n(\lambda)\widehat{p}_{n+1}(t_0)}{\lambda - t_0} =$$

$$= \frac{(\widehat{p}'_{n+1}(\xi)\widehat{p}_n(t_0) - \widehat{p}'_n(\xi)\widehat{p}_{n+1}(t_0))(\lambda - t_0)}{\lambda - t_0} = \widehat{p}'_{n+1}(\xi)\widehat{p}_n(t_0) - \widehat{p}'_n(\xi)\widehat{p}_{n+1}(t_0),$$

где $\xi \in [\lambda, t_0]$. Значит

$$\frac{1}{M_{n,t_0}^2} \max_{\lambda\in[a,b]\cap U_\varepsilon(t_0)} |F_n(\lambda,t_0)|^2 \le \frac{1}{M_{n,t_0}^2} *$$

$$* \max_{\xi\in[a,b]\cap U_\varepsilon(t_0)} |\widehat{p}'_{n+1}(\xi)\widehat{p}_n(t_0) - \widehat{p}'_n(\xi)\widehat{p}_{n+1}(t_0)|^2 \le C^2,$$

что следует из условия 2) леммы, если полагать $\varepsilon \le \varepsilon_0$. Используя (55) мы получаем

$$I \le C^2 < (\widehat{E}_{t_0+\varepsilon} - \widehat{E}_{t_0-\varepsilon}) x_0, x_0 >, \tag{56}$$

где $\varepsilon \le \varepsilon_0$. Следовательно, мы имеем

$$\sqrt{I} = \| \int_{[a,b]\cap U_\varepsilon(t_0)} \frac{F_n(\lambda,t_0)}{M_{n,t_0}} d\widehat{E}_\lambda x_0 \| \to 0, \quad \varepsilon \to +0.$$

Используя определение $\widehat{E}_\lambda$ записываем

$$\| \int_{[a,b]\cap U_\varepsilon(t_0)} \frac{F_n(\lambda,t_0)}{M_{n,t_0}} dE_\lambda x_0 - (E_{t_0+0} - E_{t_0-0}) x_0 \| \to 0, \quad \varepsilon \to +0. \tag{57}$$

Для произвольного $\widetilde{\varepsilon} > 0$ выбираем $\varepsilon > 0$ такое, чтобы

$$\| \int_{[a,b]\cap U_\varepsilon(t_0)} \frac{F_n(\lambda, t_0)}{M_{n,t_0}} dE_\lambda x_0 - (E_{t_0+0} - E_{t_0-0})x_0 \| < \frac{\widetilde{\varepsilon}}{2}.$$

Используя условие 1) леммы выбираем $N_0 \in \mathbb{N}$ так, чтобы

$$\frac{M}{\varepsilon}\gamma_{n,t_0} < \frac{\widetilde{\varepsilon}}{2}, \qquad n > N_0.$$

Тогда

$$\| \int_a^b \frac{F_n(\lambda, t_0)}{M_{n,t_0}} dE_\lambda x_0 - (E_{t_0+0} - E_{t_0-0})x_0 \| = \| \int_{[a,b]\setminus U_\varepsilon(t_0)} \frac{F_n(\lambda, t_0)}{M_{n,t_0}} dE_\lambda x_0 +$$

$$+ \int_{[a,b]\cap U_\varepsilon(t_0)} \frac{F_n(\lambda, t_0)}{M_{n,t_0}} dE_\lambda x_0 - (E_{t_0+0} - E_{t_0-0})x_0 \| \leq \| \int_{[a,b]\setminus U_\varepsilon(t_0)} \frac{F_n(\lambda, t_0)}{M_{n,t_0}} *$$

$$* dE_\lambda x_0 \| + \| \int_{[a,b]\cap U_\varepsilon(t_0)} \frac{F_n(\lambda, t_0)}{M_{n,t_0}} dE_\lambda x_0 - (E_{t_0+0} - E_{t_0-0})x_0 \| \leq \frac{M}{\varepsilon}\gamma_{n,t_0} + \frac{\widetilde{\varepsilon}}{2} \leq$$

$$\leq \frac{\widetilde{\varepsilon}}{2} + \frac{\widetilde{\varepsilon}}{2} = \widetilde{\varepsilon}, \qquad n > N_0,$$

где мы использовали (54). Приняв во внимание (52), мы получаем (49). □

Имеет место следующая теорема:

Теорема 2 *Пусть дана полиномиальная последовательность Чебышева 2-го рода $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ с разложением единицы $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ и выполнены условия (44),(45). Тогда справедливы следующие соотношения:*

1. $\frac{x_0+2x_1+3x_2+...+(n+1)x_n}{n^3} \to \frac{1}{3}(E_{1+0} - E_{1-0})x_0$, *при* $n \to \infty$;
2. $\frac{x_0-2x_1+3x_2+...+(-1)^n(n+1)x_n}{n^3} \to \frac{1}{3}(E_{-1+0} - E_{-1-0})x_0$, *при* $n \to \infty$;
3. $\frac{x_0-x_2+x_4+...+(-1)^n x_{2n}}{n} \to (E_{+0} - E_{-0})x_0$, *при* $n \to \infty$.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ - полиномиальная последовательность из условия теоремы. Мы воспользуемся леммой 1 для точек $t_0 = -1, 0, 1$. Для многочленов Чебышева 2-го рода справедливо (см. [21, с.105,107]):

$$p_n(1) = n+1,\ p_n(-1) = (-1)^n(n+1),\ p_{2k}(0) = (-1)^k,\ p_{2k+1}(0) = 0, \quad n,k \in \mathbb{Z}_+, \tag{58}$$

а также $\|p_n\|_{L_2([a,b],h)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$. Непосредственным дифференцированием получаем соотношение

$$p_n'(\lambda) = \frac{-(n+1)T_{n+1}(\lambda) + \lambda p_n(\lambda)}{1-\lambda^2}, \qquad (n \in \mathbb{Z}_+,\ \lambda \in [-1,1]) \tag{59}$$

где T_n являются многочленами Чебышева 1-го рода. Используя теперь правило Лопиталя вычисляем

$$p_n'(1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2), \quad p_n'(-1) = (-1)^{n+1}\frac{1}{3}n(n+1)(n+2), \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{60}$$

$$p'_{2k}(0) = 0, \quad p'_{2k+1}(0) = (-1)^k(2k+2), \qquad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{61}$$

Мы вычисляем

$$M_{n,1} = M_{n,-1} = \frac{2}{3\pi}(n+1)(n+2)(2n+3), \qquad n \in \mathbb{Z}_+,$$

$$M_{2k,0} = M_{2k+1,0} = \frac{4}{\pi}(k+1), \qquad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{62}$$

Далее, вычисляем

$$\gamma_{n,1} = \gamma_{n,-1} = 3\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(n+1)(n+2)}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

$$\gamma_{2k+2,0} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{k+2}, \quad \gamma_{2k+1,0} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{k+1}, \qquad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Следовательно,

$$\gamma_{n,1} \to 0,\ \gamma_{n,-1} \to 0,\ \gamma_{n,0} \to 0, \quad n \to \infty,$$

и условие 1) леммы 1 выполнено для $t_0 = -1, 0, 1$.

Положим

$$I_1(n,\lambda) := \frac{|\widehat{p}'_{n+1}(\lambda)\widehat{p}_n(1) - \widehat{p}'_n(\lambda)\widehat{p}_{n+1}(1)|}{M_{n,1}} = \frac{3|p'_{n+1}(\lambda)(n+1) - p'_n(\lambda)(n+2)|}{(n+1)(n+2)(2n+3)},$$

где $n \in \mathbb{Z}_+,\ \lambda \in [-1,1]$. Тогда

$$I_1(n,\lambda) = \frac{3}{(n+1)(n+2)(2n+3)(1-\lambda^2)}\,|-(n+1)(n+2)T_{n+2}+$$

$$+(n+1)\lambda p_{n+1} + (n+1)(n+2)T_{n+1} - (n+2)\lambda p_n| \le I_{1,1}(n,\lambda) + I_{1,2}(n,\lambda),$$

где $I_{1,1}(n,\lambda) := \frac{3}{(2n+3)(1-\lambda^2)}\,|T_{n+2} - T_{n+1}|, \quad I_{1,2}(n,\lambda) := \frac{3|\lambda|}{(n+1)(n+2)(2n+3)(1-\lambda^2)}\,|(n+1)p_{n+1} - (n+2)p_n|, \quad n \in \mathbb{Z}_+,\ \lambda \in [-1,1]$.

С помощью (48) мы можем записать

$$(n+1)p_{n+1}(\lambda) - (n+2)p_n(\lambda) = \frac{\pi}{2}(\widehat{p}_n(1)\widehat{p}_{n+1}(\lambda) - \widehat{p}_{n+1}(1)\widehat{p}_n(\lambda)) =$$

$$= \frac{\pi}{2}(\lambda - 1)\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=0}^{n}\widehat{p}_k(\lambda)\widehat{p}_k(1).$$

Поскольку $\lambda_n = \frac{1}{2}$, $|p_n(\lambda)| \le n+1$, $\lambda \in [-1,1]$, $n \in \mathbb{Z}_+$ (см. [21]), можно записать

$$|(n+1)p_{n+1}(\lambda) - (n+2)p_n(\lambda)| \le \pi|\lambda - 1|\sum_{k=0}^{n}|\widehat{p}_k(\lambda)||\widehat{p}_k(1)| = 2|\lambda - 1| *$$

$$*\sum_{k=0}^{n}(k+1)|\widehat{p}_k(\lambda)| \leq 2|\lambda-1|\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2 \leq 2|\lambda-1|(n+1)^3.$$

Значит

$$|I_{1,2}(n,\lambda)| \leq \frac{6(n+1)^2|\lambda|}{(n+2)(2n+3)|1+\lambda|} \leq \frac{6|\lambda|}{|1+\lambda|} \leq 6, \qquad \lambda\in[0,1],\ n\in\mathbb{Z}_+. \quad (63)$$

С другой стороны, легко получаем

$$|I_{1,1}(n,\lambda)| \leq \frac{3|\arccos^2\lambda|}{2(1-\lambda^2)} \leq \frac{3}{2}\left|\frac{\arccos^2\lambda}{1-\lambda}\right| \leq M, \quad M>0,\ \lambda\in[0,1],\ n\in\mathbb{Z}_+. \quad (64)$$

Из (63),(64) следует, что

$$I_1(n,\lambda) \leq M_1, \qquad \lambda\in[0,1],\ n\in\mathbb{N},\ M_1>0. \quad (65)$$

Аналогичным образом получаем

$$I_{-1}(n,\lambda) := \frac{|\widehat{p}'_{n+1}(\lambda)\widehat{p}_n(-1)-\widehat{p}'_n(\lambda)\widehat{p}_{n+1}(-1)|}{M_{n,-1}} \leq M_2, \quad (66)$$

где $\lambda\in[-1,0],\ n\in\mathbb{N},\ M_2>0$. Положим

$$I_0(2k,\lambda) := \frac{|\widehat{p}'_{2k+1}(\lambda)\widehat{p}_{2k}(0)-\widehat{p}'_{2k}(\lambda)\widehat{p}_{2k+1}(0)|}{M_{2k,0}}, \qquad k\in\mathbb{Z}_+,\ \lambda\in[-1,1].$$

Если $|\lambda|\leq\frac{1}{2}$, то

$$I_0(2k,\lambda) = \frac{|p'_{2k+1}(\lambda)|}{2(k+1)} = \frac{1}{2(k+1)(1-\lambda^2)}|-(2k+2)T_{2k+2}(\lambda)+\lambda p_{2k+1}(\lambda)| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2(k+1)(1-\lambda^2)}(2k+2+|\lambda|(2k+2)) = \frac{1}{1-|\lambda|} \leq 2, \qquad k\in\mathbb{Z}_+.$$

Обозначим

$$I_0(2k+1,\lambda) := \frac{|\widehat{p}'_{2k+2}(\lambda)\widehat{p}_{2k+1}(0)-\widehat{p}'_{2k+1}(\lambda)\widehat{p}_{2k+2}(0)|}{M_{2k+1,0}}, \qquad k\in\mathbb{Z}_+,\ \lambda\in[-1,1].$$

Используя последние соотношения мы получаем

$$I_0(2k+1,\lambda) = \frac{|p'_{2k+1}(\lambda)|}{2(k+1)} \leq 2, \qquad |\lambda|\leq\frac{1}{2},\ k\in\mathbb{Z}_+.$$

Следовательно, условие 2) леммы 1 выполняется для точек $t_0=-1,0,1$. Применяя теперь лемму 1 мы получаем утверждение теоремы. □

Имеет место следующая теорема:

Теорема 3 *Пусть задана полиномиальная последовательность Лежандра* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *с разложением единицы* $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ *и выполнены условия (44),(45). Тогда справедливы следующие соотношения:*

1. $\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}(2k+1)x_k \to (E_{1+0}-E_{1-0})x_0$, *при* $n\to\infty$*;*

2. $\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(2k+1)x_k \to (E_{-1+0}-E_{-1-0})x_0$, *при* $n\to\infty$*;*

3. $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(4k+1)\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}x_{2k} \to \frac{\pi}{4}(E_{+0}-E_{-0})x_0$, *при* $n\to\infty$*.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ - полиномиальная последовательность, удовлетворяющая условию теоремы. Мы, как и в доказательстве предыдущей теоремы, воспользуемся леммой 1 для точек $t_0=-1,0,1$. Для многочленов Лежандра имеет место (см. [21, с.118,120,125]):

$$\|p_n\|_{L_2([-1,1],h(\lambda))}=\sqrt{\frac{2}{2n+1}},\quad \widehat{p}_n(\lambda)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}p_n(\lambda);$$

$$p_n(1)=1,\quad p_n(-1)=(-1)^n,\quad p_{2k}(0)=(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!},\quad p_{2k+1}(0)=0,$$

$$p'_{2k}(0)=0,\quad p'_{2k+1}(0)=(-1)^k\frac{(2k+1)!!}{(2k)!!},\qquad k,n\in\mathbb{Z}_+. \tag{67}$$

Используя соотношение (см. [21, с.124])

$$p'_n(\lambda)-\lambda p'_{n-1}(\lambda)=np_{n-1}(\lambda),\qquad n\in\mathbb{N}, \tag{68}$$

мы вычисляем

$$p'_n(1)=p'_{n-1}(1)+n=p'_0(\lambda)+1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2},\qquad n\in\mathbb{N}. \tag{69}$$

В силу четности функции $h(\lambda)$ и того, что $[a,b]=[-1,1]$, мы заключаем, что (см. [21, Теорема 1.3])

$$p'_n(-1)=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2},\qquad n\in\mathbb{N}. \tag{70}$$

Используя (67),(69),(70) мы вычисляем

$$M_{n-1,1}=M_{n-1,-1}=\frac{1}{2}\sqrt{4n^2-1}n,\qquad n=2,3,...,$$

$$M_{2k,0}=\frac{1}{2}\sqrt{(4k+3)(4k+1)}\left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right)^2(2k+1),\qquad k\in\mathbb{N},$$

$$M_{2k+1,0}=\frac{1}{2}\sqrt{(4k+5)(4k+3)}\left(\frac{(2k+1)!!}{(2k)!!}\right)^2\frac{1}{2k+2},\qquad k\in\mathbb{Z}_+.$$

Тогда

$$\gamma_{n,1}=\gamma_{n,-1}=\frac{\sqrt{\frac{2n+1}{2}}+\sqrt{\frac{2n+3}{2}}}{\frac{1}{2}\sqrt{4(n+1)^2-1}(n+1)},\qquad n\in\mathbb{N},$$

$$\gamma_{2k,0} = \frac{\sqrt{2}\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}}{\sqrt{(4k+3)}(2k+1)}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

$$\gamma_{2k+1,0} = \frac{\sqrt{2}\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}}{\sqrt{(4k+3)}}, \qquad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Поскольку

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}, \tag{71}$$

мы получаем

$$\gamma_{2k,0} \sim \frac{\sqrt{2\pi k}}{\sqrt{4k+3}(2k+1)},\ \gamma_{2k+1,0} \sim \frac{\sqrt{2\pi k}}{\sqrt{4k+3}(2k+1)}, \qquad k \to \infty.$$

Следовательно, $\gamma_{n,1} \to 0,\ \gamma_{n,-1} \to 0,\ \gamma_{n,0} \to 0, \quad n \to \infty$, и выполнено условие 1) леммы 1 для точек $t_0 = -1, 0, 1$.

Полагаем

$$I_1 := \frac{|\widehat{p}'_{n+1}(\lambda)\widehat{p}_n(1) - \widehat{p}'_n(\lambda)\widehat{p}_{n+1}(1)|}{M_{n,1}} = \frac{|p'_{n+1}(\lambda) - p'_n(\lambda)|}{n+1}, \quad \lambda \in [-1,1],\ n \in \mathbb{N}.$$

С помощью (68) мы получаем

$$I_1 = \frac{|\lambda p'_n(\lambda) + (n+1)p_n(\lambda) - p'_n(\lambda)|}{n+1} \le |p_n(\lambda)| + \frac{|(\lambda-1)p'_n(\lambda)|}{n+1}.$$

Для многочленов Лежандра имеет место оценка [21, с.128]:

$$|p_n(\lambda)| \le 1, \qquad \lambda \in [-1,1],\ n \in \mathbb{Z}_+. \tag{72}$$

Значит

$$I_1 \le 1 + \frac{|(\lambda-1)p'_n(\lambda)|}{n+1}.$$

Заметим, что $p_n(\lambda) = p_n(\lambda; 0, 0)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, где $p_n(\lambda; \alpha, \beta)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$ являются стандартизованными многочленами Якоби [21, с.268]. Для $p_n(\lambda; \alpha, \beta)$ справедлива формула дифференцирования [21, с.282]:

$$p'_n(\lambda; \alpha, \beta) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + n + 1)p_{n-1}(\lambda; \alpha+1, \beta+1), \qquad \lambda \in [-1,1],\ n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, можно записать

$$p'_n(\lambda) = \frac{1}{2}(n+1)p_{n-1}(\lambda; 1, 1), \qquad \lambda \in [-1,1],\ n \in \mathbb{N}. \tag{73}$$

Из оценки [21, с.299]

$$(1-\lambda)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}(1+\lambda)^{\frac{\beta}{2}+\frac{1}{4}}|p_n(\lambda; \alpha, \beta)| \le \frac{c_{11}}{\sqrt{n}}, \qquad \lambda \in [-1,1],\ c_{11} > 0,\ n \in \mathbb{N}, \tag{74}$$

мы получаем

$$|(1-\lambda)p_n'(\lambda)| = \frac{1}{2}(n+1)|(1-\lambda)p_{n-1}(\lambda;1,1)| = \frac{1}{2}(n+1)(1-\lambda)^{\frac{1}{4}}(1+\lambda)^{-\frac{3}{4}} *$$

$$*(1-\lambda)^{\frac{3}{4}}(1+\lambda)^{\frac{3}{4}}|p_{n-1}(\lambda;1,1)| \leq \frac{1}{2}(n+1)(1-\lambda)^{\frac{1}{4}}(1+\lambda)^{-\frac{3}{4}}\frac{c_{11}}{\sqrt{n}},$$

$$|(1-\lambda)p_n'(\lambda)| \leq \frac{1}{2}c_{11}\frac{(n+1)}{\sqrt{n}}, \qquad \lambda \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}.$$

Значит

$$I_1 \leq 1 + \frac{c_{11}}{2\sqrt{n}} \leq 1 + \frac{c_{11}}{2}, \qquad \lambda \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}. \tag{75}$$

Полагаем

$$I_{-1} := \frac{|\widehat{p}'_{n+1}(\lambda)\widehat{p}_n(-1) - \widehat{p}'_n(\lambda)\widehat{p}_{n+1}(-1)|}{M_{n,-1}}, \qquad \lambda \in [-1,1],\ n \in \mathbb{N}.$$

Используя (68),(72),(73),(74) мы записываем

$$I_{-1} = \frac{|p'_{n+1}(\lambda) + p'_n(\lambda)|}{n+1} = \frac{|\lambda p'_n(\lambda) + (n+1)p_n(\lambda) + p'_n(\lambda)|}{n+1} \leq$$

$$\leq |p_n(\lambda)| + \frac{|(\lambda+1)p'_n(\lambda)|}{n+1} \leq 1 + \frac{|(\lambda+1)p'_n(\lambda)|}{n+1} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}|(\lambda+1)p_{n-1}(\lambda;1,1)| = 1 + \frac{1}{2}(1+\lambda)^{\frac{1}{4}}(1-\lambda)^{-\frac{3}{4}}(1+\lambda)^{\frac{3}{4}}(1-\lambda)^{\frac{3}{4}} *$$

$$*|p_{n-1}(\lambda;1,1)| \leq 1 + \frac{1}{2}(1+\lambda)^{\frac{1}{4}}(1-\lambda)^{-\frac{3}{4}}\frac{c_{11}}{\sqrt{n}} \leq 1 + \frac{c_{11}}{2\sqrt{n}};$$

$$I_{-1} \leq 1 + \frac{c_{11}}{2}, \qquad \lambda \in [-1,0],\ n \in \mathbb{N}. \tag{76}$$

Пусть

$$I_0^n := \frac{|\widehat{p}'_{n+1}(\lambda)\widehat{p}_n(0) - \widehat{p}'_n(\lambda)\widehat{p}_{n+1}(0)|}{M_{n,0}}, \qquad n \in \mathbb{Z}_+,\ \lambda \in [-1,1].$$

Тогда

$$I_0^{2k} = I_0^{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}|p'_{2k+1}(\lambda)|, \qquad k \in \mathbb{Z}_+,\ \lambda \in [-1,1].$$

С помощью соотношений (73),(74) записываем

$$I_0^{2k} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}\frac{1}{2}(2k+2)|p_{2k}(\lambda;1,1)| \leq \frac{(2k)!!(2k+2)}{2(2k+1)!!}(1-\lambda)^{-\frac{3}{4}}(1+\lambda)^{-\frac{3}{4}} *$$

$$*\frac{c_{11}}{\sqrt{2k}} \leq \frac{(2k+2)!!\sqrt[4]{8}c_{11}}{2(2k+1)!!\sqrt{2k}}, \qquad \lambda \in [-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}],\ k \in \mathbb{N}.$$

Поскольку $\frac{(2k+2)!!}{(2k+1)!!\sqrt{2k}} \sim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, выражение $\frac{(2k+2)!!}{(2k+1)!!\sqrt{2k}}$ ограничено и мы получаем

$$I_0^{2k} = I_0^{2k+1} \leq \widetilde{M}_0, \qquad \lambda \in [-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}],\ k \in \mathbb{N},\ \widetilde{M}_0 > 0.$$

Из последнего неравенства и (75),(76) мы заключаем, что условие 2) леммы 1 выполняется для точек $t_0 = -1, 1, 0$, при $C = 1 + \frac{c_{11}}{2}, 1 + \frac{c_{11}}{2}, \widetilde{M}_0$ и $\varepsilon_0 = 1, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}$, соответственно. Заметим, что для многочленов Лежандра имеет место соотношение [21, с.121]:

$$\lambda_n = \frac{n+1}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}, \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Используя это соотношение и лемму 1 мы получаем предельные соотношения из условия теоремы. □

Для полиномиальных последовательностей Эрмита имеет место теорема:

Теорема 4 *Пусть задана полиномиальная последовательность Эрмита $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ с разложением единицы $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ и выполняется условие (45). Тогда имеет место следующее соотношение:*
$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!4^k} x_{2k} \to \frac{2}{\sqrt{\pi}} (E_{+0} - E_{-0}) x_0$, *при* $n \to \infty$.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ - полиномиальная последовательность Эрмита, которая удовлетворяет условиям теоремы. Используем лемму 1 для точки $t_0 = 0$. Заметим, что для многочленов Эрмита выполнены соотношения [21, с.175]

$$\widehat{p}_n(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{n!2^n\sqrt{\pi}}} p_n(\lambda), \quad p_{2k}(0) = (-1)^k \frac{(2k)!}{k!} = (-1)^k 2^k (2k-1)!!,$$

$$p_{2k+1}(0) = 0, \quad p_{2k}'(0) = 0, \quad p_{2k+1}'(0) = (-1)^k \frac{(2k+1)!}{k!} 2, \qquad n, k \in \mathbb{Z}_+. \quad (77)$$

С помощью (77) мы вычисляем

$$M_{2k,0} = \widehat{p}_{2k+1}'(0)\widehat{p}_{2k}(0) - \widehat{p}_{2k}'(0)\widehat{p}_{2k+1}(0) = \frac{(2k+1)!(2k-1)!!}{k!\sqrt{\pi(2k+1)!(2k)!2^{2k-1}}}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

$$M_{2k+1,0} = \widehat{p}_{2k+2}'(0)\widehat{p}_{2k+1}(0) - \widehat{p}_{2k+1}'(0)\widehat{p}_{2k+2}(0) =$$
$$= \frac{(2k+1)!(2k+1)!!}{k!\sqrt{\pi(2k+2)!(2k+1)!2^{2k-1}}}, \qquad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Используя (77),(71) мы записываем

$$\gamma_{2k,0} = \frac{|\widehat{p}_{2k}(0)| + |\widehat{p}_{2k+1}(0)|}{M_{2k,0}} = \frac{\sqrt[4]{\pi} k! \sqrt{2^{2k-1}}}{\sqrt{(2k+1)!}} = \frac{\sqrt[4]{\pi}}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{(2k+1)}} *$$

$$*\sqrt{\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}} \sim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[4]{\pi}}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{(2k+1)}} \sqrt[4]{\pi k} \sim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2} k^{-\frac{1}{4}};$$

$$\gamma_{2k+1,0} = \frac{|\widehat{p}_{2k+1}(0)| + |\widehat{p}_{2k+2}(0)|}{M_{2k+1,0}} = \frac{\sqrt[4]{\pi} k! \sqrt{2^{2k-1}}}{\sqrt{(2k+1)!}} \sim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2} k^{-\frac{1}{4}}.$$

Значит $\gamma_{n,0} \to 0,\ n \to \infty$ и выполнено условие 1) леммы 1 для точки $t_0 = 0$. Положим

$$I_n := \frac{|\widehat{p}'_{n+1}(\lambda)\widehat{p}_n(0) - \widehat{p}'_n(\lambda)\widehat{p}_{n+1}(0)|}{M_{n,0}}, \qquad n \in \mathbb{Z}_+,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Отсюда

$$I_{2k} = I_{2k+1} = \frac{k!}{2(2k+1)!} |p'_{2k+1}(\lambda)|, \qquad k \in \mathbb{Z}_+,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Для многочленов Эрмита справедливо [21, с.178]

$$p'_n(\lambda) = 2n p_{n-1}(\lambda), \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{78}$$

а также [21, Теорема 5.2]

$$p_n(\lambda) = \widetilde{\lambda}_n e^{\frac{\lambda^2}{2}} [\cos(\sqrt{2n+1}\lambda - \frac{n\pi}{2}) + R_n(\lambda)],$$

где $R_n(\lambda)$ является остаточным членом, допускающим оценку:

$$|R_n(\lambda)| \leq c_3 n^{-\frac{1}{4}} |\lambda|^{\frac{5}{2}}, \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

$$\widetilde{\lambda}_n = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{(2m)!}{m!}, & \text{если } n = 2m \\ \frac{2(2m+1)!}{m!\sqrt{4m+3}}, & \text{если } n = 2m+1 \end{array} \right., \ m \in \mathbb{Z}_+,$$

и константа c_3 не зависит от n и λ, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$|p_{2k}(\lambda)| \leq \frac{(2k)!}{k!} e^{\frac{\lambda^2}{2}} (1 + c_3 (2k)^{-\frac{1}{4}} |\lambda|^{\frac{5}{2}}), \qquad \lambda \in \mathbb{R},\ k \in N.$$

Следовательно, используя (78) мы получаем

$$I_{2k} = \frac{k!}{2(2k+1)!} |p'_{2k+1}(\lambda)| = \frac{k!}{(2k)!} |p_{2k}(\lambda)| \leq e^{\frac{\lambda^2}{2}} (1 + c_3 (2k)^{-\frac{1}{4}} |\lambda|^{\frac{5}{2}}) \leq \sqrt{e} *$$

$$*(1 + c_3 (2k)^{-\frac{1}{4}}) \leq \sqrt{e}(1 + c_3), \quad \text{если } \lambda \in [-1,1],\ k \in \mathbb{N}.$$

Значит

$$\max_{\lambda \in [-1,1]} I_{2k} = \max_{\lambda \in [-1,1]} I_{2k+1} \leq \sqrt{e}(1 + c_3), \qquad k \in \mathbb{Z}_+.$$

$$\max_{\lambda \in [-1,1]} \frac{|\widehat{p}'_{n+1}(\lambda)\widehat{p}_n(0) - \widehat{p}'_n(\lambda)\widehat{p}_{n+1}(0)|}{M_{n,0}} \leq \sqrt{e}(1 + c_3), \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{79}$$

Таким образом, условие 2) леммы 1 выполнено для точки $t_0 = 0$ при $\varepsilon_0 = 1$, $C = \sqrt{e}(1 + c_3)$. Применяя лемму 1 мы получаем

$$\frac{1}{\lambda_{2k} M_{2k,0}} \sum_{j=0}^{2k} \widehat{p}_j'(0) \frac{1}{\sqrt{j! 2^j \sqrt{\pi}}} x_j \to (E_{+0} - E_{-0}) x_0, \quad k \to \infty.$$

Для многочленов Эрмита имеет место [21, с.172]: $\lambda_n = \sqrt{\frac{n+1}{2}}$. Используя это, а также соотношения (77),(71), мы получаем предельное соотношение из условия теоремы. □

3. P-стационарные последовательности

3.1. Определение P-стационарной последовательности. Разностное соотношение для корреляционной функции

Следующее определение является основным в этом параграфе:

Определение 2 *Последовательность* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *элементов гильбертова пространства* H *называется* **P-стационарной**, *если она допускает представление*

$$x_n = p_n(U)x_0 = \int_0^{2\pi} p_n(e^{i\theta}) dF_\theta x_0, \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{80}$$

где $\{p_n(\cdot)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *является системой ортогональных многочленов на единичной окружности* $\mathbb{T}$, U *является некоторым унитарным оператором в* H *и* $\{F_\theta\}_{\theta\in[0,2\pi]}$ *есть его ортогональное разложение единицы (не обязательно непрерывное слева или справа).*

Напомним, что набор многочленов $\{p_n(z)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ ($\deg p_n = n$ и p_n имеет положительный старший коэффициент) является системой ортогональных многочленов на единичной окружности, если выполнено соотношение

$$\int_0^{2\pi} p_n(e^{i\theta}) \overline{p_m(e^{i\theta})} d\sigma(\theta) = A_n \delta_{n,m}, \quad A_n > 0, \qquad n, m \in \mathbb{Z}_+, \tag{81}$$

где $\sigma(\theta)$ - неубывающая функция на $[0, 2\pi]$, нормированная условием $\int_0^{2\pi} d\sigma = 1$.

В том случае, когда функция $\sigma(\theta)$ абсолютно непрерывна на $[0, 2\pi]$, мы обозначаем $p(\theta) = \sigma'(\theta)$ п.в. на $[0, 2\pi]$ и называем функцию $p(\theta)$ весом. Также мы обозначаем $\varphi_n(\lambda) := \frac{p_n(\lambda)}{\|p_n\|_{L_2([0,2\pi], d\sigma)}}$ и $\phi_n(\lambda) := \frac{\varphi_n(\lambda)}{\kappa_n}$, где κ_n является старшим коэффициентом φ_n. Напомним, что многочлены φ_n называются ортонормированными, а многочлены ϕ_n - многочленами с единичным старшим коэффициентом.

Отметим, что в случае $\sigma(\theta) = \frac{1}{2\pi}\theta$ и $p_n(e^{i\theta}) = e^{in\theta}$ мы получаем часть стационарной последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ с неотрицательными индексами n. Это будет использовано в следующем пункте.

Напомним необходимые нам сведения из теории ортогональных многочленов на $\mathbb{T}$. Числа $a_n := \phi_n(0)$ известны, как параметры Шура. Известно, что $|a_n| < 1,\ n \in \mathbb{N}$. Ортонормированные многочлены φ_n удовлетворяют рекуррентному соотношению [27]

$$z\varphi_n(z) = \sum_{j=0}^{n+1} d_{n,j}\varphi_j(z), \tag{82}$$

где $d_{n,n+1} = \frac{\kappa_n}{\kappa_{n+1}},\ d_{n,j} = -\frac{\kappa_j}{\kappa_n}\overline{a_j}a_{n+1}$, а κ_j является старшим коэффициентом φ_j.

Известно, что [27, Proposition 2.2]

$$\kappa_n = \frac{\kappa_{n-1}}{\sqrt{1-|a_n|^2}},\ \kappa_0 = 1, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{83}$$

Обратно, любой набор чисел $a_0 = 1,\ a_n \in \mathbb{D},\ n \in \mathbb{N}$, задает систему ортонормированных многочленов на $\mathbb{T}$ с помощью соотношений (82),(83), где мы полагаем $\varphi_0 = 1$. Такое соответствие между наборами чисел и ортонормированными многочленами на $\mathbb{T}$ является взаимно-однозначным.

Имеет место следующая теорема

Теорема 5 *Пусть дана P-стационарная последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ с ортонормированными многочленами $\{p_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$. Тогда ее корреляционная функция $K_{n,m}$ удовлетворяет следующему разностному соотношению:*

$$\sum_{j=0}^{n+1}\sum_{k=0}^{m+1} d_{n,j}\overline{d_{m,k}}K_{j,k} = K_{n,m}, \qquad n,m \in \mathbb{Z}_+, \tag{84}$$

где $d_{n,j}$ из (82),(83).

Доказательство. Из соотношений (82),(80) следует, что

$$\sum_{j=0}^{n+1}\sum_{k=0}^{m+1} d_{n,j}\overline{d_{m,k}}K_{j,k} = \sum_{j=0}^{n+1}\sum_{k=0}^{m+1} d_{n,j}\overline{d_{m,k}}\int_0^{2\pi}\varphi_j(e^{i\theta})\overline{\varphi_k(e^{i\theta})}d < F_\theta x_0, x_0 >=$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{i\theta}\varphi_n(e^{i\theta})\overline{e^{i\theta}\varphi_m(e^{i\theta})}d < F_\theta x_0, x_0 >= K_{n,m}, \qquad n,m \in \mathbb{Z}_+.$$

□

В том случае, когда последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ состоит из линейно независимых элементов, справедливо обратное утверждение:

Теорема 6 *Пусть дана последовательность* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *в гильбертовом пространстве* H*, состоящая из линейно независимых элементов. Если корреляционная функция последовательности* $K_{n,m}$ *удовлетворяет разностному соотношению (84), то последовательность* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *является* P*-стационарной с ортонормированной системой многочленов в некотором гильбертовом пространстве* $\widetilde{H}\supseteq H$.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ является последовательностью, удовлетворяющей условию теоремы. Обозначим $M := \mathrm{Lin}\{x_0,x_1,x_2,...\}$ и $D := \mathrm{span}\{x_0,x_1,x_2,...\}$. Определим оператор V следующим образом:

$$Vx_n=\sum_{j=0}^{n+1}d_{n,j}x_j,\qquad n\in\mathbb{Z}_+, \tag{85}$$

где $d_{n,j}$ из (84), и продолжим это определение по линейности на M.

Для произвольных элементов $x^1,x^2\in M$, $x^1=\sum_{k=0}^{l}\alpha_kx_k$, $x^2=\sum_{j=0}^{r}\beta_jx_j$, $\alpha_k,\beta_j\in\mathbb{C}$, $l,r\in\mathbb{Z}_+$, мы можем записать

$$< Vx^1,Vx^2>_H=\sum_{k=0}^{l}\sum_{j=0}^{r}\alpha_k\overline{\beta_j}< Vx_k,Vx_j>_H=$$

$$=\sum_{k=0}^{l}\sum_{j=0}^{r}\alpha_k\overline{\beta_j}<\sum_{s=0}^{k+1}d_{k,s}x_s,\sum_{m=0}^{j+1}d_{j,m}x_m>_H=$$

$$=\sum_{k=0}^{l}\sum_{j=0}^{r}\alpha_k\overline{\beta_j}(\sum_{s=0}^{k+1}\sum_{m=0}^{j+1}d_{k,s}\overline{d_{j,m}}K_{s,m})=$$

$$=\sum_{k=0}^{l}\sum_{j=0}^{r}\alpha_k\overline{\beta_j}K_{k,j}=<\sum_{k=0}^{l}\alpha_kx_k,\sum_{j=0}^{r}\beta_jx_j>_H=< x^1,x^2>_H;$$

Следовательно, оператор V является изометрическим. Продолжим его по непрерывности на D. Если $D\neq H$, то для $x\in H$, $x=x_D+x_{H\ominus D}$, $x_D\in D$, $x_{H\ominus D}\in H\ominus D$, мы полагаем $Vx=Vx_D+x_{H\ominus D}$. Таким образом мы получаем изометрический оператор, определенный на всем H. Существует унитарный оператор U в некотором гильбертовом пространстве $\widetilde{H}\supseteq H$ такой, что

$$Ux=Vx,\qquad x\in H, \tag{86}$$

см. [28, с.367-368]. Покажем по индукции, что

$$x_n=\varphi_n(U)x_0,\qquad n\in\mathbb{Z}_+, \tag{87}$$

где $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ являются многочленами, определенными рекурсивно формулой (82) с коэффициентами $d_{n,j}$ из (84), $\varphi_0 := 1$. Как было замечено выше, такие многочлены ортонормированы на $\mathbb{T}$.

Для $n = 0$ равенство (87) выполнено. Предположим, что это равенство выполняется для $n = 0, 1, ..., k;\ k \in \mathbb{Z}_+$. Используя (85),(86),(82) и спектральное разложение оператора U: $U = \int_0^{2\pi} e^{i\theta} dF_\theta$, где $\{F_\theta\}_{\theta\in[0,2\pi]}$ есть ортогональное разложение единицы, мы записываем

$$x_{k+1} = \frac{1}{d_{k,k+1}}(Ux_k - \sum_{j=0}^{k} d_{k,j}x_j) = \frac{1}{d_{k,k+1}}(U\varphi_k(U)x_0 - \sum_{j=0}^{k} d_{k,j}\varphi_j(U)x_0) =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{d_{k,k+1}}(e^{i\theta}\varphi_k(e^{i\theta}) - \sum_{j=0}^{k} d_{k,j}\varphi_j(e^{i\theta}))dF_\theta x_0 = \int_0^{2\pi} \varphi_{k+1}(e^{i\theta})dF_\theta x_0;$$

$$x_{k+1} = \varphi_{k+1}(U)x_0.$$

Следовательно, соотношение (87) выполнено. Пользуясь определением P-стационарной последовательности мы заключаем, что $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ является P-стационарной последовательностью с ортонормированной системой многочленов в пространстве $\widetilde{H}$. $\square$

3.2 Разложение спектральной функции P-стационарной последовательности в ряд. Определение спектральной функции стационарной последовательности по части последовательности

Рассмотрим P-стационарную последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ в гильбертовом пространстве H с ортонормированной системой многочленов относительно функции $\sigma(\theta)$ в представлении (80). Посредством $\widetilde{p}(\theta)$ обозначим производную абсолютно непрерывной части $\sigma(\theta)$, которая существует п.в. на $[0, 2\pi]$. Хорошо известно, что условие Сегё

$$\int_0^{2\pi} \ln \widetilde{p}(\theta) d\theta > -\infty$$

является необходимым и достаточным условием неплотности многочленов в пространстве $L_2([0, 2\pi], d\sigma)$. Обозначим

$$\mathbf{X}_{\theta_1,\theta_2}(\theta) = \begin{cases} 1, & \theta \in [\theta_1, \theta_2] \\ 0, & \theta \in [0, 2\pi]\backslash[\theta_1, \theta_2] \end{cases}. \tag{88}$$

Имеет место следующее предложение:

Предложение 2 *Пусть дана P-стационарная последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ в гильбертовом пространстве H с ортонормированными многочленами $\{p_n(\cdot)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, весом $p(\theta)$ и разложением единицы $\{F_\theta\}_{\theta\in[0,2\pi]}$ в представлении (80). Предположим, что*

(i) функция $< F_\theta x_0, x_0 >$ абсолютно непрерывна на $[0, 2\pi]$ и, следовательно, существует п.в. на $[0, 2\pi]$ производная $(< F_\theta x_0, x_0 >)' =: f(\theta)$;

(ii) $f(\theta) \leq Cp(\theta),\ C \geq 0$ *на* $[0, 2\pi]$*;*
(iii) $\int_0^{2\pi} \ln p(\theta) d\theta = -\infty$.
Тогда

$$(F_{\theta_2} - F_{\theta_1})x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k, \tag{89}$$

где ряд сходится в метрике H*,* $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi]$ *и*

$$a_k = \int_0^{2\pi} \mathbf{X}_{\theta_1,\theta_2}(\theta) \overline{p_k(e^{i\theta})} p(\theta) d\theta. \tag{90}$$

Доказательство. Рассмотрим P-стационарную последовательность, удовлетворяющую условиям предложения. Для определенной выше функции $\mathbf{X}_{\theta_1,\theta_2}(\theta)$ можно записать

$$\int_0^{2\pi} |\mathbf{X}_{\theta_1,\theta_2}(\theta)|^2 d < F_\theta x_0, x_0 > \leq \int_0^{2\pi} d < F_\theta x_0, x_0 >= \|x_0\|^2 < \infty;$$

$$\int_0^{2\pi} |\mathbf{X}_{\theta_1,\theta_2}(\theta)|^2 p(\theta) d\theta \leq \int_0^{2\pi} p(\theta) d\theta < \infty.$$

Определим коэффициенты a_k посредством равенства (90). Для произвольных $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi]$ мы можем записать

$$\|(F_{\theta_2} - F_{\theta_1})x_0 - \sum_{k=0}^{N} a_k x_k\|^2 = \| \int_0^{2\pi} \mathbf{X}_{\theta_1,\theta_2}(\theta) dF_\theta x_0 -$$

$$- \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{N} a_k p_k(e^{i\theta}) dF_\theta x_0\|^2 = \int_0^{2\pi} \left| \mathbf{X}_{\theta_1,\theta_2}(\theta) - \sum_{k=0}^{N} a_k p_k(e^{i\theta}) \right|^2 *$$

$$*d < F_\theta x_0, x_0 >= \int_0^{2\pi} \left| \mathbf{X}_{\theta_1,\theta_2}(\theta) - \sum_{k=0}^{N} a_k p_k(e^{i\theta}) \right|^2 f(\theta) d\theta \leq$$

$$\leq C \int_0^{2\pi} \left| \mathbf{X}_{\theta_1,\theta_2}(\theta) - \sum_{k=0}^{N} a_k p_k(e^{i\theta}) \right|^2 p(\theta) d\theta \to 0, \quad N \to \infty,$$

поскольку многочлены плотны в $L_2([0, 2\pi], p)$. $\square$

Заметим, что последнее предложение, как и предложение 1, можно сформулировать и без требования абсолютной непрерывности $< F_\theta x_0, x_0 >$. Но тогда условия (ii) примут сложный, трудно проверяемый вид.

Обратимся теперь к вопросу об определении спектральной функции стационарной последовательности по части последовательности. Для этого нам понадобится специальная система ортонормированных многочленов, для которой условие Сегё не выполнено. Именно, рассмотрим число $\varepsilon_0 :\ 0 < \varepsilon_0 < 2\pi$ и функцию

$$p(\theta) := \left\{ \begin{array}{cc} 0, & \theta \in [0, \varepsilon_0) \\ \frac{1}{2\pi - \varepsilon_0}, & \theta \in [\varepsilon_0, 2\pi] \end{array} \right. . \tag{91}$$

Пусть $\{p_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ является системой ортонормированных многочленов относительно веса $p(\theta)$ на $[0,2\pi]$. Предположим, что многочлен p_k имеет вид

$$p_k(z)=\sum_{j=0}^{k} b_{k,j}z^j, \qquad b_{k,j}\in\mathbb{C},\ k\in\mathbb{Z}_+. \tag{92}$$

Заметим, что ортогональные многочлены на $\mathbb{T}$ с весом из (91) описаны в [29, с.54]. Имеет место следующая теорема:

Теорема 7 *Пусть последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ является стационарной последовательностью в гильбертовом пространстве H. Предположим, что разложение единицы $\{F_\theta\}_{\theta\in[0,2\pi]}$ из представления последовательности (1) обладает свойствами:*

(i) функция $< F_\theta x_0, x_0 >$ абсолютно непрерывна на $[0,2\pi]$ и, следовательно, п.в. на $[0,2\pi]$ существует производная $(< F_\theta x_0, x_0 >)' =: f(\theta)$;

(ii) $f(\theta)\le C,\ C\ge 0$ на $[0,2\pi]$;

(iii) $f(\theta)=0,\ \theta\in[0,\varepsilon_0],\ 0<\varepsilon_0<2\pi$.

Положим

$$\widehat{x}_k := \sum_{j=0}^{k} b_{k,j}x_j, \qquad k\in\mathbb{Z}_+, \tag{93}$$

где $b_{k,j}$ из (92).

Тогда

$$(F_{\theta_2}-F_{\theta_1})x_0=\sum_{k=0}^{\infty} a_k\widehat{x}_k, \tag{94}$$

где ряд сходится в метрике H, $\theta_1,\theta_2\in[0,2\pi]$ и

$$a_k=\int_0^{2\pi}\mathbf{X}_{\theta_1,\theta_2}(\theta)\overline{p_k(e^{i\theta})}p(\theta)d\theta, \tag{95}$$

с p_k из (92).

Доказательство. Пусть задана стационарная последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ в гильбертовом пространстве H, удовлетворяющая условиям теоремы. Определим последовательность $\{\widehat{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ с помощью (93). Последовательность $\{\widehat{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ является P-стационарной с многочленами $\{p_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ из (92), весовой функцией $p(\theta)$ из (91) и разложением единицы $\{F_\theta\}_{\theta\in[0,2\pi]}$ в представлении (80). Из условий (i)-(iii) теоремы следует, что для последовательности $\{\widehat{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ выполнены условия предложения 2. Применяя предложение 2 мы получаем, что имеет место соотношение (94). □

Пусть задана стационарная последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ в гильбертовом пространстве H со спектральным разложением (1). Полагаем

$$\widehat{F}_\theta := \begin{cases} F_{\theta+2\pi}-F_\pi, & \theta\in[-\pi,0] \\ F_\theta+F_{2\pi}-F_\pi, & \theta\in(0,\pi] \end{cases}. \tag{96}$$

Тогда $\{\widehat{F}_\theta\}_{\theta\in[-\pi,\pi]}$ является ортогональным разложением единицы, для которого справедливы соотношения (1),(2), в которых интегралы берутся в пределах $[-\pi,\pi]$. И наоборот, зная $\{\widehat{F}_\theta\}_{\theta\in[-\pi,\pi]}$ можно вычислить $\widehat{F}_\pi = F_{2\pi}$, $\widehat{F}_0 = F_{2\pi} - F_\pi$, чтобы получить $F_\pi, F_{2\pi}$, а затем используя (96) определить F_θ для всех $\theta \in [0,2\pi]$. Хорошо известно [26, Теорема 6.3, с.38], что функцию $(\widehat{F}_{\theta_2} - \widehat{F}_{\theta_1})x_0$, где $\theta_1,\theta_2 \in [-\pi,\pi]$ не являются точками с концентрированной массой для меры F, можно разложить в ряд:

$$(\widehat{F}_{\theta_2} - \widehat{F}_{\theta_1})x_0 = \frac{1}{2\pi}(\theta_2-\theta_1)x_0 + \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}:\ n\neq 0}\frac{e^{-i\theta_2 n} - e^{-i\theta_1 n}}{-in}x_n, \tag{97}$$

сходящийся в среднем квадратичном. Заметим, что этот ряд использует элементы x_n при $n<0$. Действительно, коэффициент при x_n при фиксированном θ_1 является тригонометрическим многочленом от θ_2, а значит обращается в нуль лишь при конечном числе значений из отрезка $[-\pi,\pi]$.

Предположим, что для $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ выполнены условия предыдущей теоремы. Мы можем вычислить

$$a_n := \int_0^{2\pi} e^{in\theta} f(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} e^{in\theta} d < F_\theta x_0, x_0 > = < \int_0^{2\pi} e^{in\theta} dF_\theta x_0, x_0 > =$$

$$= < x_n, x_0 >, \qquad n\in\mathbb{Z}_+.$$

Числа a_n являются коэффициентами Фурье функции $f(\theta)$. Функция $f(\theta)$ не принадлежит классу Харди H^2 на $\mathbb{D}$, поскольку условие (iii) последней теоремы невозможно для функций из H^2. Следовательно, найдутся ненулевые a_n, а значит и x_n при $n<0$. Таким образом, ряд (97) нельзя использовать для последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, если не знать всех элементов последовательности.

В перспективе можно рассматривать различные интерполяционные задачи для полиномиальных последовательностей, аналогичные интерполяционным задачам для стационарных последовательностей (см. [26],[30] и [31] для операторнозначных процессов). Также открыты вопросы о существовании разложения во временной области, аналогичного разложению Вольда для стационарных последовательностей, об аналоге разложения на регулярную и сингулярную части стационарной последовательности (см. [26],[32],[33]).

Помимо этого, другие классы систем ортогональных многочленов могут быть использованы при изучении случайных последовательностей, например, ортогональные многочлены на лучах [34].

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А.Н. Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве. // Бюлл. МГУ, - 1941. - 6. - С. 1-40.

2. Колмогоров А.Н. Кривые в гильбертовом пространстве, инвариантные по отношению к однопараметрической группе движений. // ДАН СССР, - 1940. - 26. - С. 6-9.

3. Колмогоров А.Н. Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовом пространстве. // ДАН СССР, - 1940. - 26. - С. 115-118.

4. Розанов Ю.А. Спектральная теория многомерных стационарных случайных процессов с дискретным временем. // УМН, - 1958. - 2(80). - С. 93-142.

5. Крейн М.Г. О проблеме продолжения винтовых дуг в гильбертовом пространстве. // ДАН СССР, - 1944. - 4. - С. 4-9.

6. Крейн М.Г. Винтовые линии в пространстве Лобачевского бесконечного числа измерений и лоренцовы преобразования. // УМН, - 1948. - 3(25). - С. 40-51.

7. Яглом А.М. Спектральные представления для различных классов случайных функций. // Тр. IV Всесоюз. мат. съезда, - 1963. - 1. - С. 250-273.

8. Karhunen K. Über lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. // Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. A. Math. Phys., - 1947. - 37. - P. 3-79.

9. Пугачев B.C. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. - М.: Гос. издат. тех.-теор. лит., - 1957.

10. Лившиц М.С., Янцевич А.А. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. - Харьков: Изд. Харьк. ун-та, - 1971.

11. Kirchev K., Zolotarev V. Nonstationary curves in Hilbert spaces and their correlation functions I. // Integr.Equat.Oper.Th., - 1994. - 19. - P. 270-289.

12. Kirchev K., Zolotarev V. Nonstationary curves in Hilbert spaces and their correlation functions II. // Integr.Equat.Oper.Th., - 1994. - 19. - P. 447-457.

13. Бендука Б., Железнякова Э.Ю. Корреляционная теория нестационарных последовательностей в гильбертовом пространстве. // Вестник ХГПУ, - 1997. - 7. - С. 14-20.

14. Загороднюк С.М. О свойствах последовательностей, имеющих спектральное разложение по системам полиномов. // Доповіді НАН України, - 1998. - 8. - С. 30-33.

15. Загороднюк С.М. О полиномиальных последовательностях в гильбертовом пространстве. // Вісник Харківськ. університету, Сер. "Математика, прикладна математика і механіка - 1999. - 458. - 62-78.

16. Дуб Дж.Л. Вероятностные процессы. - М.: Изд. иностр. лит., - 1956.

17. Петров В.В. Суммы независимых случайных величин. - М.: Наука, - 1972.

18. Бернштейн С.Н. Теория вероятностей. - Москва Ленинград: Гос.тех.-теор.издат., - 1934.

19. Талдыкин А.Т. Элементы прикладного функционального анализа. - М.: Высшая школа, - 1982. - 384 с.

20. Loéve M. Etude asymptotique de sommes de variables aléatoires liées. // J. Math. Pures Appl., - 1945. - 9. - P. 249-318.

21. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. - М.: Наука, - 1979. - 416 с.

22. Сеге Г. Ортогональные многочлены. - М.: Физматгиз, - 1962. - 500 с.

23. Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи. - М.: Мир, - 1968.

24. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. - Киев: Наукова думка, - 1965. - 800 с.

25. Бродский М.С. Треугольные и жордановы представления линейных операторов. - М.: Наука, - 1969.

26. Розанов Ю.А. Стационарные случайные процессы. - М.: Наука, - 1990. - 272 с.

27. Cantero M.J., Ferrer P., Moral L., Velázquez L. Functional analysis methods to study zeros and measures of orthogonal polynomials on the unit circle. // manuscript, - 2001.

28. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. - Москва Ленинград: гос.издат.тех.-теор.лит., - 1950, - 484 с.

29. Геронимус Я.Л. Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке. - М.: гос.издат.физ.-мат.лит., - 1958. - 240 с.

30. Klotz L. An interpolation problem for multivariate stationary sequences. // Kybernetika, - 2000. - 3. - P. 321-327.

31. Klotz L. An interpolation problem for Hilbert-Schmidt operator-valued stationary processes. // Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen, - 2001. - 2. - P. 525-535.

32. Klotz L. The maximal J-regular part of a q-variate weakly stationary process. // Probability and math. statistics, - 2002. - 1. - P. 155-165.

33. Klotz L., Schmidt F. Some remarks on J_0-regularity and J_0-singularity of q-variate stationary processes. // Probability and math. statistics, - 1998. - 2. - P. 351-357.

34. Zagorodnyuk S.M. On generalized Jacobi matrices and orthogonal polynomials. // New York J. Math., - 2003. - 9. - P. 117-135.