

ISSN 2221-5646

Міністерство освіти і науки України

ВІСНИК

Харківського національного
університету імені В.Н. Каразіна

Серія

«Математика, прикладна математика і механіка»

Серія започаткована 1965 р.

Том 82



Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University
Ser. “Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics”

Vol. 82

Харків
2015

До Віснику включено статті з математичного аналізу, диференціальних рівнянь, математичної теорії керування та механіки, які містять нові теоретичні результати у зазначених галузях і мають прикладне значення.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних сферах.

Затверджено до друку рішенням Вченої ради Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна (протокол №14 від 28 грудня 2015 р.).

Редакційна колегія:

Головний редактор – Коробов В.І. – д-р ф.-м. наук,
ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

Члени редакційної колегії:

Чуешов І.Д. – д-р ф.-м. наук, чл.-кор. НАН України,
ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

Гандель Ю.В. – д-р ф.-м. наук, ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

Гришин А.П. – д-р ф.-м. наук, ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

Пацегон М.Ф. – д-р ф.-м. наук, ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

Руткас А.Г. – д-р ф.-м. наук, ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

Склляр Г.М. – д-р ф.-м. наук, ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

Фаворов С.Ю. – д-р ф.-м. наук, ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

Щербина В.О. – д-р ф.-м. наук, ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

Янцевич А.А. – д-р ф.-м. наук, ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

Борисенко О.А. – д-р ф.-м. наук, чл.-кор. НАН України, м. Суми, Україна

Золотарьов В.О. – д-р ф.-м. наук, ФТІНТ, м. Харків, Україна

Дабровски А. – д-р ф.-мат. наук, університет, Щецин, Польща

Солдатов О.П. – д-р ф.-м. наук, гос. університет, м. Белгород, Росія

Карлович Ю. – д-р ф.-м. наук, національний університет, м. Мехіко, Мексика

Відповіdalьний секретар – канд. ф.-м. наук Резуненко О.В.,

ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна

Адреса редакційної колегії: 61022, Харків, майдан Свободи, 4,

ХНУ імені В.Н. Каразіна, механіко-математичний факультет, к.7-27.

Тел. 7075240, 7075135, Email: vestnik@univer.kharkov.ua

Інтернет:

<http://vestnik-math.univer.kharkov.ua/>

Статті пройшли внутрішнє та зовнішнє рецензування.

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 21568-11468 Р від 21.08.2015 р.

©Харківський національний університет
імені В.Н. Каразіна, оформлення, 2015

ЗМІСТ

Гордевський В. Д., Гукалов О. О. , Біомодальний розподіл з деякими максвелівськими модами для рівняння Брайана-Піддака.	4
Судиловская В. И., Опис операторів C -симетрії у випадку простору \mathbb{C}^2 .	19
Чуйко С. М., О решении линейных матричных уравнений.	27
Олейник Е. В., Исследование одного класса систем нелинейных уравнений.	34
Гук Н. А., Степанова Н. И., Идентификация жестких включений в тонкой пластине.	47
Зеленський О. В., Дармосюк В. М., Сума елементів зведеної матриці показників.	61
Гришин Анатолий Филиппович (некролог)	67

CONTENTS

V. D. Gordevskyy, O. O. Hukalov, The bimodal distribution with some Maxwell modes for the Bryan-Piddack equation.	4
V. I. Sudilovskaya, Description operator C -symmetry in the case of the space \mathbb{C}^2 .	19
S. M. Chuiko, The solution of the linear matrix equations.	27
E. V. Oliynyk, The study of solutions of a class of nonlinear systems.	34
N. A. Guk, N. I. Stepanova, Identification of rigid inclusions in the thin plate.	47
O. V. Zelenskiy, V. M. Darmosiuk, The sum of elements of the reduced exponent matrix.	61
Anatolij Filippovich Grishin (obituary)	67

Бімодальний розподіл з деякими максвелівськими
модами для рівняння Брайана-Піддака

В. Д. Гордевський, О. О. Гукалов

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

майдан Свободи, 4, 61022, Харків, Україна

gordevskyy2006@yandex.ru,

Фізико-технічний інститут низьких температур імені Б. І. Веркіна

проспект Леніна, 47, 61103, Харків, Україна

hukalov@ilt.kharkov.ua

Побудовано наближений розв'язок рівняння Брайана-Піддака у вигляді бімодального розподілу з максвелівськими модами, що описують рух газу типу "прискорення-ущільнення". Отримані різні достатні умови мінімізації відхилю з неоднорідною вагою для моделі шорсткуватих куль.

Ключові слова: рівняння Брайана-Піддака, шорсткуваті кулі, "прискорення-ущільнення", відхил з неоднорідною вагою.

Гордевский В. Д., Гукалов А. А. **Бимодальное распределение с некоторыми максвелловскими модами для уравнения Брайана-Пиддака.** Построено приближенное решение уравнения Брайана-Пиддака в виде бимодального распределения с максвелловскими модами, которые описывают движение газа типа "ускорение-уплотнение". Получены разные достаточные условия минимизации невязки с неоднородным весом для модели шероховатых сфер.

Ключевые слова: уравнение Брайана-Пиддака, шероховатые сферы, "ускорение-уплотнение", невязка с неоднородным весом.

V. D. Gordevskyy, O. O. Hukalov, **The bimodal distribution with some Maxwell modes for the Bryan-Piddack equation.** The approximate solution of Bryan-Piddack equation in the form of a bimodal distribution with the Maxwell modes that describe the motion of the gas type "Accelerating-Packing" is constructed . The sufficient conditions for minimization of inhomogeneous weighted residual for the model of rough spheres are obtained.

Keywords: Bryan-Piddack equation, rough spheres, "Accelerating-Packing", non-uniform weight.

2010 Mathematics Subject Classification 76P05, 45K05, 82C40, 35Q55.

Вступ

У цій статті розглядається модель шорсткуватих куль [1], яка вперше була введена у 1894р. Брайаном (Bryan). Методи, що були розвинуті для загальних сферичних молекул, які не обертаються, у 1922 р. були розповсюджені на модель Брайана Піддаком (Piddack), де було враховано обертання молекул. Перевага цієї моделі перед усіма іншими моделями, що припускають зміну стану обертання молекул, полягає у тому, що тут не потрібно ніяких додаткових змінних, які визначають орієнтацію молекули у просторі.

Вказані молекули є абсолютно пружними та абсолютно шорсткуватими, що означає наступне. В момент зіткнення двох молекул, точки, якими безпосередньо торкаються поверхні сфер, не мають у загальному випадку однакової швидкості. Передбачається, що дві сфери зачіпляють одна одну без ковзання. У початковий момент сфери деформують одна одну, а потім енергія деформації повертається назад у кінетичну енергію поступального та обертового руху без жодних втрат. У результаті відносна швидкість сфер у точці їх зіткнення змінюється при ударі на обернену.

Модель застосовується для одноатомних молекул та, враховуючи можливість обертання, є більш фізичною, ніж модель твердих куль та цікавою для вивчення.

Рівняння Больцмана для моделі шорсткуватих куль(або рівняння Брайана-Піддака) має вигляд [1-4]:

$$D(f) = Q(f, f); \quad (1)$$

$$D(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \left(V, \frac{\partial f}{\partial x} \right); \quad (2)$$

$$\begin{aligned} Q(f, f) \equiv & \frac{d^2}{2} \int_{R^3} dV_1 \int_{R^3} d\omega_1 \int_{\Sigma} d\alpha B(V - V_1, \alpha) \cdot \\ & \cdot \left[f(t, V_1^*, x, \omega_1^*) f(t, V^*, x, \omega^*) - f(t, V, x, \omega) f(t, V_1, x, \omega_1) \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Тут d – діаметр молекули, який пов'язаний з моментом інерції I наступним співвідношенням:

$$I = \frac{bd^2}{4}, \quad (4)$$

де b – параметр, $b \in (0, \frac{2}{3}]$, який характеризує ізотропний розподіл речовини всередині молекули; t – час; $x = (x^1, x^2, x^3) \in R^3$ – просторова координата; $V = (V^1, V^2, V^3)$ та $\omega = (\omega^1, \omega^2, \omega^3) \in R^3$ – лінійна та кутова швидкості молекули відповідно; $\frac{\partial f}{\partial x}$ – градієнт функції f по змінній x ; Σ – одинична сфера у просторі R^3 ; α – одиничний вектор із R^3 , що спрямований вздовж лінії, яка з'єднує центри молекул, які зіштовхуються;

$$B(V - V_1, \alpha) = |(V - V_1, \alpha)| - (V - V_1, \alpha) \quad (5)$$

— член зіткнення у виразі для інтеграла зіткнення (3).

Лінійні (V^*, V_1^*) та кутові (ω^*, ω_1^*) швидкості молекул після зіткнення виражуються через відповідні швидкості до зіткнення наступним чином [1]:

$$\begin{aligned} V^* &= V - \frac{1}{b+1} \left(b(V_1 - V) - \frac{bd}{2} \alpha \times (\omega + \omega_1) + \alpha(\alpha, V_1 - V) \right), \\ V_1^* &= V_1 + \frac{1}{b+1} \left(b(V_1 - V) - \frac{bd}{2} \alpha \times (\omega + \omega_1) + \alpha(\alpha, V_1 - V) \right), \\ \omega^* &= \omega + \frac{2}{d(b+1)} \left\{ \alpha \times (V - V_1) + \frac{d}{2} [\alpha(\omega + \omega_1, \alpha) - \omega - \omega_1] \right\}, \\ \omega_1^* &= \omega_1 + \frac{2}{d(b+1)} \left\{ \alpha \times (V - V_1) + \frac{d}{2} [\alpha(\omega + \omega_1, \alpha) - \omega - \omega_1] \right\}, \end{aligned} \quad (6)$$

де через символ \times позначено векторний добуток. Ці формули можна отримати, користуючись законами збереження імпульсу, сумарної енергії поступального та обертального руху (вперше вони наведені у роботі [5]).

Як відомо, загальний вигляд максвелівських розв'язків рівняння Больцмана для моделі твердих куль був отриманий в роботах [6-8], їх опис та дослідження можно також знайти у [9-11]. Аналогічна задача для моделі Брайана-Піддака була остаточно розв'язана тільки у роботі [12].

Зокрема, там отримано явний вигляд максвелівського розподілу, що описує рух газу типу "прискорення-ущільнення" для цієї моделі. Такий розподіл фізично представляє рух газу, при якому він летить з прискоренням та ущільнюється у всьому просторі. Він має наступне представлення:

$$M_i = \rho_i I^{3/2} \left(\frac{\beta_i}{\pi} \right)^3 e^{-\beta_i ((V - \bar{V}_i)^2 + I\omega^2)}, \quad (7)$$

де густина газу ρ_i (тут та усюди далі індекс i приймає значення 1 та 2) аналітично має вигляд:

$$\rho_i = \rho_{0i} e^{\beta_i (\bar{V}_i^2 + 2\bar{u}_i x)}, \quad (8)$$

ρ_{0i} — довільна додатня константа, $\beta_i = \frac{1}{2T_i}$ — величина, обернена до температури, \bar{V}_i — масова швидкість, що виражається наступним чином:

$$\bar{V}_i = \hat{V}_i - \bar{u}_i t, \quad (9)$$

\hat{V}_i, \bar{u}_i — довільні вектори у просторі R^3 .

Наблизений розв'язок рівняння (1) ми будемо шукати у вигляді бімодального розподілу:

$$f = \varphi_1 M_1 + \varphi_2 M_2, \quad (10)$$

де M_i — максвеліани з виглядом (7), а функції $\varphi_i = \varphi_i(t, x)$ — невід'ємні, гладкі та обираються таким чином, щоб відхил між частинами рівняння (1) був скіль завгодно малим.

У цій роботі у якості відхилю між лівою та правою частинами рівняння Брайана-Піддака буде розглянуто аналог відхилю з неоднорідною вагою для твердих куль, що був уперше введений у роботі [13]. У випадку моделі шорсткуватих куль він виглядає наступним чином:

$$\tilde{\Delta}_q = \sup_{(t,x) \in R^4} \frac{q(x)}{1+|t|} \int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega |D(f) - Q(f,f)|, \quad (11)$$

функція $q(x)$ – невід'ємна та обмежена у всьому просторі R^3 та відображає неоднорідність у відхилю з вагою [14].

Мета роботи полягає у знаходженні для моделі шорсткуватих куль, яка досліджується, вигляду функції $\varphi_i(t, x)$ та таких достатніх умов на гідродинамічні параметри максвелівських розподілів (7), функції $\varphi_i(t, x)$, щоб відхилю (11) можна було зробити скіль завгодно малим.

Основні результати

Теорема 1. *Нехай коефіцієнтні функції у розподілі (10) мають наступний вигляд:*

$$\varphi_i(t, x) = C_i \left(x + \bar{u}_i \frac{(\hat{V}_i - \bar{u}_i t)^2}{2\bar{u}_i^2} \right), \quad (12)$$

де C_i – невід'ємні, гладкі та обмежені у просторі R^4 зі своєю похідною функції.

Також нехай мають місце наступні припущення:

$$\bar{u}_i = \frac{\bar{u}_{0i}}{\beta_i^{n_i}}, \quad (13)$$

$$\hat{V}_i = \frac{\hat{V}_{0i}}{\beta_i^{k_i}}, \quad (14)$$

де $\bar{u}_{0i}, \hat{V}_{0i}$ – довільні тривимірні вектори, а показники n_i, k_i такі, що:

$$n_i \geq 1, \quad k_i \geq \frac{1}{2}, \quad k_i \geq \frac{1}{2}n_i. \quad (15)$$

Також будемо вимагати, щоб функція $q(x) \cdot e^{2\bar{u}_{0i}x}$ була обмежена у просторі R^3 .

Тоді має місце наступне твердження:

$$\lim_{\beta_i \rightarrow +\infty} \tilde{\Delta}_q = 0. \quad (16)$$

Доведення. Для доведення твердження (16), спочатку покажемо, що існує така величина $\tilde{\Delta}'_q$, що:

$$\tilde{\Delta}_q \leq \tilde{\Delta}'_q. \quad (17)$$

Для цього зробимо підстановку (10) у вираз (2):

$$\begin{aligned} D(f) &= M_1 D(\varphi_1) + \varphi_1 D(M_1) + M_2 D(\varphi_2) + \varphi_2 D(M_2) \\ &= M_1 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \left(V, \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) \right) + M_2 \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \left(V, \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) \right), \end{aligned}$$

а підставляючи до інтеграла зіткнень (3) та перетворюючи, здобудемо:

$$Q(f, f) = \varphi_1 \varphi_2 (Q(M_1, M_2) + Q(M_2, M_1)).$$

Як відомо [10]-[11], інтеграл зіткнень можна подати у наступному вигляді:

$$Q(f, g) = G(f, g) - f L(g), \quad (18)$$

де прибутковий член:

$$\begin{aligned} G(f, g) &= \frac{d^2}{2} \int_{R^3} dV_1 \int_{R^3} d\omega_1 \int_{\Sigma} d\alpha B(V - V_1, \alpha) \\ &\quad \times f(t, x, V_1^*, \omega_1^*) g(t, x, V^*, \omega^*), \end{aligned}$$

а витратний член має вигляд:

$$L(g) = \frac{d^2}{2} \int_{R^3} dV_1 \int_{R^3} d\omega_1 \int_{\Sigma} d\alpha B(V - V_1, \alpha) g(t, x, V_1, \omega_1).$$

У роботі [15] було продемонстровано, що:

$$\int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega Q(M_i, M_j) = 0, \quad (19)$$

тоді, враховуючи (18), отримуємо:

$$\int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega G(M_i, M_j) = \int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega M_i L(M_j). \quad (20)$$

Використовуючи рівності (18) та (20), а також вигляд лівої частини рівняння Брайана-Піддака (2) для функції (10) зробимо оцінку:

$$\begin{aligned} &|D(f) - Q(f, f)| \\ &\leq M_1 (|D(\varphi_1)| + \varphi_1 \varphi_2 L(M_2)) + M_2 (|D(\varphi_2)| + \varphi_1 \varphi_2 L(M_1)) \\ &\quad + \varphi_1 \varphi_2 (G(M_1, M_2) + G(M_2, M_1)). \end{aligned}$$

Проінтегрюючи останню нерівність по простору лінійних та кутових швидкостей, отримуємо:

$$\begin{aligned} &\int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega |D(f) - Q(f, f)| \\ &\leq \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^2 \int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega (|D(\varphi_i)| + \varphi_i \varphi_j L(M_j)) M_i + 2 \varphi_1 \varphi_2 \int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega G(M_1, M_2) \\ &= \sum_{i=1}^2 \int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega |D(\varphi_i)| M_i + 4 \varphi_1 \varphi_2 \int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega G(M_1, M_2). \end{aligned}$$

Далі, використаємо доведену у роботі [4] наступну формулу:

$$\begin{aligned} & \int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega G(M_1, M_2) \\ &= \frac{d^2 \rho_1 \rho_2}{\pi^2} \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \bar{V}_1 - \bar{V}_2 \right|. \end{aligned} \quad (21)$$

Тепер, використовуючи вигляд максвеліанів (7) та останню рівність (21), продовжимо оцінку:

$$\begin{aligned} & \int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega |D(f) - Q(f, f)| \\ & \leq \sum_{i=1}^2 \int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(V, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) \right| \rho_i I^{3/2} \left(\frac{\beta_i}{\pi} \right)^3 e^{-\beta_i ((V - \bar{V}_i)^2 + I\omega^2)} \\ & \quad + \frac{4d^2 \rho_1 \rho_2 \varphi_1 \varphi_2}{\pi^2} \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \bar{V}_1 - \bar{V}_2 \right|. \end{aligned}$$

Обчислюючи потрійний інтеграл по кутовим швидкостям ω та використовуючи вигляд масової швидкості (9), отримуємо:

$$\begin{aligned} & \int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega |D(f) - Q(f, f)| \\ & \leq \sum_{i=1}^2 \int_{R^3} dV \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(V, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) \right| \rho_i \left(\frac{\beta_i}{\pi} \right)^{3/2} e^{-\beta_i (V - \bar{V}_i)^2} \\ & \quad + \frac{4d^2 \rho_1 \rho_2 \varphi_1 \varphi_2}{\pi^2} \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + (\hat{V}_1 - \hat{V}_2) + (\bar{u}_1 - \bar{u}_2) t \right|, \end{aligned}$$

зробимо заміну змінних:

$$V = \frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \bar{V}_i,$$

та помножуючи на $\frac{q(x)}{1+|t|}$, а далі переходячи до супремуму по усьому простору часу і просторової координати будемо мати:

$$\begin{aligned} & \tilde{\Delta}_q \leq \tilde{\Delta}'_q \\ &= \sup_{(t,x) \in R^4} \frac{q(x)}{1+|t|} \sum_{i=1}^2 \frac{\rho_i}{\pi^{3/2}} \int_{R^3} dV \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \hat{V}_i - \bar{u}_i t, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) \right| e^{-p^2} \\ & \quad + \sup_{(t,x) \in R^4} \frac{q(x)}{1+|t|} \cdot \frac{4d^2 \rho_1 \rho_2 \varphi_1 \varphi_2}{\pi^2} \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \\ & \quad \times \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + (\hat{V}_1 - \hat{V}_2) + (\bar{u}_1 - \bar{u}_2) t \right|, \end{aligned} \quad (22)$$

де густина газу ρ_i з врахуванням масової швидкості (9) набуває вигляду:

$$\rho_i = \rho_{0i} e^{\beta_i ((\hat{V}_i - \bar{u}_i t)^2 + 2\bar{u}_i x)}. \quad (23)$$

Для коректної визначеності правої частини нерівності (22) достатньо, щоб добуток множника $\frac{q(x)}{1+|t|}$ на кожну із наступних функцій:

$$t\varphi_i\rho_i, \quad \frac{\partial\varphi_i}{\partial t}\rho_i, \quad \left|\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\right|\rho_i, \quad t\rho_i\left(\bar{u}_i, \frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\right)$$

був обмежений на R^4 , що випливає з вигляду коефіцієнтої функції (12), густини (23) та накладених умов на функцію C_i , її похідну і добуток $q(x) \cdot e^{2\bar{u}_{0i}x}$. Значення добутків $\sqrt{|t|}\varphi_i\rho_i$ та $|t|\varphi_1\varphi_2\rho_1\rho_2$ у зв'язку з гладкістю функцій φ_i обмежені у R^4 .

Далі знаходимо похідні функції φ_i , які містяться у правій частині нерівності (22):

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial t} = \left(C'_i, \bar{u}_i\right) \frac{(\widehat{V}_i, \bar{u}_i) - t\bar{u}_i^2}{\bar{u}_i^2}, \quad (24)$$

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x} = C'_i \left(x + \bar{u}_i \frac{(\widehat{V}_i - \bar{u}_i t)^2}{2\bar{u}_i^2} \right), \quad (25)$$

де через C'_i позначено градієнт функції C_i за її векторним аргументом. Тепер переходимо до низькотемпературної границі у нерівності (22), для чого знайдемо границю густини газу з врахуванням (23) в залежності від значень коефіцієнтів n_i, k_i :

$$\lim_{\beta_i \rightarrow +\infty} \rho_i = \begin{cases} \rho_{0i}, & n_i > 1, \quad k_i > \frac{1}{2}; \\ \rho_{0i}e^{2\bar{u}_{0i}x}, & n_i = 1, \quad k_i > \frac{1}{2}; \\ \rho_{0i}e^{\widehat{V}_{0i}^2 + 2\bar{u}_{0i}x}, & n_i = 1, \quad k_i = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Крім того, з врахуванням умов (13), (14) маємо:

$$\lim_{\beta_i \rightarrow +\infty} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + (\widehat{V}_1 - \widehat{V}_2) + (\bar{u}_1 - \bar{u}_2)t \right| = 0,$$

$$\lim_{\beta_i \rightarrow +\infty} \frac{\partial\varphi_i}{\partial t} = 0.$$

І на останок знаходимо границю коефіцієнтої функції φ_i та її градієнта:

$$\begin{aligned} & \lim_{\beta_i \rightarrow +\infty} \varphi_i \\ &= \lim_{\beta_i \rightarrow +\infty} C_i \left(x + \bar{u}_{0i} \beta^{-n_i} \frac{(\widehat{V}_{0i} \beta_i^{-k_i} - \bar{u}_{0i} \beta_i^{-n_i} t)^2}{2\bar{u}_{0i}^2 \beta^{-2n_i}} \right) \\ &= \begin{cases} C_i(x), & k_i > \frac{1}{2}n_i; \\ C_i \left(x + \bar{u}_{0i} \frac{\widehat{V}_{0i}^2}{2\bar{u}_{0i}^2} \right), & k_i = \frac{1}{2}n_i; \end{cases} \\ & \lim_{\beta_i \rightarrow +\infty} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = \begin{cases} C'_i(x), & k_i > \frac{1}{2}n_i; \\ C'_i \left(x + \bar{u}_{0i} \frac{\widehat{V}_{0i}^2}{2\bar{u}_{0i}^2} \right), & k_i = \frac{1}{2}n_i, \end{cases} \end{aligned}$$

звідки ми отримуємо, що границя при $\beta_i \rightarrow +\infty$ правої частини нерівності (22) дорівнює нулю, що і стверджує рівність (16). **Теорема доведена.**

Зауваження 1. Функція $q(x)$ може бути не тільки обмеженою, но і фінітною або швидкоспадаючою, хоча би за напрямками, що паралельні \bar{u}_{0i} .

Зауваження 2. Умови (13), (14) необхідні для існування низькотемпературної границі величини $\widetilde{\Delta}'_q$. Крім того, далі у роботі буде розглянуто і інші можливі значення показника n_i .

Теорема 2. *Припустимо, що функції φ_i у бімодальному розподілі (10) наступного вигляду:*

$$\varphi_i(t, x) = \psi_i(t, x) \cdot e^{-\beta_i ((\widehat{V}_i - \bar{u}_i t)^2 + 2\bar{u}_i x)}, \quad (26)$$

то функції:

$$t\psi_1\psi_2, \quad t\psi_i, \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial t}, \quad \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right|, \quad t \left(\bar{u}_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right) \quad (27)$$

після помноження на $\frac{q(x)}{1+|t|}$ обмежені по $(t, x) \in R^4$. Крім того залишило у силі розклад (13), змінивши значення показника n_i на наступні:

$$n_i > \frac{1}{2}. \quad (28)$$

Тоді, якщо розглянути функції $\psi_i(t, x)$ у вигляді:

$$\psi_i = C_i \left(x - \widehat{V}_i t \right) \quad (29)$$

або

$$\psi_i = C_i \left([x \times \widehat{V}_i] \right), \quad (30)$$

де C_i – невід’ємні, гладкі та обмежені функції на R^4 та, крім цього, добутки $q(x) \cdot C_i$ та $q(x) \cdot C'_i$ обмежені, а

$$\widehat{V}_1 = \widehat{V}_2, \quad (31)$$

то залишається в силі рівність (16).

Доведення. Спочатку знову побудуємо оцінку (17) та покажемо, що:

$$\begin{aligned} & \lim_{\beta_i \rightarrow +\infty} \widetilde{\Delta}'_q \\ &= \sup_{(t,x) \in R^4} \frac{q(x)}{1+|t|} \sum_{i=1}^2 \rho_{0i} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \left(\widehat{V}_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right) \right| \\ &+ 4\pi d^2 \rho_{01} \rho_{02} \left| \widehat{V}_1 - \widehat{V}_2 \right| \sup_{(t,x) \in R^4} \frac{q(x)}{1+|t|} (\psi_1 \psi_2). \end{aligned} \quad (32)$$

При доведенні теореми 1 була отримана оцінка (22), у якій похідні коефіцієнтних функцій у випадку (26) мають вигляд:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = e^{-\beta_i ((\widehat{V}_i - \bar{u}_i t)^2 + 2\bar{u}_i x)} \left\{ \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + 2\beta_i \psi_i \left((\widehat{V}_i, \bar{u}_i) - \bar{u}_i^2 t \right) \right\}, \quad (33)$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = e^{-\beta_i ((\widehat{V}_i - \bar{u}_i t)^2 + 2\bar{u}_i x)} \left\{ \frac{\partial \psi_i}{\partial x} - 2\beta_i \bar{u}_i \psi_i \right\}. \quad (34)$$

Тепер підставимо тільки що знайдені похідні у праву частину нерівності (22), отримаємо:

$$\begin{aligned} & \widetilde{\Delta}_q \leq \widetilde{\Delta}'_q \\ &= \sup_{(t,x) \in R^4} \frac{q(x)}{1+|t|} \sum_{i=1}^2 \frac{\rho_i}{\pi^{3/2}} \int_{R^3} dp \left| e^{-\beta_i ((\widehat{V}_i - \bar{u}_i t)^2 + 2\bar{u}_i x)} \right. \\ & \quad \times \left. \left\{ \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + 2\beta_i \psi_i \left((\widehat{V}_i, \bar{u}_i) - t\bar{u}_i^2 \right) \right\} \right. \\ & \quad + \left. \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \widehat{V}_i - \bar{u}_i t, e^{-\beta_i ((\widehat{V}_i - \bar{u}_i t)^2 + 2\bar{u}_i x)} \left\{ \frac{\partial \psi_i}{\partial x} - 2\beta_i \bar{u}_i \psi_i \right\} \right) \right| e^{-p^2} \\ & \quad + \sup_{(t,x) \in R^4} \frac{q(x)}{1+|t|} \cdot \frac{4d^2 \rho_1 \rho_2 \varphi_1 \varphi_2}{\pi^2} \\ & \quad \times \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + (\widehat{V}_1 - \widehat{V}_2) + (\bar{u}_2 - \bar{u}_1)t \right|. \end{aligned}$$

Далі враховуючи вираз (23) для густини ρ_i та вигляд коефіцієнтної функ-

ції (26), що перетворить вираз для $\tilde{\Delta}'_q$ до наступного вигляду:

$$\begin{aligned} & \sup_{(t,x) \in R^4} \frac{q(x)}{1+|t|} \sum_{i=1}^2 \frac{\rho_{0i}}{\pi^{3/2}} \int_{R^3} dp \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \widehat{V}_i - \bar{u}_i t, \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right) - 2\sqrt{\beta_i} \bar{u}_i \psi_i p \right| e^{-p^2} \\ & + \sup_{(t,x) \in R^4} \frac{q(x)}{1+|t|} \cdot \frac{4d^2 \rho_{01} \rho_{02} \psi_1 \psi_2}{\pi^2} \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2-q_1^2} \\ & \times \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + (\widehat{V}_1 - \widehat{V}_2) - (\bar{u}_1 - \bar{u}_2) t \right|, \end{aligned}$$

та, використовуючи умову теореми (28), отримаємо наступне представлення для $\tilde{\Delta}'_q$:

$$\begin{aligned} & \sup_{(t,x) \in R^4} \frac{q(x)}{1+|t|} \sum_{i=1}^2 \frac{\rho_{0i}}{\pi^{3/2}} \int_{R^3} dp \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \widehat{V}_i - \frac{\bar{u}_{0i}}{\beta_i^{n_i}} t, \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right) \right. \\ & \left. - 2\sqrt{\beta_i} \psi_i p \frac{\bar{u}_{0i}}{\beta_i^{n_i}} \right| e^{-p^2} + \frac{4d^2 \rho_{01} \rho_{02}}{\pi^2} \sup_{(t,x) \in R^4} \frac{q(x)}{1+|t|} \cdot (\psi_1 \psi_2) \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2-q_1^2} \\ & \times \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + (\widehat{V}_1 - \widehat{V}_2) - \left(\frac{\bar{u}_{01}}{\beta_1^{n_1}} - \frac{\bar{u}_{02}}{\beta_2^{n_2}} \right) t \right|, \end{aligned}$$

і, виконуючи граничний перехід ($\beta_i \rightarrow +\infty$) в останньому виразі, отримуємо, що:

$$\begin{aligned} & \lim_{\beta_i \rightarrow +\infty} \tilde{\Delta}'_q \\ & = \sup_{(t,x) \in R^4} \frac{q(x)}{1+|t|} \sum_{i=1}^2 \frac{\rho_{0i}}{\pi^{3/2}} \int_{R^3} dp \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \left(\widehat{V}_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right) \right| e^{-p^2} \\ & + \frac{4d^2 \rho_{01} \rho_{02}}{\pi^2} \sup_{(t,x) \in R^4} \frac{q(x)}{1+|t|} \cdot (\psi_1 \psi_2) \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 \left| \widehat{V}_1 - \widehat{V}_2 \right| e^{-q^2-q_1^2}, \end{aligned}$$

та, обчислюючи інтеграл за зміною p , отримуємо рівність (32).

Далі обчислюємо похідні функції ψ_i у вигляді (29), тобто:

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} = - \left(\widehat{V}_i, C'_i \right), \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial x} = C'_i, \quad (35)$$

а для випадка (30):

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial x} = - \left[C'_i \times \widehat{V}_i \right], \quad (36)$$

Тобто, знайдені похідні (35) та (36) занулюють перший доданок (32), а другий доданок зникає завдяки рівності (31). Таким чином, у припущеннях теореми 2 виконується рівність (16). **Теорема доведена.**

Розглянемо ще один результат для досліджуваного відхила з неоднорідною вагою (11).

Теорема 3. *Нехай функції φ_i в шуканому розв'язку (10) мають наступний вигляд:*

$$\varphi_i(t, x) = \psi_i(t, x) \cdot e^{-\beta_i(\widehat{V}_i - \bar{u}_i t)^2}, \quad (37)$$

де добуток функцій (27) на множник $e^{2\beta_i \bar{u}_i x}$ обмежений з вагою $\frac{q(x)}{1+|t|}$.

Також нехай має місце представлення (13) з показником степеня $n_i \geq 1$. Тоді твердження (16) залишається вірним, якщо:

- a) у випадку $n_i > 1$ функції $\psi_i(t, x)$ мають вигляд (29) або (30), крім того, виконується умова (31) або:

$$supp C_1 \cap supp C_2 = \emptyset, \quad (38)$$

де C_i та C'_i – обмежені функції. Функція $q(x)$ повинна бути фінітною або швидкоспадаючою на нескінченості.

- b) якщо $n_i = 1$ необхідно до умов поперединього пункта додати наступну вимогу:

$$(\bar{u}_i, \widehat{V}_i) = 0. \quad (39)$$

Доведення. Знову покажемо, що при вигляді коефіцієнтних функцій (37) у випадку $n_i > 1$ залишається вірною рівність (32), а коли має місце $n_i = 1$, то:

$$\begin{aligned} & \lim_{\beta_i \rightarrow +\infty} \widetilde{\Delta}'_q \\ &= \sum_{i=1}^2 \rho_{0i} \sup_{(t,x) \in R^4} \frac{q(x)}{1+|t|} e^{2\bar{u}_{0i}} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \left(\widehat{V}_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right) \right| \\ &+ 4\pi d^2 \rho_{01} \rho_{02} \left| \widehat{V}_1 - \widehat{V}_2 \right| \sup_{(t,x) \in R^4} \frac{q(x)}{1+|t|} e^{2(u_{01}x + u_{02}x)} \psi_1(t, x) \psi_2(t, x) \\ &+ 2 \sum_{i=1}^2 \rho_{0i} \left| \left(\bar{u}_{0i}, \widehat{V}_i \right) \right| \sup_{(t,x) \in R^4} \frac{q(x)}{1+|t|} e^{2\bar{u}_{0i}x} \psi_i(t, x). \end{aligned} \quad (40)$$

Як і раніше, залишається вірною нерівність (22). Обчислимо похідні коефіцієнтних функцій (37). За зміною t будемо мати:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = e^{-\beta_i(\widehat{V}_i - \bar{u}_i t)^2} \left\{ \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + 2\beta_i \psi_i \left((\bar{u}_i, \widehat{V}_i) - \bar{u}_i^2 t \right) \right\}, \quad (41)$$

а по просторовій координаті:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = e^{-\beta_i(\widehat{V}_i - \bar{u}_i t)^2} \frac{\partial \psi_i}{\partial x}. \quad (42)$$

Знайдені похідні (41), (42) підставимо до правої частини нерівності (22) та використаємо вираз для густини (23), що дозволяє подати вираз для $\tilde{\Delta}'_q$ наступним чином:

$$\begin{aligned} & \sup_{(t,x) \in R^4} \frac{q(x)}{1+|t|} \sum_{i=1}^2 \frac{\rho_{0i} e^{2\beta_i \bar{u}_i x}}{\pi^{3/2}} \int_{R^3} dp \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + 2\beta_i \psi_i \left((\bar{u}_i, \hat{V}_i) - \bar{u}_i^2 t \right) \right. \\ & \left. + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \hat{V}_i - \bar{u}_i t, \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right) \right| e^{-p^2} + \frac{4d^2 \rho_{01} \rho_{02}}{\pi^2} \sup_{(t,x) \in R^4} \frac{q(x)}{1+|t|} \psi_1 \psi_2 e^{2(\beta_1 \bar{u}_1 x + \beta_2 \bar{u}_2 x)} \\ & \times \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \hat{V}_1 - \hat{V}_2 + (\bar{u}_2 - \bar{u}_1)t \right|, \end{aligned}$$

та, користуючись представленням (13), отримуємо:

$$\begin{aligned} & \sup_{(t,x) \in R^4} \frac{q(x)}{1+|t|} \sum_{i=1}^2 \frac{\rho_{0i} e^{2\beta_i \bar{u}_{0i} \beta_i^{-n_i} x}}{\pi^{3/2}} \int_{R^3} dp \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + 2\beta_i \psi_i \left((\bar{u}_{0i}, \hat{V}_i) \beta_i^{-n_i} - \bar{u}_{0i}^2 t \beta_i^{-2n_i} \right) \right. \\ & \left. + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \hat{V}_i - \bar{u}_{0i} t \beta_i^{-n_i}, \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right) \right| e^{-p^2} \\ & + \frac{4d^2 \rho_{01} \rho_{02}}{\pi^2} \sup_{(t,x) \in R^4} \frac{q(x)}{1+|t|} \psi_1 \psi_2 e^{2(\beta_1^{1-n_1} \bar{u}_{01} x + \beta_2^{1-n_2} \bar{u}_{02} x)} \\ & \times \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \hat{V}_1 - \hat{V}_2 + (\bar{u}_{02} \beta_2^{-n_2} - \bar{u}_{01} \beta_1^{-n_1})t \right|, \quad (43) \end{aligned}$$

Виконуючи низькотемпературний граничний перехід у останньому виразі у випадку $n_i > 1$ та, інтегруючи за зміною p , ми отримаємо саме вираз (32), а якщо $n_i = 1$, то границя величини $\tilde{\Delta}'_q$ складе:

$$\begin{aligned} & \sup_{(t,x) \in R^4} \frac{q(x)}{1+|t|} \sum_{i=1}^2 \frac{\rho_{0i} e^{2\bar{u}_{0i} x}}{\pi^{3/2}} \int_{R^3} dp \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + 2\psi_i \left(\bar{u}_{0i}, \hat{V}_i \right) + \left(\hat{V}_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right) \right| e^{-p^2} \\ & + \frac{4d^2 \rho_{01} \rho_{02}}{\pi^2} \sup_{(t,x) \in R^4} \frac{q(x)}{1+|t|} \psi_1 \psi_2 e^{2(\bar{u}_{01} x + \bar{u}_{02} x)} \times \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \left| \hat{V}_1 - \hat{V}_2 \right|, \end{aligned}$$

що після елементарних перетворень і дає (40).

Далі, якщо $n_i > 1$, перевіримо, що функції вигляду (29), (30) з урахуванням (31), (38) та обмеженості функцій C_i та C'_i задовільняє умовам теореми 3.

Для цього перевіримо обмеженість наступних функцій:

$$\frac{q(x)}{1+|t|} t \psi_1 \psi_2 e^{2(\beta_1 \bar{u}_1 x + \beta_2 \bar{u}_2 x)}, \quad (44)$$

$$\frac{q(x)}{1+|t|} \frac{\partial \psi_i}{\partial t} e^{2\beta_i \bar{u}_i x}, \quad (45)$$

$$\frac{q(x)}{1+|t|} t \psi_i e^{2\beta_i \bar{u}_i x}, \quad (46)$$

$$\frac{q(x)}{1+|t|} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right| e^{2\beta_i \bar{u}_i x}, \quad (47)$$

$$\frac{q(x)}{1+|t|} t \left(\bar{u}_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right) e^{2\beta_i \bar{u}_i x}. \quad (48)$$

Вираз (48) для функцій (29) та (30) в силу того, що носії не перетинаються, тотожнью дорівнює нулю. Якщо використовувати умову (31), то враховуючи обмеженість функцій C_i та фінітність або швидке спадання $q(x)$ вираз (48) все одно залишається обмеженим.

Також вираз (49) обертається на нуль для випадка (30), а для (29) він буде обмежений завдяки накладених умов на C'_i та функцію $q(x)$. Усі інші вирази (50), (47) та (48) можна оцінити аналогічним чином, використовуючи значення похідних (35), (36).

Тепер, спираючись на (31) або (38) та формули для похідних (35) і (36), отримаємо твердження (16) для випадку $n_i > 1$.

Коли $n_i = 1$ використаємо значення границі (40). Фінітність або достатньо швидке спадання функції $q(x)$ забезпечує обмеженість усіх виразів, що входять до (40) та поглинає зростання $e^{2\bar{u}_{0i} x}$.

У підсумку, використовуючи (31) або (38), (35) та (36), а також умову перпендикулярності векторів \bar{u}_i та \bar{V}_i (39) отримуємо твердження (16) у випадку $n_i = 1$. **Теорема доведена.**

Висновки

Розглянуте відхилення з неоднорідною вагою (11) дозволило отримати для моделі Брайана-Піддака низку нових наблизжених розв'язків у вигляді бімодального розподілу з коефіцієнтними функціями від просторової координати та часу з максвелівськими модами, що описують рух газу типу "прискорення-ущільнення". Слід зазначити, що вдається отримати явний вигляд цих розв'язків, а не тільки встановити їх існування. Отримані результати можуть бути використані при подальшому вивчені рівняння Брайана-Піддака.

Таким чином, результати, що були раніше отримані для більш простої фізично моделі твердих куль, вдається поширити і на модель шорсткуватих куль.

Подяка. Роботу виконано за часткової підтримки НАН України, Проект "Лінійні еволюційні рівняння у гільбертовому просторі та рівняння Больцмана".

Література

1. С.Чепмен, Т.Каулинг. Математическая теория неоднородных газов, пер. с англ. Е. В. Малиновской; под ред. Н.Н. Боголюбова М. : Изд-во иностр. лит., 1960г. — 510 с.
2. Cercignani C., Lampis M. On the kinetic theory of a dense gas of rough spheres. J. Statist. Phys., 1988. — **53**. — P. 655–672.
3. Gordevsky V.D. Explicit approximate solutions of the Boltzmann equation for the model of rough spheres // Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine (2000), **4**, P. 10–13, (Ukrainian).
4. Gordevskyy V.D. Approximate Billow Solutions of the Kinetic Bryan-Pidduck Equation – Math. Meth. Appl. Sci., 2000. – **23**. – P. 1121–1137.
5. Bryan G.H. On the Application of the Determinantal Relation to the Kinetic Theory of Polyatomic Gases // Rep. British Ass. Adv. Sci., 1894. — Vol. **64**. — P.102–106.
6. Карлеман Т. Математические задачи кинетической теории газов. М. : ИИЛ, (пер. с франц.), 1960. — 118 с.
7. Grad H. On the kinetic theory of racefied gases //Comm. Pure and Appl. Math., 1949. — **2**. — №4 — P. 331–407.
8. Фридлендер О.Г. Локально-максвелловские решения уравнения Больцмана //Прикладная математика и механика, 1965. — **29**. — №5. — С. 973 – 977.
9. Gordevskyy V.D. On the non-stationary Maxwellians // Math. Meth. Appl. Sci. – 2004. – **27**. – P.231–247.
10. Черчиньни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. — М. : Мир, 1978. — 495 с.
11. Коган М.Н. Динамика разреженного газа. – М. : Наука, 1967. — 440 с.
12. Гордевский В.Д., Гукалов А.А. Максвелловские распределения в модели шероховатых сфер // Укр. мат. журн., 2011. — **63**. — №5. – С. 629–639.

13. Lemesheva N.V. Bimodal Distributions in the Space of a Non-Uniform Weight // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, 2015. — **11**. — № 3. — P. 267–278.
14. Гордевский В.Д., Гукалов А.А. "Взаимодействие локально-максвелловских потоков в модели шероховатых сфер" // ТМФ — 176:2, 2013. — С. 322–336.
15. Гордевский В.Д., Гукалов А.А. Взаимодействие смерчевых потоков в модели Бриана-Пиддака // Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. Серія "Математика, прикладна математика і механіка 2011. — №990, Випуск 64, С. 27–41.

Стаття одержана: 20.10.2015; перероблений варіант: 28.10.2015;
прийнята: 5.11.2015.

Опис операторів C -симетрії у випадку простору \mathbb{C}^2

В. І. Суділовська

*Київський професійний коледж,
Київ, Україна
veronica.sudi@gmail.com*

Описано всі оператори C в двовимірному гільбертовому просторі \mathbb{C}^2 за допомогою матриць Паулі. Знайдено умови на $J_{\vec{\alpha}}$ -самоспряженій оператор, які гарантують йому властивість C -симетрії.

Ключові слова: простір Крейна, індефінітна метрика, C -симетрія, матриці Паулі.

Судиловская В. И., **Описание операторов C -симметрии в случае пространства \mathbb{C}^2 .** Описаны все операторы C в двумерном гильбертовом пространстве \mathbb{C}^2 с помощью матриц Паули. Найдены условия на $J_{\vec{\alpha}}$ - самоспряженного оператора, гарантирующих ему свойство C -симметрии.

Ключевые слова: пространство Крейна, индефинитная метрика, C -симметрия, матрица Паули.

V. I. Sudilovskaya, **Description operator C -symmetry in the case of the space \mathbb{C}^2 .** We describe all operators C in two-dimensional Hilbert space \mathbb{C}^2 using Pauli matrices. The conditions for $J_{\vec{\alpha}}$ -adjoint operator, which guarantee it the property of C -symmetry.

Keywords: Krein spaces, indefinite metrics, C -symmetry, Pauli matrices.

2000 Mathematics Subject Classification: 47A55, 47A57, 47B25.

Вступ

Розвиток псевдо-єрмітової квантової механіки протягом останніх десятиліть [3, 4, 10] привів до необхідності вивчення нових класів несамоспряженіх операторів. Одним з таких класів є несамоспряжені оператори з властивістю C -симетрії.

Властивість C -симетрії для несамоспряженого оператора A , який діє в гільбертовому просторі \mathfrak{H} , означає існування обмеженого лінійного оператора¹ C в \mathfrak{H} з наступними властивостями:

- (i) $C^2 = I$;
- (ii) оператор JC є додатним в \mathfrak{H} ;
- (iii) $ACf = CAf$ має сенс для всіх f з області визначення $\mathcal{D}(A)$ оператора A .

В умові (ii) цього означення, обмежений оператор J задовольняє властивості $J^2 = I$, $J^* = J$, де J^* означає спряжений оператор для оператора J відносно скалярного добутку (\cdot, \cdot) простору \mathfrak{H} . Оператор J з такими властивостями називається *фундаментальною симетрією*.

Довільна фундаментальна симетрія J та початковий гільбертів простір \mathfrak{H} з скалярним добутком (\cdot, \cdot) дозволяє визначити півторалінійну форму (індефінітну метрику) $[f, g] = (Jf, g)$, $f, g \in \mathfrak{H}$.

Гільбертів простір \mathfrak{H} з індефінітною метрикою $[\cdot, \cdot]$ називається простором Крейна² і позначається як $(\mathfrak{H}, [\cdot, \cdot])$.

Припустимо, що несамоспряженій в гільбертовому просторі \mathfrak{H} оператор A є самоспряженім відносно індефінітної метрики $[\cdot, \cdot]$. Якщо, у цьому випадку, оператор A має властивість C -симетрії, то цей оператор стане самоспряженім відносно нового скалярного добутку $(\cdot, \cdot)_C$ гільбертового простору \mathfrak{H} , визначеного за допомогою оператора C :

$$(f, g)_C = [Cf, g] = (JCf, g), \quad f, g \in \mathfrak{H}.$$

Отже існування C -симетрії для самоспряженого в просторі Крейна $(\mathfrak{H}, [\cdot, \cdot])$ оператора A дозволяє модифікувати початковий скалярний добуток (\cdot, \cdot) до нового скалярного добутку $(\cdot, \cdot)_C$, відносно якого оператор A ставав би самоспряженім.

Наведений результат ілюструє корисність побудови оператора C для різних класів несамоспряженіх операторів. Ця задача є однією з основних задач в дослідженнях псевдо-ермітової квантової механіки [5, 6, 7, 9, 11]. Метою роботи є опис всіх операторів C , діючих в двовимірному гільбертовому просторі \mathbb{C}^2 зі скалярним добутком:

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = x_1 \bar{x}_2 + y_1 \bar{y}_2, \quad x_j, y_j \in \mathbb{C}. \quad j = 1, 2. \quad (1)$$

Розв'язання цієї задачі базується на суттєвим використанні матриць Паулі.

Частковий випадок цієї задачі при додатковому припущення \mathcal{PT} -симетрії був розглянутий в [1].

¹тут ми маємо певну тавтологію: *властивість C -симетрії* та *оператор C* , яка, однак, традиційно використовується.

²детальний виклад теорії просторів Крейна можна знайти в [2]

Матриці Паулі та фундаментальні симметрії в \mathbb{C}^2

Розглянемо матриці Паулі:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матриці Паулі мають властивості

$$\sigma_j \sigma_k = -\sigma_k \sigma_j, \quad j \neq k, \quad \sigma_3 \sigma_1 = i \sigma_2, \quad \sigma_1 \sigma_2 = i \sigma_3, \quad \sigma_2 \sigma_3 = i \sigma_1. \quad (2)$$

Крім того, $\sigma_j^2 = \sigma_0$, де $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ є одиничною матрицею.

Зазначимо, що дію довільного оператора в \mathbb{C}^2 можна представити у вигляді матриці X другого порядку. Цю матрицю можна розкласти відносно базису з матриць Паулі та одиничної матриці:

$$X = \sum_{j=0}^3 x_j \sigma_j, \quad (3)$$

де $x_j \in \mathbb{C}$. В цьому випадку, як легко перевірити,

$$\text{Tr } X = 2x_0, \quad \det X = x_0^2 - \sum_{j=1}^3 x_j^2, \quad X^{-1} = \frac{1}{\det X} \left(x_0 \sigma_0 - \sum_{j=1}^3 x_j \sigma_j \right). \quad (4)$$

Нехай $Y = \sum_{j=0}^3 y_j \sigma_j$. Використовуючи (2) дістаємо,

$$X \cdot Y = \sum_{j=0}^3 x_j y_j \sigma_0 + \sum_{j=1}^3 (x_0 y_j + x_j y_0) \sigma_j + i \vec{x} \times \vec{y}, \quad (5)$$

де $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ і "векторний добуток" $\vec{x} \times \vec{y}$ визначається через формальний визначник

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix},$$

де

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \sigma_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \sigma_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \sigma_3.$$

В подальшому, будемо ідентифікувати матриці другого порядку з відповідними операторами гільбертового простору \mathbb{C}^2 . Зауважимо, що оператори σ_j в \mathbb{C}^2 задовольняють властивості $\sigma_j^* = \sigma_j$ і $\sigma_j^2 = \sigma_0$ (тобто є фундаментальними симетріями).

Знайдемо умови за якими оператор X , визначений в (3), буде фундаментальною симетрією. Зрозуміло, що умова $X^* = X$ (самоспряженість) рівносильна тому що всі коефіцієнти x_j в (3) є дійсними числами.

Нехай X є самоспряженім оператором. Використовуючи (5) одержуємо

$$X^2 = \sum_{j=0}^3 x_j^2 \sigma_j + 2 \sum_{j=1}^3 x_0 x_j \sigma_j.$$

Тому $X^2 = \sigma_0$ тоді і тільки тоді, коли $X = \pm \sigma_0$ або $X = J_{\vec{\alpha}}$, де

$$J_{\vec{\alpha}} = \sum_{j=1}^3 \alpha_j \sigma_j, \quad \vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{S}^2$$

де $\mathbb{S}^2 = \{\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^3 : \sum_{j=1}^3 \alpha_j^2 = 1\}$. Таким чином нетривіальні фундаментальні симетрії в гільбертовому просторі \mathbb{C}^2 мають вигляд $X = J_{\vec{\alpha}}$.

Опис операторів C в просторі Крейна $(\mathbb{C}^2, [\cdot, \cdot]_{\vec{\alpha}})$

Зафіксуємо фундаментальну симетрію $J_{\vec{\alpha}}$ в гільбертовому просторі $(\mathbb{C}^2, (\cdot, \cdot))$ і розглянемо простір Крейна $(\mathbb{C}^2, [\cdot, \cdot]_{\vec{\alpha}})$ з індефінітною метрикою

$$[\cdot, \cdot]_{\vec{\alpha}} = (J_{\vec{\alpha}} \cdot, \cdot).$$

Метою цього підрозділу є опис множини операторів C , тобто операторів, задовільняючих умови: (i) $C^2 = I$; (ii) $J_{\vec{\alpha}} C > 0$.

Зауважимо, що зазначені умови (i), (ii) є еквівалентними для представлення оператора у вигляді $C = J_{\vec{\alpha}} e^Q$, де Q є самоспряженім оператором в гільбертовому просторі \mathbb{C}^2 , який антикомутує з $J_{\vec{\alpha}}$. Відомо [8], що такі оператори C є у взаємно-однозначній відповідності з множиною всіх можливих $J_{\vec{\alpha}}$ -ортогональних розкладів простору Крейна $(\mathbb{C}^2, [\cdot, \cdot]_{\vec{\alpha}})$ на максимальні рівномірно додатні / від'ємні підпростори.

Теорема 1 *Множина всіх операторів C в просторі Крейна $(\mathbb{C}^2, [\cdot, \cdot]_{\vec{\alpha}})$ задається формулою*

$$C = -i \sinh \rho \sin \xi J_{\vec{\beta}} + i \sinh \rho \cos \xi J_{\vec{\zeta}} + \cosh \rho J_{\vec{\alpha}}, \quad (6)$$

де $\xi \in \mathbb{R}$, $\rho \geq 0$, вектор $\vec{\beta} \in \mathbb{S}^2$ є ортогональним до $\vec{\alpha} \in \mathbb{S}^2$ і $\vec{\zeta} = \vec{\alpha} \times \vec{\beta}$ є векторним добутком $\vec{\alpha}$ та $\vec{\beta}$.

Доведення. Знайдемо загальний вигляд Q в представленні $C = J_{\vec{\alpha}} e^Q$. Для цього розглянемо оператор $J_{\vec{\beta}} = \sum_{j=1}^3 \beta_j \sigma_j$, де вектор $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{S}^2$. Таким чином $J_{\vec{\beta}}$ є фундаментальною симетрією в гільбертовому просторі \mathbb{C}^2 . Припустимо додатково $\sum_{j=1}^3 \alpha_j \beta_j = 0$. Тоді, з урахуванням (5), одержуємо

$$J_{\vec{\alpha}} J_{\vec{\beta}} = i \vec{\alpha} \times \vec{\beta} = -i \vec{\beta} \times \vec{\alpha} = -J_{\vec{\beta}} J_{\vec{\alpha}}.$$

Отже $J_{\vec{\alpha}}$ і $J_{\vec{\beta}}$ є антікомутуючими фундаментальними симетріями в \mathbb{C}^2 .

Аналогічно візьмемо вектор $\vec{\zeta}$ як (стандартний) векторний добуток векторів $\vec{\alpha}$ і $\vec{\beta}$. Таким чином вектор $\vec{\zeta} = \vec{\alpha} \times \vec{\beta}$ належить до \mathbb{S}^2 і він є ортогональним до векторів $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$. Повторюючи попередні міркування одержуємо, що фундаментальна симетрія $J_{\vec{\zeta}}$ антікомутує з операторами $J_{\vec{\alpha}}$ і $J_{\vec{\beta}}$. Більш того,

$$J_{\vec{\alpha}} J_{\vec{\beta}} = i J_{\vec{\zeta}}, \quad J_{\vec{\alpha}} J_{\vec{\zeta}} = -i J_{\vec{\beta}}. \quad (7)$$

Зауважимо, що перша рівність в (7) випливає з (5) і означення оператора $J_{\vec{\zeta}}$.

Для доведення другої достатньо згадати, що $\vec{\zeta} = \vec{\alpha} \times \vec{\beta}$ і використати тотожність Лагранжа

$$\vec{\alpha} \times [\vec{\alpha} \times \vec{\beta}] = \vec{\alpha}(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) - \vec{\beta}(\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha}) = -\vec{\beta}.$$

Матриці операторів $J_{\vec{\alpha}}$, $J_{\vec{\beta}}$, $J_{\vec{\zeta}}$ та σ_0 є базисом для простору матриць другого порядку. Це означає, що довільний оператор Q діючий в просторі \mathbb{C}^2 може бути записаний вигляді

$$Q = x_0 \sigma_0 + x_1 J_{\vec{\beta}} + x_2 J_{\vec{\zeta}} + x_3 J_{\vec{\alpha}}, \quad x_j \in \mathbb{C}.$$

Умова самоспряженості оператора Q означає, що всі x_j мають бути дійсними числами. Далі, умова антікомутації з $J_{\vec{\alpha}}$ означає, що $x_0 = x_3 = 0$. Отже оператор C має вигляд

$$C = J_{\vec{\alpha}} e^{x_1 J_{\vec{\beta}} + x_2 J_{\vec{\zeta}}}.$$

Беручи до уваги, що

$$x_1 J_{\vec{\beta}} + x_2 J_{\vec{\zeta}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} J_{\vec{\beta}} + \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} J_{\vec{\zeta}} \right),$$

одержуємо

$$x_1 J_{\vec{\beta}} + x_2 J_{\vec{\zeta}} = \rho (\cos \xi J_{\vec{\beta}} + \sin \xi J_{\vec{\zeta}}) = \rho Z,$$

де $Z = \cos \xi J_{\vec{\beta}} + \sin \xi J_{\vec{\zeta}}$, $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ і $\cos \xi = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$, $\sin \xi = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$.

Оператор Z є самоспряженним в \mathbb{C}^2 . Більш того,

$$Z^2 = (\cos \xi J_{\vec{\beta}} + \sin \xi J_{\vec{\zeta}})^2 = (\cos^2 \xi + \sin^2 \xi) \sigma_0 = \sigma_0.$$

Отже Z є фундаментальною симетрією і

$$e^{x_1 J_{\vec{\beta}} + x_2 J_{\vec{\zeta}}} = e^{\rho Z} = \cosh \rho \sigma_0 + \sinh \rho Z. \quad (8)$$

Таким чином, беручи (8) та (7) до уваги, ми одержуємо (6). Теорема доведена.

Приклад 1 Нехай $\vec{\alpha} = (0, 0, 1)$, $\vec{\beta} = (1, 0, 0)$. Тоді $\vec{\zeta} = \vec{\alpha} \times \vec{\beta} = (0, 1, 0)$. Тоді $J_{\vec{\alpha}} = \sigma_3$, $J_{\vec{\beta}} = \sigma_1$, $J_{\vec{\zeta}} = \sigma_2$ і (6) набуває вигляду

$$C = \begin{pmatrix} \cosh \rho & \sinh \rho e^{-i\xi} \\ -\sinh \rho e^{i\xi} & -\cosh \rho \end{pmatrix}.$$

Оператори з C -симетріями

Нехай A – довільний оператор в \mathbb{C}^2 . Будемо говорити, що A має властивість C -симетрії, якщо існує такий оператор $C = J_{\vec{\alpha}}e^Q$, що

$$AC = CA.$$

Це означення є еквівалентним до означення C -симетрії оператора A , яке наведено у вступі. Метою цього підрозділу є знаходження таких умов на $J_{\vec{\alpha}}$ -самоспряженій оператор A , які гарантують існування C -симетрії для A .

З [2] дістаемо, що оператор A , самоспряженій в просторі Крейна $(\mathbb{C}^2, [\cdot, \cdot]_{\vec{\alpha}})$, визначають як оператор, задовільняючий співвідношенню

$$J_{\vec{\alpha}}A^* = AJ_{\vec{\alpha}}, \quad (9)$$

де A^* - спряжений відносно початкового скалярного добутку (1).

Беручи до уваги (9), оператор, самоспряженій в просторі Крейна $(\mathbb{C}^2, [\cdot, \cdot]_{\vec{\alpha}})$, будемо називати $J_{\vec{\alpha}}$ -самоспряженім.

Охарактеризуємо випадок, коли оператор A буде $J_{\vec{\alpha}}$ -самоспряженім. Розкладаючи A відносно базису $\sigma_0, J_{\vec{\beta}}, J_{\vec{\zeta}}$ та $J_{\vec{\alpha}}$, одержуємо

$$A = x_0\sigma_0 + x_1J_{\vec{\beta}} + x_2J_{\vec{\zeta}} + x_3J_{\vec{\alpha}}. \quad (10)$$

Враховуючи, що $J_{\vec{\alpha}}$ -самоспряженість оператора A задається рівністю (9), дістаемо

$$J_{\vec{\alpha}}A^* = \bar{x}_0J_{\vec{\alpha}} + i\bar{x}_1J_{\vec{\zeta}} - i\bar{x}_2J_{\vec{\beta}} + \bar{x}_3\sigma_0, \quad AJ_{\vec{\alpha}} = x_0J_{\vec{\alpha}} - ix_1J_{\vec{\zeta}} + ix_2J_{\vec{\beta}} + x_3\sigma_0.$$

Прирівнюючи коефіцієнти, одержуємо, що A є $J_{\vec{\alpha}}$ -самоспряженім тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти розкладу (10) задовільняють рівності:

$$x_0 = \bar{x}_0, \quad x_3 = \bar{x}_3, \quad \bar{x}_1 = -x_1, \quad \bar{x}_2 = -x_2.$$

Згадуючи (4), приходимо до висновку, що визначник $\det A$ є дійсним числом. Аналогічно з означення операторів $J_{\vec{\alpha}}, J_{\vec{\beta}}, J_{\vec{\zeta}}$ одержуємо, що сліди відповідних матриц будуть нульовими, тобто $\text{tr}J_{\vec{\alpha}} = \text{tr}J_{\vec{\beta}} = \text{tr}J_{\vec{\zeta}} = 0$. Тому з (10) одержуємо, що слід матриці

$$\text{tr } A = 2x_0$$

буде дійсним числом.

Теорема 2 $J_{\vec{\alpha}}$ -самоспряженій оператор A має дійсний спектр тоді і тільки тоді, коли

$$(\text{tr } A)^2 \geq 4\det A.$$

Доведення. Нехай $\lambda \in \mathbb{C}$ є власним значенням оператора A . Це означає, що λ буде коренем визначника $\det(A - \lambda\sigma_0) = 0$. Використовуючи (4), одержуємо

$$\det(A - \lambda\sigma_0) = (x_0 - \lambda)^2 - \sum_{j=1}^3 x_j^2 = \det A - (\operatorname{tr} A)\lambda + \lambda^2 = 0.$$

Отриманий многочлен має дійсні корені λ тоді і тільки тоді, коли $(\operatorname{tr} A)^2 - 4\det A \geq 0$.

Наслідок 1 *Нехай A є $J_{\vec{\alpha}}$ -самоспряженім оператором. Якщо $(\operatorname{tr} A)^2 < 4\det A$, то для оператора A не існує оператор C -симетрії.*

Доведення. З нерівності $(\operatorname{tr} A)^2 < 4\det A$ слідує, що оператор A буде мати комплексні власні значення. Припустимо, що A має C -симетрію $C = J_{\vec{\alpha}}e^Q$. Тоді A буде самоспряженім відповідно норми

$$(\cdot, \cdot)_C = [C\cdot, \cdot]_{\vec{\alpha}} = (J_{\vec{\alpha}}C\cdot, \cdot) = (J_{\vec{\alpha}}^2e^Q\cdot, \cdot) = (e^Q\cdot, \cdot),$$

що є неможливим (оскільки, комплексні власні значення).

Наслідок 2 *Нехай A є $J_{\vec{\alpha}}$ -самоспряженім оператором. Тоді для оператора A існує оператор C -симетрії (заданий формулою (6)), якщо $(\operatorname{tr} A)^2 > 4\det A$. Оператор C визначається однозначно.*

Доведення. Якщо $(\operatorname{tr} A)^2 > 4\det A$, то оператор A має два різних дійсніх власних значення λ_1, λ_2 . Нехай f_1 і f_2 – відповідні власні функції. Зауважимо, що $[f_1, f_2]_{\vec{\alpha}} = 0$. Це безпосередньо слідує з $J_{\vec{\alpha}}$ -самоспряженості A .

Доведемо тепер, що $[f_1, f_1]_{\vec{\alpha}} \neq 0$. Нехай $[f_1, f_1]_{\vec{\alpha}} = 0$. Тоді $[f_1, f]_{\vec{\alpha}} = 0 \forall f \in \operatorname{span}\{f_1, f_2\} = \mathbb{C}^2$, що є неможливим. Таким чином $[f_1, f_1] \neq 0$. Аналогічно встановлюємо, що $[f_2, f_2] \neq 0$.

Зауважимо, що випадок $[f_1, f_1]_{\vec{\alpha}} \cdot [f_2, f_2]_{\vec{\alpha}} > 0$ також неможливий. Дійсно, якщо $[f_1, f_1]_{\vec{\alpha}} > 0$ та $[f_2, f_2]_{\vec{\alpha}} > 0$ або $[f_1, f_1]_{\vec{\alpha}} < 0$ та $[f_2, f_2]_{\vec{\alpha}} < 0$, то індефінітна метрика $[\cdot, \cdot]_{\vec{\alpha}}$ буде скалярним добутком (або мінус скалярним добутком) на \mathbb{C}^2 , що є неможливим (індефінітна метрика $[\cdot, \cdot]_{\vec{\alpha}}$ є нетривіальною за означенням). Отже $[f_1, f_1]_{\vec{\alpha}} \cdot [f_2, f_2]_{\vec{\alpha}} < 0$.

Нехай, без втрати загальності, $[f_1, f_1]_{\vec{\alpha}} > 0$ та $[f_2, f_2]_{\vec{\alpha}} < 0$. В цьому випадку простір Крейна $(\mathbb{C}^2, [\cdot, \cdot]_{\vec{\alpha}})$ можна записати у вигляді суми:

$$\mathbb{C}^2 = \mathfrak{L}_+[\perp]\mathfrak{L}_-, \quad (11)$$

де $\mathfrak{L}_+ = \operatorname{span}\{f_1\}$ і $\mathfrak{L}_- = \operatorname{span}\{f_2\}$ є відповідно максимально додатнім і максимально від'ємним підпросторами простору Крейна $(\mathbb{C}^2, [\cdot, \cdot]_{\vec{\alpha}})$ [8]. Оператор C , що відповідає рокладу (11), буде оператором C -симетрії для оператора A . Згідно Теореми 1 цей оператор C задається формулою (6), при певному виборі параметрів $\xi \in \mathbb{R}$, $\rho \geq 0$. Зауважимо, що такий оператор C визначається однозначно (оскільки підпростори \mathfrak{L}_{\pm} однозначно визначаються відповідними власними функціями).

Зауваження 1 Гранічний випадок $(\text{tr } A)^2 = 4\det A$ є невизначеним з точки зору існування операторів C . Коротко кажучи, їх може бути "багато" або взагалі не буде. Пояснимо цей факт докладніше. Отже, при виконанні умови $(\text{tr } A)^2 = 4\det A$ оператор A має єдине дійсне власне значення λ . Якщо λ відповідають дві лінійно незалежні власні функції f_1, f_2 , то оператор A набуває вигляду $A = \lambda\sigma_0$. Цей оператор комутує з довільним оператором C -симетрії. Якщо ж власному значенню λ відповідає тільки одна власна функція f_1 , то геометрична кратність λ відрізняється від алгебраїчної кратності. Це означає що оператор A не буде подібним до самопряжесного. Отже для A не існує оператора C -симетрії.

ЛІТЕРАТУРА

1. Грод А. І. До теорії \mathcal{PT} -симетричних операторів. // Чернівецький Науково-вий Вісник, 2011. — Т. 1, № 4. — 128 с.
2. T. Ya. Azizov and I.S. Iokhvidov. Linear Operators in Spaces with Indefinite Metric. Wiley, Chichester, 1989.
3. C. M. Bender. Making sense of non-Hermitian Hamiltonians. // *Rep. Progr. Phys.* **70**, 2007. — no. 6. — P. 947–1018.
4. C. M. Bender, D. C. Brody, and H. F. Jones. Complex Extension of Quantum Mechanics. // *Phys. Rev. Lett.*, **89**, 2002. — No. 27. — P. 401–405.
5. C. M. Bender and H. F. Jones. Semiclassical Calculation of the C Operator in \mathcal{PT} -Symmetric Quantum Mechanics. // *Phys. Lett. A* **328**, 2004. — P. 102–109.
6. C. M. Bender and S. P. Klevansky. Nonunique C operator in PT quantum mechanics. // *Phys. Lett. A* **373**, 2009. — no. 31. — P. 2670–2674.
7. C. M. Bender and Barnabas Tan. Calculation of the hidden symmetry operator for a PT -symmetric square well. // *J. Phys. A* **39**, 2006. — no. 8.— P. 1945–1953.
8. A. Grod, S. Kuzhel, and V. Sudilovskaya. On operators of transition in Krein spaces. // *Opuscula Mathematica* **31**, 2011. — No. 1. — P. 49–59.
9. S. Kuzhel. On pseudo-Hermitian operators with generalized C -symmetries. // *Modern Analysis and Applications. The Mark Krein Centenary Conference*, Vol. 1: Operator theory and related topics, Oper. Teory Adv. Appl., 190, 2009. — P. 375–385.
10. A. Mostafazadeh. Pseudo-Hermitian Representation of Quantum Mechanics. // *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **7**, 2010. — P. 1191–1306.
11. A. Mostafazadeh. Pseudo-Hermiticity and Generalized PT- and CPT-Symmetries. // *J.Math.Phys.* **44**, 2003. — P. 974–989.

Стаття одержана: 30.01.2015; перероблений варіант: 5.07.2015;
прийнята: 10.07.2015.

О решении линейных матричных уравнений

С. М. Чуйко

*Донбаський державний педагогіческий університет, Слов'янськ,
84 116 Донецька обл., ул. Генерала Батюка, 19, Україна
chuiko-slav@inbox.ru*

Лінійні матричні уравнення широко використовуються в теорії стійкості руху, теорії управління, а також в задачах восстановлення зображень. В статті предложені оригінальні умови розв'язності, а також схема знаходження розв'язків неоднорідного узагальненого матричного рівняння і, зокрема, рівняння Сільвестра, у випадку, коли лінійний матричний оператор L , відповідний до однорідної частини узагальненого матричного рівняння не має оберненого.

Ключові слова: матричне уравнение Сильвестра, матричное уравнение Ляпунова, псевдообратные матрицы.

Чуйко С. М., **Про розв'язання лінійних матричних рівнянь.** Лінійні матричні рівняння широко використовуються в теорії стійкості руху, теорії управління, а також у задачах про відновлення зображень. У статті запропоновані оригінальні умови розв'язності, а також схема знаходження розв'язків неоднорідного узагальненого матричного рівняння і, зокрема, рівняння Сільвестра, у випадку, коли лінійний матричний оператор L , відповідний до однорідної частини узагальненого матричного рівняння не має оберненого.

Ключові слова: матричне рівняння Сільвестра, матричне рівняння Ляпунова, псевдообернена матриця.

S.M. Chuiko. **The solution of the linear matrix equations.** Linear matrix equations widely used in the theory of stability of motion, control theory and signal processing. We suggest an algorithm for finding solutions of the inhomogeneous generalized matrix equation and, in particular, the Sylvester equation in general case when the linear matrix operator L , corresponding to the homogeneous part of the linear generalized matrix equation, has no inverse.

Keywords: Lyapunov matrix equation, Sylvester matrix equation, pseudoinverse matrix.

2000 Mathematics Subject Classification 15A24, 34B15, 34C25.

Матричные уравнения Ляпунова, а также их обобщения — матричные уравнения Сильвестра [1, 2, 3, 4, 6] широко используются в теории устойчивости движения [3, с. 245], а также при решении дифференциальных уравнений Риккати и Бернулли [7]. Если структура общего решения однородной части уравнения Ляпунова хорошо изучены [1, 6], то решение неоднородного уравнения Сильвестра и, в частности, уравнения Ляпунова достаточно громоздко. В статье [7] предложены условия разрешимости, а также схема построения частного решения уравнения Ляпунова на основе псевдообращения [9] оператора L , соответствующего однородной части уравнения Ляпунова.

Используя технику псевдообратных (по Муру-Пенроузу) матриц и проекторов, в данной статье предложены оригинальные условия разрешимости, а также схема нахождения семейства линейно независимых решений неоднородного обобщенного матричного уравнения и, в частности, уравнения Сильвестра, в общем случае, когда линейный матричный оператор L , соответствующий однородной части обобщенного матричного уравнения не имеет обратного. Найдено выражение для семейства линейно независимых решений неоднородного обобщенного матричного уравнения и, в частности, уравнений Сильвестра и Ляпунова с использованием проекторов и псевдообратных (по Муру-Пенроузу) матриц [3, 8, 10].

Постановка задачи

Исследуем задачу о построении решений линейного матричного уравнения

$$\mathcal{L}X = \mathcal{A}. \quad (1)$$

Здесь $\mathcal{L} : \mathbb{R}^{\beta \times \gamma} \rightarrow \mathbb{R}^{\alpha \times \delta}$ — линейный ограниченный матричный функционал, $X \in \mathbb{R}^{\beta \times \gamma}$ — неизвестная матрица, $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{\alpha \times \delta}$ — заданная матрица. Обозначим

$$\left\{ \Theta_j \right\}_{j=1}^{\beta \cdot \gamma} \in \mathbb{R}^{\beta \times \gamma}$$

естественный базис [11] пространства $\mathbb{R}^{\beta \times \gamma}$. Общее решение уравнения (1) ищем в виде суммы

$$X = \sum_{j=1}^{\beta \cdot \gamma} \Theta_j c_j, \quad c_j \in \mathbb{R}^1.$$

Последнее выражение приводит уравнение (1) к виду

$$\sum_{j=1}^{\beta \cdot \gamma} [\mathcal{L}\Theta_j] c_j = \mathcal{A}.$$

Определим оператор $\mathcal{M}[A] : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{m \cdot n}$, как оператор, который ставит в соответствие матрице $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ вектор-столбец $\mathcal{B} := \mathcal{M}[A] \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$, составленный из n столбцов матрицы A , а также обратный оператор [8]

$$\mathcal{M}^{-1}[\mathcal{B}] : \mathbb{R}^{m \cdot n} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n},$$

который ставит в соответствие вектору $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$ матрицу $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Заметим, что оператор $\mathcal{M}[A]$, как и обратный оператор $\mathcal{M}^{-1}[\mathcal{B}]$, могут быть представлены в явном виде. Определим матрицы

$$\Upsilon_1 := (1) \in \mathbb{R}^{1 \times 1}, \quad \Upsilon_2 := (1 \ 0 \ 0 \ 1)^* \in \mathbb{R}^{4 \times 1},$$

$$\Upsilon_3 := (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)^* \in \mathbb{R}^{9 \times 1}, \dots .$$

Вектор Υ_m состоит из $m - 1$ цепочки вида $(1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0)^* \in \mathbb{R}^{(m-1) \times 1}$ и заканчивается единицей:

$$\Upsilon_m := \left(1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ \dots \ 1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \right)^* \in \mathbb{R}^{m^2 \times 1}.$$

В новых обозначениях оператор $\mathcal{M}[A]$ представим в явном виде:

$$\mathcal{M}[A] = \left(I_n \otimes A \right) \cdot \Upsilon_n \in \mathbb{R}^{m \cdot n}.$$

Определим также матрицы [8]

$$\left[E_n^m \right]_j := \left[E_1^m \right]_j \otimes I_n \in \mathbb{R}^{n \times m \cdot n}, \quad \left[E_1^m \right]_j := \left\{ \delta_{ij} \right\}_{i=1}^m \in \mathbb{R}^{1 \times m};$$

здесь δ_{ij} — символ Кронекера [11]. Таким образом, обратный оператор $\mathcal{M}^{-1}[\mathcal{B}]$ представим в явном виде:

$$\mathcal{M}^{-1}[\mathcal{B}] = \sum_{k=1}^n \left[E_n^m \right]_k \cdot \mathcal{B} \cdot \left[E_1^m \right]_k.$$

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Обозначим матрицы $\Xi_j := \mathcal{L}\Theta_j \in \mathbb{R}^{\alpha \times \delta}$. Таким образом, уравнение (1) равносильно следующему уравнению

$$\mathcal{Q} c = \mathcal{M}[\mathcal{A}] \tag{2}$$

относительно вектора $c \in \mathbb{R}^{\beta \cdot \gamma}$; здесь

$$\mathcal{Q} := \left\{ \mathcal{M}[\Xi_1] \ \mathcal{M}[\Xi_2] \ \dots \ \mathcal{M}[\Xi_{\beta \cdot \gamma}] \right\} = \sum_{j=1}^{\beta \cdot \gamma} \left\{ \left[E_1^{\alpha \beta} \right]_j \otimes \mathcal{M}[\Xi_j] \right\} \in \mathbb{R}^{\alpha \cdot \delta \times \beta \cdot \gamma}.$$

При условии

$$P_{\mathcal{Q}^*} \mathcal{M}[\mathcal{A}] = 0. \tag{3}$$

и только при нем уравнение (2) разрешимо

$$c = \mathcal{Q}^+ \mathcal{M}[\mathcal{A}] + P_{\mathcal{Q}^*} c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

при этом уравнение (1) имеет r -параметрическое семейство решений

$$X = \Phi[\mathcal{A}] + \Psi[c_r],$$

где

$$\Phi[\mathcal{A}] := \mathcal{M}^{-1} \left\{ \mathcal{Q}^+ \mathcal{M}[B] \right\}, \quad \Psi[c_r] := \mathcal{M}^{-1} \left[P_{\mathcal{Q}_r} c_r \right].$$

Здесь \mathcal{Q}^+ — псевдообратная (по Муру-Пенроузу) матрица [1, 11],

$$P_{\mathcal{Q}} : \mathbb{R}^{\beta \cdot \gamma \times \beta \cdot \gamma} \rightarrow \mathbb{N}(\mathcal{Q}), \quad P_{\mathcal{Q}^*} : \mathbb{R}^{\alpha \cdot \delta \times \alpha \cdot \delta} \rightarrow \mathbb{N}(\mathcal{Q}^*)$$

— ортопроекторы матриц \mathcal{Q} и \mathcal{Q}^* . Матрица $P_{\mathcal{Q}_r}$ составлена из r линейно независимых столбцов матрицы-ортопроектора $P_{\mathcal{Q}}$. Условия существования и вид общего решения матричного уравнения (1) определяет следующая теорема.

Теорема. *Матричное уравнение (1) разрешимо тогда и только тогда, когда выполнено условие (3). При условии (3) и только при нем, уравнение (1) имеет r -параметрическое семейство решений*

$$X = \Phi[\mathcal{A}] + \Psi[c_r], \quad \Phi[\mathcal{A}] := \mathcal{M}^{-1} \left\{ \mathcal{Q}^+ \mathcal{M}[B] \right\}, \quad \Psi[c_r] := \mathcal{M}^{-1} \left[P_{\mathcal{Q}_r} c_r \right].$$

При условии $P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$ будем говорить, что для матричного уравнения (1) имеет место критический случай, при этом уравнение (1) разрешимо лишь для тех неоднородностей \mathcal{A} , для которых выполнено условие (3).

Пример 1. *Матричное уравнение общего вида*

$$\mathcal{L}X = \mathcal{A} \tag{4}$$

разрешимо при

$$\mathcal{L}X := \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 S_i X R_j + \int_0^1 \int_0^1 U(t, s) X V(t, s) dt ds;$$

здесь

$$S_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$U(t, s) := \begin{pmatrix} t & 0 \\ t & s \\ 0 & s \end{pmatrix}, \quad V(t, s) := \begin{pmatrix} s & s & 0 & 0 \\ 0 & s & t & 0 \\ 0 & 0 & t & t \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 84\,905\,350 & 3\,018\,490 & 14\,616\,420 & -5\,670\,300 \\ 42\,288\,650 & 1\,673\,270 & 8\,255\,910 & -3\,126\,750 \\ -42\,616\,700 & -1\,345\,220 & -6\,360\,510 & 2\,543\,550 \end{pmatrix}.$$

Естественный базис пространства $\mathbb{R}^{2 \times 3}$ составляют матрицы

$$\Theta_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Theta_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \quad \Theta_6 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ключевая при исследовании уравнения (4) матрица

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 15 & 16 & 0 & 0 & 12 & 12 \\ 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 15 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 16 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 12 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

определяет матрицу-ортопроектор $P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$, при этом для уравнения (4) имеет место критический случай. Поскольку выполнено условие (3), постольку, поставленная задача разрешима. Единственное ($P_{\mathcal{Q}} = 0$) решение уравнения (4) представимо в виде

$$X = \Phi[\mathcal{A}] = \begin{pmatrix} 8\,500\,808 & -30\,430\,080 & 74\,279\,340 \\ -3\,976\,935 & 11\,872\,080 & -37\,314\,120 \end{pmatrix}.$$

При условии $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$ будем говорить, что для матричного уравнения (1) имеет место некритический случай, при этом уравнение (1) разрешимо для любой неоднородности \mathcal{A} .

Следствие. Матричное уравнение (1) в некритическом случае ($P_{\mathcal{Q}^*}=0$) разрешимо для любой неоднородности $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{\alpha \times \delta}$. В этом случае уравнение (1) имеет r -параметрическое семейство решений $C = \Phi[\mathcal{A}] + \Psi[c_r]$.

Пример 2. Матричное уравнение общего вида

$$\mathcal{L}X = \mathcal{A} \tag{5}$$

разрешимо при

$$\mathcal{L} := \int_0^{2\pi} U(t)XV(t)dt, \quad V(t) := \begin{pmatrix} \sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix};$$

здесь

$$U(t) := \frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ключевая при исследовании уравнения (5) матрица

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

определяет ортопроекторы $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$ и

$$P_{\mathcal{Q}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$, постольку для уравнения (5) имеет место некритический случай, следовательно, поставленная задача разрешима. Общее решение уравнения (5)

$$X = \Phi[\mathcal{A}] + \Psi[c_r]$$

определяют матрицы

$$\Phi[\mathcal{A}] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi[c_r] = \begin{pmatrix} 0 & -c_1 & -c_2 \\ c_1 & c_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказанная теорема и следствие обобщают соответствующие условия разрешимости, а также схему построения решения уравнений Ляпунова [7, 10] и Сильвестра [8] на случай линейного матричного уравнения (1) общего вида и могут быть использованы в теории устойчивости движения [3, 4, 5, 15], при решении дифференциальных уравнений Риккати и Бернулли [7, 13], а также при решении линейных краевых задач для матричных дифференциальных уравнений [12]. Полученные результаты аналогично [14] могут быть перенесены на обобщенные уравнения типа Сильвестра, содержащие неизвестные матрицы различных размерностей.

Acknowledgement. Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований. Номер государственной регистрации 0115U003182.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гантмахер Ф.Р., Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 552 с.
2. Беллман Р., Введение в теорию матриц. — М.: Наука, 1969. — 367 с.

3. Ланкастер П., Теория матриц. — М.: Наука, 1978. — 280 с.
4. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г., Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 534 с.
5. Коробов В.И., Бебия М.О., Стабилизация одного класса нелинейных систем, неуправляемых по первому приближению // Доп. НАН України, 2014. — № 2. — С. 20–25.
6. Boichuk A.A., Krivosheya S.A., Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type // Ukrainian Mathematical Journal, 1998. — **50**, № 8. — P. 1162–1169.
7. Boichuk A.A., Krivosheya S.A., A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equation // Differential Equations, 2001. — **37**, № 4. — P. 464–471.
8. Чуйко С.М., О решении матричного уравнения Сильвестра // Вестник Одесского национального университета. Сер. математика и механика, 2014. — **19**, Вип. 1 (21), С. 49–57.
9. Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М., Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 318 с.
10. Чуйко С.М. О решении матричных уравнений Ляпунова // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія «Математика, прикладна математика і механіка», 2014. — № 1120. Випуск 69. — С. 85 – 94.
11. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А., Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984. — 318 с.
12. Chuiko S.M., The Green's operator of a generalized matrix linear differential-algebraic boundary value problem // Siberian Mathematical Journal, 2015. — **56**, № 4. — P. 752–760.
13. Деревенский В.П., Матричные уравнения Бернулли // Известия вузов. Математика, 2008. — № 2. — Р. 14–23.
14. Чуйко С.М., О решении обобщенного матричного уравнения Сильвестра // Чебышевский сборник, 2015. — **16**, Вып. 1. — С. 52–66.
15. Бебия М. О., Стабилизация систем со степенной нелинейностью // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія «Математика, прикладна математика і механіка», 2014. — 1120, Випуск 69. — С. 75–84.

Статья получена: 22.04.2015; окончательный вариант: 2.11.2015;
принята: 3.11.2015.

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.9 Том 82, 2015, с.34–46

Исследование одного класса систем нелинейных уравнений

Е. В. Олейник

*Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
пл. Свободи 4, 61022, Харків, Україна
elenaoliynik@gmail.com*

В работе исследованы и описаны решения системы нелинейных уравнений, лежащей в основе построения треугольных моделей для коммутативных систем линейных несамосопряженных операторов. Рассмотрен случай кратного спектра спектральной плотности.

Ключевые слова: треугольные модели, коммутативные системы линейных несамосопряженных операторов, собственные вектора.

Олійник О. В., **Дослідження одного класу систем нелінійних рівнянь.** В роботі досліджено і описано розв'язки системи нелінійних рівнянь, яка лежить в основі побудови трикутних моделей комутативних систем лінійних несамоспряжених операторів. Розглянуто випадок кратного спектру спектральної щільності.

Ключові слова: трикутні моделі, комутативні системи лінійних несамоспряжених операторів, власні вектори.

E. V. Oliynyk, **The study of solutions of a class of nonlinear systems.** We have studied and described for systems of nonlinear equations. It is a basis of the triangular model for commutative systems of non-selfadjoint bounded operators. The case of a multiple spectrum of the spectral density. *Keywords:* triangular model, commutative systems of linear nonselfadjoint, eigenvectors.

2000 Mathematics Subject Classification 47A48, 47N20, 34G20.

Введение

В работе изучается система п нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, которая лежит в основе построения треугольных моделей

для коммутативних систем лінійних несамосопряжених обмежених операторів. Для случая $\dim E = 3$, $J = I$, $\alpha(x) = 0$ и кратного спектра гладкої матриці $a(x)$ показано, что можна знайти собственні вектори матриці $a(x)$ при відомих собственных значеннях матриц $a(x)$, $\gamma(x)$ и дії σ_2 в базисі цих собственных векторов, і таким чином, представити явний вид розв'язків дослідженії системи рівнянь.

Пусть задана $\{A_1, A_2\}$ коммутативна система лінійних обмежених операторів, діючих в гільбертовому просторі H , а також лінійний обмежений оператор $\varphi: H \rightarrow E$.

Совокупність

$$\Delta = (\{A_1, A_2\}; H; \varphi; E; \{\sigma_1, \sigma_2\}; \{\gamma^-\}; \{\gamma^+\}), \quad (1)$$

де $\{\sigma_k\}_1^2$, $\{\gamma^\pm\}$ — самосопряжені оператори в E , називається коммутативним узлом [3], якщо:

1. $[A_1, A_2] = 0$;
 2. $A_k - A_k^* = i\varphi^* \sigma_k \varphi$; $\sigma_k = \sigma_k^*$; $k = 1, 2$;
 3. $\sigma_1 \varphi A_2^* - \sigma_2 \varphi A_1^* = \gamma^- \varphi$;
 4. $\gamma^+ = \gamma^- + (\sigma_1 \varphi \varphi^* \sigma_2 - \sigma_2 \varphi \varphi^* \sigma_1)$.
- (2)

Любая коммутативна система обмежених лінійних операторів $\{A_k\}_1^2$ може бути включена в узел [2].

Рассмотрим коммутативный узел (1) когда $\dim E = n < \infty$, причем $\sigma_1 = J$ ($J = J^* = J^{-1}$) — инволюция.

Обозначим через $S_1(\lambda)$ характеристическую функцію оператора A_1 узла Δ (1)

$$S_1(\lambda) = I - i\varphi(A_1 - \lambda I)^{-1} \varphi^* \sigma_1 \quad (3)$$

Характеристичная функція $S_1(\lambda)$ [3] оператора A_1 в случае вещественного спектра оператора A_1 и абсолютної непрерывності матричної мери Стильтьєса мультиплікативного інтеграла має вигляд:

$$S_1(\lambda) = S_l(\lambda); \quad S_x(\lambda) = \int_0^x \exp \left\{ \frac{iJa(t)dt}{\lambda \alpha(t)} \right\}, \quad (4)$$

де $\alpha(t)$ — вещественна, обмежена, неубываюча функція на $[0, l]$ ($0 < l < \infty$), а матриця $a(t) \geq 0$ розміру $[n \times n]$ така, що $\operatorname{tr} a(t) \equiv 1$. Матриця-функція $a(\cdot)$ є спектральної плотностю з мультиплікативного представлення Потапова для характеристичної функції [7]. Из (2) слідує, що характеристична функція $S_1(\lambda)$ задовільняє умові співвідношення [3]:

$$(\sigma_2 \lambda + \gamma^-) JS_1(\lambda) = S_1(\lambda) (\sigma_2 \lambda + \gamma^+) J. \quad (5)$$

Задача продолжения условия сплетаемости (5) вдоль цепочки инвариантных подпространств оператора A_1 , которой отвечает мультипликативное представление $S_x(\lambda)$ (4), приводит к соотношению:

$$(\sigma_2\lambda + \gamma(x)) JS_x(\lambda) = S_x(\lambda) (\sigma_2\lambda + \gamma^+) J \quad (\forall x \in [0, l]). \quad (6)$$

В [3] показано, что выполнение условия сплетаемости (6) эквивалентно системе уравнений:

$$\begin{cases} [Ja(x), (\sigma_k\alpha(x) + \gamma(x)) J] = 0; & x \in [0, l], \\ \gamma'(x)J = i [Ja(x), \sigma_k J]; & x \in [0, l], \\ \gamma(0) = \gamma^+. \end{cases} \quad (7)$$

Решение этой системы $\gamma(x)$ используется при построении треугольных моделей коммутативных систем операторов [3].

Целью данной работы является исследование и описание решений системы уравнений (7) в случае $\dim E = 3$, кратного спектра матрицы $a(x)$, причем для простоты будем полагать, что матрица $a(x)$ достаточно гладкая, $\alpha(x) = 0$ и $J = I$.

1. Собственные значения и собственные векторы матрицы $a(x)$ в случае кратного спектра

I. Исследуем разрешимость системы условий сплетаемости в случае, когда $\dim E = 3 < \infty$, для $a(x) \geq 0$, причем $a(x)$ имеет кратный спектр, где $J = J^* = J^{-1}$, а $\alpha(x)$ – вещественная, ограниченная, неубывающая функция на $[0, l]$ ($0 < l < \infty$). Система уравнений (7) в случае $\alpha(x) = 0$, и $J = I$ примет вид:

$$\begin{cases} [a(x), \gamma(x)] = 0, & x \in [0, l], \\ \gamma'(x) = i[a(x), \sigma_2], & x \in [0, l], \\ \gamma(0) = \gamma^+. \end{cases} \quad (8)$$

Проинтегрируем систему (8), получим

$$\begin{cases} \gamma(x) = i [A(x), \sigma_2] + \gamma^+; \\ [A'(x), \gamma(x)] = 0, \end{cases} \quad (9)$$

где $A(x) = \int_0^x a(t)dt$. Таким образом, задача нахождения решений системы уравнений (8) сводится к нахождению матрицы-функции $A(x)$ из нелинейного уравнения

$$[A'(x), [A(x), \sigma_2] - i\gamma_0] = 0. \quad (10)$$

То есть необходимо найти матрицу $A(x)$ как решение нелинейного уравнения (10), а затем определить $\gamma(x)$ из (9).

Пусть $a(x)$ – гладкая матрица с кратным спектром. Выберем ортонормированный базис $h_k(x)$

$$h_k(x) \perp h_s(x), (k \neq s), \|h_k(x)\| = 1, (1 \leq k, s \leq 3) \quad (11)$$

так, чтобы $a(x)h_k(x) = \mu_k(x)h_k(x)$, где $\mu_k(x)$ – собственные значения матрицы $a(x)$. Не ограничивая общности, будем считать, что $\mu_1(x) = \mu_2(x)$, $\mu_1(x) \neq \mu_3(x)$. Воспользуемся вторым уравнением в (8):

$$\gamma'(x)h_k(x) = ia(x)\sigma_2h_k(x) - i\sigma_2a(x)h_k(x) = ia(x)\sigma_2h_k(x) - i\sigma_2\mu_k(x)h_k(x).$$

Введем обозначение

$$\langle \sigma_2h_k(x), h_s(x) \rangle = \beta_{sk}(x), \quad (1 \leq k, s \leq n) \quad (12)$$

Учитывая $\sigma_2h_k(x) = \sum_{s=1}^3 \beta_{sk}(x)h_s(x)$, получим, что

$$\begin{aligned} \gamma'(x)h_k(x) &= ia(x)\sigma_2h_k(x) - i\mu_k(x)\sigma_2h_k(x) = i(a(x) - \mu_k(x))\sigma_2h_k(x) = \\ &= i \sum_{s=1}^n \beta_{sk}(x) (a(x) - \mu_k(x)) h_s(x) = i \sum_{s \neq k} \beta_{sk}(x) (\mu_s(x) - \mu_k(x)) h_s(x). \end{aligned} \quad (13)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \gamma'(x)h_1(x) &= i \sum_{s=1}^3 \beta_{s1}(x) (\mu_s(x) - \mu_1(x)) h_s(x) = \\ &= i\beta_{31}(x) (\mu_3(x) - \mu_1(x)) h_3(x); \\ \gamma'(x)h_2(x) &= i \sum_{s=1}^3 \beta_{s2}(x) (\mu_s(x) - \mu_2(x)) h_s(x) = \\ &= i\beta_{32}(x) (\mu_3(x) - \mu_2(x)) h_3(x); \\ \gamma'(x)h_3(x) &= i \sum_{s=1}^3 \beta_{s3}(x) (\mu_s(x) - \mu_3(x)) h_s(x) = \\ &= i(\mu_1(x) - \mu_3(x)) (\beta_{13}(x)h_1(x) - \beta_{23}(x)h_2(x)). \end{aligned} \quad (14)$$

Из первого уравнения системы (8) получим

$$\begin{cases} \gamma(x)h_1(x) = \xi_{11}(x)h_1(x) + \xi_{12}(x)h_2(x); \\ \gamma(x)h_2(x) = \overline{\xi_{12}}(x)h_1(x) + \xi_{22}(x)h_2(x); \\ \gamma(x)h_3(x) = \xi_{33}(x)h_3(x), \end{cases} \quad (15)$$

где $\xi_{ks}(x) \in \mathbb{C}$, $(1 \leq k, s \leq 3)$.

Продифференцируем первое из уравнений системы (15)

$$\begin{aligned} \gamma'(x)h_1(x) + \gamma(x)h'_1(x) &= \\ &= \xi'_{11}(x)h_1(x) + \xi_{11}(x)h'_1(x) + \xi'_{12}(x)h_2(x) + \xi_{12}(x)h'_2(x). \end{aligned} \quad (16)$$

Умножим (16) на $h_3(x)$ скалярно, учитывая (11), получим

$$\begin{aligned} & i\beta_{31}(x)(\mu_3(x) - \mu_1(x))\langle h_3(x), h_3(x)\rangle + \\ & + \langle h'_1(x), \gamma(x)h_3(x)\rangle = \\ & \langle \xi_{11}(x)h'_1(x), h_3(x)\rangle + \langle \xi_{12}(x)h'_2(x), h_3(x)\rangle; \\ & i\beta_{31}(x)(\mu_3(x) - \mu_1(x)) + \\ & + (\xi_{33}(x) - \xi_{11}(x))\langle h'_1(x), h_3(x)\rangle = \xi_{12}(x)\langle h'_2(x), h_3(x)\rangle. \end{aligned} \quad (17)$$

Аналогично, продифференцировав второе уравнение (15) и умножив его скалярно на $h_3(x)$, придем к выражению

$$\begin{aligned} & i\beta_{32}(x)(\mu_3(x) - \mu_2(x)) + \\ & + (\xi_{33}(x) - \xi_{22}(x))\langle h'_1(x), h_3(x)\rangle = \overline{\xi_{12}}(x)\langle h'_2(x), h_3(x)\rangle, \end{aligned} \quad (18)$$

и, продифференцировав третье уравнение системы (15), получим, что

$$\begin{aligned} & \gamma'(x)h_3(x) + \gamma(x)h'_3(x) = \xi'_{33}(x)h_3(x) + \xi_{33}(x)h'_3(x); \\ & i(\beta_{13}(x)h_1(x) + \beta_{23}(x)h_2(x))(\mu_1(x) - \mu_3(x)) + \\ & + \gamma(x)h'_3(x) = \xi'_{33}(x)h_3(x) + \xi_{33}(x)h'_3(x); \\ & \langle h'_3(x), \gamma(x)h_3(x)\rangle = \xi'_{33}(x) + \langle \xi_{33}(x)h'_3(x), h_3(x)\rangle; \\ & \xi_{33}(x)\langle h'_3(x), h_3(x)\rangle - \xi_{33}(x)\langle h'_3(x), h_3(x)\rangle = \xi'_{33}(x). \end{aligned} \quad (19)$$

Таким образом, $\xi'_{33}(x) = 0$, то есть ξ_{33} не зависит от x . Умножим (16) скалярно на $h_1(x)$, получим

$$\begin{aligned} & i\beta_{31}(x)(\mu_3(x) - \mu_1(x))\langle h_3(x), h_1(x)\rangle + \\ & + \langle h'_1(x), \gamma(x)h_1(x)\rangle = \\ & \langle \xi_{11}(x)h'_1(x), h_1(x)\rangle + \langle \xi_{12}(x)h'_2(x), h_1(x)\rangle + \xi'_{11}(x); \\ & \langle h'_1(x), \xi_{11}(x)h_1(x) + \xi_{12}(x)h_2(x)\rangle = \\ & \langle \xi_{11}(x)h'_1(x), h_1(x)\rangle + \langle \xi_{12}(x)h'_2(x), h_1(x)\rangle + \xi'_{11}(x), \end{aligned} \quad (20)$$

то есть

$$\overline{\xi_{12}}(x)\langle h'_1(x), h_2(x)\rangle = \xi_{12}(x)\langle h'_2(x), h_1(x)\rangle + \xi'_{11}(x). \quad (21)$$

При умножении (16) скалярно на $h_2(x)$, получим

$$\begin{aligned} & \xi_{12}(x)(\langle h'_1(x), h_1(x)\rangle - \langle h'_2(x), h_2(x)\rangle) + \\ & + (\xi_{22}(x) - \xi_{11}(x))\langle h'_1(x), h_2(x)\rangle = \xi'_{12}(x). \end{aligned} \quad (22)$$

Продифференцировав второе уравнение системы (15) и умножив его скалярно на $h_1(x)$, а потом на $h_2(x)$, получим следующие соотношения

$$\begin{aligned} & \overline{\xi_{12}(x)}(\langle h'_2(x), h_2(x)\rangle - \langle h'_1(x), h_1(x)\rangle) + \\ & + (\xi_{11}(x) - \xi_{22}(x))\langle h'_1(x), h_2(x)\rangle = \overline{\xi_{12}}'(x); \end{aligned} \quad (23)$$

$$\xi_{12}(x)\langle h'_2(x), h_1(x)\rangle = \overline{\xi_{12}(x)}\langle h'_1(x), h_2(x)\rangle + \xi'_{22}(x); \quad (24)$$

Сложив (21) и (24), получим, что $\xi'_{11}(x) + \xi'_{22}(x) = 0$. Используя (17) и (18), запишем систему уравнений

$$\begin{cases} (\xi_{33} - \xi_{11}(x))\langle h'_1(x), h_3(x) \rangle - \xi_{12}(x)\langle h'_2(x), h_3(x) \rangle = \\ = i\beta_{31}(x)(\mu_1(x) - \mu_3(x)); \\ (\xi_{33} - \xi_{22}(x))\langle h'_1(x), h_3(x) \rangle - \overline{\xi_{12}}(x)\langle h'_2(x), h_3(x) \rangle = \\ = i\beta_{32}(x)(\mu_2(x) - \mu_3(x)). \end{cases} \quad (25)$$

Решим ее по правилу Крамера

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} \xi_{33} - \xi_{11}(x) & -\xi_{12}(x) \\ \xi_{33} - \xi_{22}(x) & -\overline{\xi_{12}(x)} \end{vmatrix} = \\ &= \xi_{12}(x)(\xi_{33} - \xi_{22}(x)) - \overline{\xi_{12}(x)}(\xi_{33} - \xi_{11}(x)). \\ \Delta_1 &= \begin{vmatrix} i\beta_{31}(x)(\mu_1(x) - \mu_3(x)) & -\xi_{12}(x) \\ i\beta_{32}(x)(\mu_2(x) - \mu_3(x)) & -\overline{\xi_{12}(x)} \end{vmatrix} = \\ &= i(\mu_1(x) - \mu_3(x))(\beta_{32}(x)\xi_{12}(x) - \beta_{31}(x)\overline{\xi_{12}(x)}) \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} \xi_{33} - \xi_{11}(x) & i\beta_{31}(x)(\mu_1(x) - \mu_3(x)) \\ \xi_{33} - \xi_{22}(x) & i\beta_{32}(x)(\mu_2(x) - \mu_3(x)) \end{vmatrix} = \\ &= i(\mu_1(x) - \mu_3(x))(\beta_{32}(x)(\xi_{33} - \xi_{11}(x)) - \beta_{31}(x)(\xi_{33} - \xi_{22}(x))) \end{aligned}$$

То есть, с учетом того, что $\mu_1(x) = \mu_2(x)$

$$\begin{aligned} \langle h'_1(x), h_3(x) \rangle &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = \\ &= \frac{i(\mu_1(x) - \mu_3(x))(\beta_{32}(x)\xi_{12}(x) - \beta_{31}(x)\overline{\xi_{12}(x)})}{\xi_{12}(x)(\xi_{33} - \xi_{22}(x)) - \overline{\xi_{12}(x)}(\xi_{33} - \xi_{11}(x))} \end{aligned} \quad (26)$$

а

$$\begin{aligned} \langle h'_2(x), h_3(x) \rangle &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = \\ &= \frac{i(\mu_1(x) - \mu_3(x))[\beta_{32}(x)(\xi_{33} - \xi_{11}(x)) - \beta_{31}(x)(\xi_{33} - \xi_{22}(x))]}{\xi_{12}(x)(\xi_{33} - \xi_{22}(x)) - \overline{\xi_{12}(x)}(\xi_{33} - \xi_{11}(x))} \end{aligned} \quad (27)$$

Продифференцировав третье уравнение системы (15) с учетом того, что ξ_{33} не зависит от x , и после, умножив его сначала на $h_1(x)$, а потом на $h_2(x)$, получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} (\xi_{33} - \xi_{11}(x))\langle h'_3(x), h_1(x) \rangle - \overline{\xi_{12}}(x)\langle h'_3(x), h_2(x) \rangle &= \\ = i\beta_{13}(x)(\mu_1(x) - \mu_3(x)); \\ -\xi_{12}(x)\langle h'_3(x), h_1(x) \rangle + (\xi_{33} - \xi_{22}(x))\langle h'_3(x), h_2(x) \rangle &= \\ = i\beta_{23}(x)(\mu_1(x) - \mu_3(x)). \end{aligned} \quad (28)$$

Также решим ее по правилу Крамера,

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} \xi_{33} - \xi_{11}(x) & -\overline{\xi_{12}(x)} \\ -\xi_{12}(x) & \xi_{33} - \xi_{22}(x) \end{vmatrix} = \\ &= (\xi_{33} - \xi_{22}(x))(\xi_{33} - \xi_{11}(x)) - \xi_{12}^2(x); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \begin{vmatrix} i\beta_{13}(x)(\mu_1(x) - \mu_3(x)) & -\overline{\xi_{12}(x)} \\ i\beta_{23}(x)(\mu_1(x) - \mu_3(x)) & \xi_{33} - \xi_{22}(x) \end{vmatrix} = \\ &= i(\mu_1(x) - \mu_3(x))(\beta_{23}(x)\overline{\xi_{12}(x)} + \beta_{13}(x)(\xi_{33} - \xi_{22}(x))); \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} \xi_{33} - \xi_{11}(x) & i\beta_{13}(x)(\mu_1(x) - \mu_3(x)) \\ -\xi_{12}(x) & i\beta_{23}(x)(\mu_1(x) - \mu_3(x)) \end{vmatrix} = \\ &= i(\mu_1(x) - \mu_3(x))(\beta_{23}(x)(\xi_{33} - \xi_{11}(x)) + \beta_{13}(x)\xi_{12}(x)).\end{aligned}$$

То есть

$$\begin{aligned}\langle h'_3(x), h_1(x) \rangle &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = \\ &= \frac{i(\mu_1(x) - \mu_3(x))(\beta_{23}(x)\overline{\xi_{12}(x)} + \beta_{13}(x)(\xi_{33} - \xi_{22}(x)))}{(\xi_{33} - \xi_{22}(x))(\xi_{33} - \xi_{11}(x)) - \xi_{12}^2(x)},\end{aligned}\quad (29)$$

а

$$\begin{aligned}\langle h'_3(x), h_2(x) \rangle &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = \\ &= \frac{i(\mu_1(x) - \mu_3(x))(\beta_{23}(x)(\xi_{33} - \xi_{11}(x)) + \beta_{13}(x)\xi_{12}(x))}{(\xi_{33} - \xi_{22}(x))(\xi_{33} - \xi_{11}(x)) - \xi_{12}^2(x)}.\end{aligned}\quad (30)$$

Итак, получены выражения для $\langle h'_1(x), h_3(x) \rangle$, $\langle h'_2(x), h_3(x) \rangle$, $\langle h'_3(x), h_1(x) \rangle$, $\langle h'_3(x), h_2(x) \rangle$ в виде (26), (27), (29), (30).

2. Решение системы уравнений при дополнительных условиях

II. В случае, если $\xi_{12}(x) \in \mathbb{R}$, и оператор σ_2 действует на базисные векторы $\{h_k(x)\}_1^3$ следующим образом:

$$\begin{cases} \sigma_2 h_1(x) = \psi(x)h_1(x), \\ \sigma_2 h_2(x) = \nu(x)h_3(x), \\ \sigma_2 h_3(x) = \bar{\nu}(x)h_2(x), \end{cases}\quad (31)$$

где $\psi(x)$ – вещественная функция, а $\nu(x)$ – комплекснозначная функция, получим, что $\beta_{12}(x) = \beta_{21}(x) = \beta_{13}(x) = \beta_{31}(x) = 0$, $\beta_{32}(x) = \nu(x)$, $\beta_{23}(x) = \bar{\nu}(x)$. Тогда

$$\begin{aligned}\langle h'_1(x), h_3(x) \rangle &= \frac{i(\mu_3(x) - \mu_1(x))\varphi(x)}{\xi_{22}(x) - \xi_{11}(x)}; \\ \langle h'_2(x), h_3(x) \rangle &= \frac{i(\mu_3(x) - \mu_1(x))\varphi(x)(\xi_{33} - \xi_{11}(x))}{\xi_{12}(x)(\xi_{22}(x) - \xi_{11}(x))}; \\ \langle h'_3(x), h_1(x) \rangle &= \frac{i(\mu_1(x) - \mu_3(x))\varphi(x)\xi_{12}(x)}{(\xi_{33} - \xi_{22}(x))(\xi_{33} - \xi_{11}(x)) - \xi_{12}^2(x)}; \\ \langle h'_3(x), h_2(x) \rangle &= \frac{i(\mu_1(x) - \mu_3(x))\varphi(x)(\xi_{33} - \xi_{11}(x))}{(\xi_{33} - \xi_{22}(x))(\xi_{33} - \xi_{11}(x)) - \xi_{12}^2(x)}.\end{aligned}\quad (32)$$

Так як $\langle h_k(x), h_s(x) \rangle = 0$, нетрудно заметить, что $(\langle h_k(x), h_s(x) \rangle)' = \langle h'_k(x), h_s(x) \rangle + \langle h_k(x), h'_s(x) \rangle = 0$, или

$$\langle h'_k(x), h_s(x) \rangle = -\overline{\langle h'_s(x), h_k(x) \rangle}. \quad (33)$$

В таком случае

$$\frac{i(\mu_3(x) - \mu_1(x))\varphi(x)}{\xi_{22}(x) - \xi_{11}(x)} = -\frac{i(\mu_1(x) - \mu_3(x))\varphi(x)\xi_{12}(x)}{(\xi_{33} - \xi_{22}(x))(\xi_{33} - \xi_{11}(x)) - \xi_{12}^2(x)},$$

значит, $(\xi_{22}(x) - \xi_{11}(x))\xi_{12}(x) = (\xi_{33} - \xi_{22}(x))(\xi_{33} - \xi_{11}(x)) - \xi_{12}^2(x)$.

Предположим, что $\langle h_k(x), h'_k(x) \rangle = i\delta_k(x)$, а $\langle h'_1(x), h_2(x) \rangle = a(x) + ib(x)$, где $\delta_k(x)$, $a(x)$, $b(x) \in \mathbb{R}$. Из (21) получим следующее выражение

$$\xi'_{12}(x) = i\xi_{12}(x)(\delta_1(x) - \delta_2(x)) + (\xi_{22}(x) - \xi_{11}(x))(a(x) + ib(x)). \quad (34)$$

Приравняв вещественные и мнимые части, придем к соотношениям:

$$a(x) = \frac{\xi'_{12}(x)}{\xi_{22}(x) - \xi_{11}(x)}, \quad b(x) = \frac{\xi_{12}(x)(\delta_2(x) - \delta_1(x))}{\xi_{22}(x) - \xi_{11}(x)}.$$

$$\text{То есть } \langle h'_1(x), h_2(x) \rangle = \frac{\xi'_{12}(x)}{\xi_{22}(x) - \xi_{11}(x)} + i \frac{\xi_{12}(x)(\delta_2(x) - \delta_1(x))}{\xi_{22}(x) - \xi_{11}(x)}.$$

Разложив вектора $h'_k(x)$ по базису $h_k(x)$, получим

$$h'_k(x) = \sum_{s=1}^3 \langle h'_s(x), h_s(x) \rangle h_s(x). \quad (35)$$

Подставив полученные выражения, придем к системе

$$\begin{aligned} h'_1(x) &= i\delta_1(x)h_1(x) + \left(\frac{\xi'_{12}(x) + i\xi_{12}(x)(\delta_2(x) - \delta_1(x))}{\xi_{22}(x) - \xi_{11}(x)} \right) h_2(x) + \\ &\quad + \frac{i(\mu_3(x) - \mu_1(x))\varphi(x)}{\xi_{22}(x) - \xi_{11}(x)} h_3(x); \\ h'_2(x) &= \left(\frac{-\xi'_{12}(x) + i\xi_{12}(x)(\delta_2(x) - \delta_1(x))}{\xi_{22}(x) - \xi_{11}(x)} \right) h_1(x) + i\delta_2(x)h_2(x) + \\ &\quad + \frac{i(\mu_3(x) - \mu_1(x))\varphi(x)(\xi_{33} - \xi_{11}(x))}{\xi_{12}(x)(\xi_{22}(x) - \xi_{11}(x))} h_3(x); \\ h'_3(x) &= -\frac{i(\mu_3(x) - \mu_1(x))\varphi(x)}{\xi_{22}(x) - \xi_{11}(x)} h_1(x) - \\ &\quad - \frac{i(\mu_3(x) - \mu_1(x))\varphi(x)(\xi_{33} - \xi_{11}(x))}{\xi_{12}(x)(\xi_{22}(x) - \xi_{11}(x))} h_2(x) + i\delta_3(x)h_3(x). \end{aligned} \quad (36)$$

Введем обозначения, считая, что $\xi_{ks} = \text{const}$ ($k, s = \overline{1, 3}$),

$$m = \frac{\xi_{33} - \xi_{11}}{\xi_{12}(\xi_{22} - \xi_{11})}, \quad k = \frac{\xi_{12}}{\xi_{22} - \xi_{11}}, \quad n = \frac{1}{\xi_{22} - \xi_{11}},$$

$d(x) = (\mu_3(x) - \mu_1(x))\varphi(x)$. Тогда система (35) запишется в следующем виде:

$$\begin{cases} h'_1(x) = i\delta_1(x)h_1(x) + ik(\delta_2(x) - \delta_1(x))h_2(x) + ind(x)h_3(x); \\ h'_2(x) = -ik(\delta_2(x) - \delta_1(x))h_1(x) + i\delta_2(x)h_2(x) + imd(x)h_3(x); \\ h'_3(x) = -ind(x)h_1(x) - imd(x)h_2(x) + i\delta_3(x)h_3(x). \end{cases} \quad (37)$$

Пусть $f_k(x) = \exp^{-i \int_0^x \delta_k(t) dt}$. Теперь система (36) примет вид

$$\begin{cases} f'_1(x) = ik(\delta_2(x) - \delta_1(x))\exp^{i \int_0^x (\delta_2(t) - \delta_1(t)) dt} f_2(x) + \\ \quad + ind(x)\exp^{i \int_0^x (\delta_3(t) - \delta_1(t)) dt} f_3(x); \\ f'_2(x) = -ik(\delta_2(x) - \delta_1(x))\exp^{-i \int_0^x (\delta_2(t) - \delta_1(t)) dt} f_1(x) + \\ \quad + imd(x)\exp^{i \int_0^x (\delta_3(t) - \delta_2(t)) dt} f_3(x); \\ f'_3(x) = -ind(\overline{x})\exp^{-i \int_0^x (\delta_3(t) - \delta_1(t)) dt} f_1(x) - \\ \quad - imd(\overline{x})\exp^{-i \int_0^x (\delta_3(t) - \delta_2(t)) dt} f_2(x). \end{cases} \quad (38)$$

В случае $\delta_2(t) = \delta_1(t)$ система примет ранее изученный вид, а именно

$$\begin{cases} f'_1(x) = ind(x)\exp^{i \int_0^x (\delta_3(t) - \delta_1(t)) dt} f_3(x); \\ f'_2(x) = imd(x)\exp^{i \int_0^x (\delta_3(t) - \delta_2(t)) dt} f_3(x); \\ f'_3(x) = -ind(\overline{x})\exp^{-i \int_0^x (\delta_3(t) - \delta_1(t)) dt} f_1(x) - \\ \quad - imd(\overline{x})\exp^{-i \int_0^x (\delta_3(t) - \delta_2(t)) dt} f_2(x), \end{cases} \quad (39)$$

решения которой легко находятся при некоторых дополнительных условиях. Например, если $d(x)$ – вещественная функция, а $nd(x)\exp^{i \int_0^x (\delta_3(t) - \delta_1(t)) dt}$, $md(x)\exp^{i \int_0^x (\delta_3(t) - \delta_2(t)) dt}$ линейно зависимы, то есть $m \cdot \exp^{i \int_0^x (\delta_3(t) - \delta_2(t)) dt} = m \cdot n \cdot \exp^{i \int_0^x (\delta_3(t) - \delta_1(t)) dt} = k \cdot v(x)$, где $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, тогда система (39) примет вид:

$$\begin{cases} f'_1(x) = iv(x)f_3(x), \\ f'_2(x) = ikv(x)f_3(x), \\ f'_3(x) = -iv(x)(f_1(x) + kf_2(x)), \\ f_j(0) = f_0^j, \quad j = \overline{1, 3} \end{cases} \quad (40)$$

Лемма 1. Если $k \in \mathbb{R}$, то система уравнений (40) имеет единственное решение:

$$\begin{cases} f_1(x) = \frac{if_0^3}{\sqrt{1+k^2}} \exp^{\varphi(x)}, \\ f_2(x) = \frac{ikf_0^3}{\sqrt{1+k^2}} \exp^{\varphi(x)}, \\ f_3(x) = f_0^3 \exp^{\varphi(x)}, \end{cases} \quad (41)$$

$$\varepsilon \partial_e \varphi(x) = \sqrt{1+k^2} \int_0^x v(t) dt.$$

Для системи (38) примем обозначения

$$\begin{cases} a(x) = ik(\delta_2(x) - \delta_1(x)) \exp^{i \int_0^x (\delta_2(t) - \delta_1(t)) dt}; \\ b(x) = ind(x) \exp^{i \int_0^x (\delta_3(t) - \delta_1(t)) dt}; \\ c(x) = imd(x) \exp^{i \int_0^x (\delta_3(t) - \delta_2(t)) dt}, \end{cases} \quad (42)$$

будем считать, что $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ – вещественнозначные функции, тогда система (38) примет вид

$$\begin{cases} f'_1(x) = a(x)f_2(x) + b(x)f_3(x); \\ f'_2(x) = a(x)f_1(x) + c(x)f_3(x); \\ f'_3(x) = b(x)f_1(x) + c(x)f_2(x). \end{cases} \quad (43)$$

Теорема 1. Пусть $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ – вещественнозначные функции, положим

$$\begin{aligned} A(x) &= \exp^{2 \int_0^x a(t) dt}, \\ P(x) &= (b(x) + c(x)) \exp^{- \int_0^x a(t) dt}, \\ Q(x) &= (b(x) - c(x)) \exp^{\int_0^x a(t) dt}. \end{aligned} \quad (44)$$

Кроме того, выполняются следующие условия

$$Q'(x) := k(x)Q(x), \quad (45)$$

$$(P(x)A^2(x))' = k(x)P(x)A^2(x), \quad (46)$$

$$P^2(x)A^2(x) + Q^2(x) = \frac{1}{2A(x)} \exp^{- \int_0^x k(t) dt}, \quad p > 0, \quad p \in \mathbb{R}, \quad (47)$$

где $k(x)$ – вещественная дифференцируемая функция. Тогда система (43) имеет единственное решение

$$f_1(x) = f_1(0) + \frac{1}{2} \left(\sqrt{A} \int_0^x P(t)f_3(t) dt + \frac{1}{\sqrt{A}} \int_0^x Q(t)f_3(t) dt \right) \quad (48)$$

$$f_2(x) = f_2(0) + \frac{1}{2} \left(\sqrt{A} \int_0^x P(t)f_3(t) dt - \frac{1}{\sqrt{A}} \int_0^x Q(t)f_3(t) dt \right) \quad (49)$$

$$f_3(x) = f_3(0) \cos \sqrt{p} \int_0^x g_1(t) dt + \frac{2(b(0)f_1(0) + c(0)f_2(0))}{\sqrt{p}} \sin \sqrt{p} \int_0^x g_1(t) dt. \quad (50)$$

Доказательство. Складывая и вычитая первые два уравнения этой системы, получим следующий ее вид

$$\begin{cases} (f_1(x) + f_2(x))' = a(x)(f_1(x) + f_2(x)) + (b(x) + c(x))f_3(x); \\ (f_1(x) - f_2(x))' = -a(x)(f_1(x) - f_2(x)) + (b(x) - c(x))f_3(x); \\ f'_3(x) = b(x)f_1(x) + c(x)f_2(x). \end{cases} \quad (51)$$

Введем в рассмотрение следующие функции

$$\begin{cases} F_+(x) = \exp^{-\int_0^x a(t)dt} (f_1(x) + f_2(x)); \\ F_-(x) = \exp^{\int_0^x a(t)dt} (f_1(x) - f_2(x)). \end{cases} \quad (52)$$

Теперь система (38) приобретает вид

$$\begin{cases} F'_+(x) = (b(x) + c(x))f_3(x)\exp^{-\int_0^x a(t)dt}; \\ F'_-(x) = (b(x) - c(x))f_3(x)\exp^{\int_0^x a(t)dt}; \\ f'_3(x) = \frac{1}{2}(b(x) + c(x))\exp^{\int_0^x a(t)dt} F_+(x) + \\ \quad + \frac{1}{2}(b(x) - c(x))\exp^{-\int_0^x a(t)dt} F_-(x). \end{cases} \quad (53)$$

Упростим систему, используя обозначения (44)

$$\begin{cases} F'_+(x) = P(x)f_3(x); \\ F'_-(x) = Q(x)f_3(x); \\ f'_3(x) = \frac{1}{2}P(x)A(x)F_+(x) + \frac{1}{2}Q(x)A^{-1}(x)F_-(x). \end{cases} \quad (54)$$

Введем условия (45) и (46), теперь система (54) приобретает вид

$$\begin{cases} B'(x) = k(x)B(x) + (P^2(x)A^2(x) + Q^2(x))f_3(x); \\ f'_3(x) = \frac{1}{2A(x)}B(x). \end{cases} \quad (55)$$

где $B(x) = P(x)A^2(x)F_+(x) + Q(x)F_-(x)$. Пусть $G(x) = \exp^{-\int_0^x k(t)dt} B(x)$, тогда

$$\begin{cases} G'(x) = (P^2(x)A^2(x) + Q^2(x))f_3(x); \\ f'_3(x) = \frac{1}{2A(x)}G(x)\exp^{-\int_0^x k(t)dt}. \end{cases} \quad (56)$$

Перепишем систему, используя (47) и, обозначив $g_1(x) = P^2(x)A^2(x) + Q^2(x) = \frac{1}{2A(x)}\exp^{-\int_0^x k(t)dt}$, придем к соотношениям

$$\begin{cases} G'(x) = g_1(x)f_3(x); \\ f'_3(x) = pg_1(x)G(x), p \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (57)$$

Дифференцируя второе уравнение системы (57) и подставляя первое, получим соотношение

$$f_3''(x) - \frac{g_1'(x)}{g_1(x)} f_3'(x) - pg_1^2(x)f_3(x) = 0. \quad (58)$$

Решая (58), получим

$$f_3(x) = f_3(0)\cos\sqrt{p} \int_0^x g_1(t)dt + C_2 \sin\sqrt{p} \int_0^x g_1(t)dt. \quad (59)$$

Используя (52) и (54) найдем выражения для $f_1(x)$ и $f_2(x)$:

$$\begin{aligned} f_1(x) + f_2(x) &= \exp^{\int_0^x a(t)dt} \left(\int_0^x P(t)f_3(t)dt + f_1(0) + f_2(0) \right), \\ f_1(x) - f_2(x) &= \exp^{-\int_0^x a(t)dt} \left(\int_0^x Q(t)f_3(t)dt + f_1(0) - f_2(0) \right). \end{aligned} \quad (60)$$

Нетрудно заметить, что выражения (60) могут быть записаны в виде (48) и (49).

Благодарность. Автор выражает искреннюю признательность за постановку задачи и внимание к работе доктору физ.-мат. наук, профессору Золотареву В. А.

ЛИТЕРАТУРА

1. Глазман И.М., Любич Ю.И., Конечномерный линейный анализ. — М.: Наука, 1969. — 476 с.
2. Золотарев В.А., Аналитические методы спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов. — Харьков: ХНУ, 2003. — 342 с.
3. Золотарев В.А., Временные конусы и функциональная модель на римановой поверхности // Мат. сб., — 1990. — Т. 181. — 7. — С. 965–994.
4. Золотарев В.А., Спектральный анализ несамосопряженных коммутативных систем операторов и нелинейные дифференциальные уравнения // Теория функций и функцион. анализ, и их прил. Харьков: Респ. сб., 1983. — Вып. 40. — С. 68–71.
5. Золотарев В.А., Треугольные модели и задачи Коши для характеристических функций коммутирующих систем операторов. — Рукопись депонирована в ВИНТИ РЖК "Математика" 1Б916 деп, 1981. — 66 с.

6. Золотарев В.А., Модельные представления систем самосопряженных операторов, удовлетворяющих коммутационным соотношениям. // Математический сборник, 2010. — Т. 201. — **10**. — С. 59–92.
7. Лившиц М.С., Янцевич А.А., Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. — Харьков: Изд. Харьк. ун-та, 1971. — 160 с.

Статья получена: 2.11.2013; принята: 23.03.2015.

Ідентифікація жестких включень в тонкій пластині

Н. А. Гук, Н. І. Степанова

*Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара
пр. Гагаріна, 72, 49000, Дніпропетровськ, Україна
nataly-guk@rambler.ru, nist66@mail.ru*

Рассматривается задача идентификации местоположения жестких включений в тонкой пластине. Для дискретизации неизвестных функций математической модели используется метод конечных элементов. Геометрическая обратная задача формулируется в условно-корректной постановке с учетом ограничений на множество решений. Идентификация параметров включений выполняется путем минимизации функции Лагранжа.

Ключевые слова: жесткое включение, геометрическая обратная задача, метод конечных элементов, функция Лагранжа.

Гук Н. А., Степанова Н. І., **Ідентифікація жорстких включень у тонкій пластині.** Розглядається задача ідентифікації розташування жорстких включень у тонкій пластині. Для дискретизації невідомих функцій математичної моделі використовується метод скінченних елементів. Геометрична обернена задача формулюється в умовно-коректній постановці з урахуванням обмежень на множину розв'язків. Ідентифікація параметрів включень виконується шляхом мінімізації функції Лагранжа.

Ключові слова: жорстке включення, геометрична обернена задача, метод скінченних елементів, функція Лагранжа.

N. A. Guk, N. I. Stepanova, **Identification of rigid inclusions in the thin plate.** The problem of identifying the location of the rigid inclusions in thin plate is considered. The finite element method is being used for discretization the unknown functions of the mathematical model. Geometric inverse problem is formulated in the conditional-correct statement, taking into account restrictions on the number of solutions. Parameters identification is performed via minimization of the Lagrangian.
Keywords: rigid inclusion, geometric inverse problem, finite element method, the Lagrangian.

2000 Mathematics Subject Classification 74G75.

Введение

Для прогнозирования ресурса конструкций, находящихся в процессе эксплуатации под воздействием механических и температурных полей и содержащих внутренние неоднородности – дефекты типа трещин, пустот, включений, необходима разработка эффективных методов обнаружения таких дефектов и определения их параметров. В частности, задачи идентификации жестких включений возникают при выполнении расчетов инженерных конструкций, при проектировании фундаментов зданий в строительной механике, при разработке методик прочностных расчетов композиционных материалов, при решении проблем предотвращения развития трещин в конструкциях.

Для обнаружения указанных дефектов могут быть использованы как методы неразрушающего контроля, основанные на различных физических эффектах, возникающих при взаимодействии внешних полей с исследуемым объектом [1], [2], так и аналитические методы.

Задача диагностики включений рассматривается в работах [3]–[7], [9]. В [3] предложен метод идентификации дефектов по измеренным значениям перемещений и усилий на внешней границе упругого тела, основанный на применении функционала взаимности. Применение такого подхода позволяет выразить неизвестные параметры дефекта (координаты центра, ориентацию и линейный размер дефекта) через отличные от нуля значения функционала взаимности в виде явных аналитических выражений.

В работе [4] приводятся результаты определения формы отслоившегося тонкого жесткого включения в однородной изотропной пластине Киргхофа-Лява по дополнительной информации о решении задачи равновесия на внешней границе тела. Сформулированная обратная задача сводится к задаче оптимального управления, где в качестве функции управления выступает форма включения.

Использование аналитических методов не дает возможность получить решение задачи в общем виде, возможна идентификация дефектов только для случаев, когда исследуемая область и включение имеют каноническую форму.

Для устранения указанных недостатков и организации процесса идентификации в режиме «on-line» весьма эффективным является использование аппарата обратных задач, позволяющего в автоматическом режиме выполнять процедуру идентификации параметров дефектов реальной тонкостенной системы по измеренным в эксперименте характеристикам напряженно-деформированного состояния. При этом обратная задача может быть сформулирована как коэффициентная (неизвестными являются коэффициенты дифференциальных операторов) [5], либо как геометрическая обратная задача (неизвестными являются геометрические параметры повреждения) [6], [7]. Указанные постановки пригодны для решения задач с непрерывной изменяемостью свойств.

Для устранения проблем, вызванных некорректностью обратных задач,

предлагается использование условно-корректной постановки, основанной на идее сужения класса возможных решений до некоторого множества, на котором ее решение будет устойчиво [8].

Для поиска минимума функционала качества обратной задачи в случаях, когда число неизвестных параметров велико, функционал имеет несколько локальных минимумов или является сильно овражистым, используются перспективные вычислительные алгоритмы [9].

В настоящей работе предлагается моделировать жесткое включение с использованием функций, характеризующих местоположение дефекта, а для устранения некорректности задачи сформулировать ограничения на решение, которые при формировании функционала качества обратной задачи присоединяются с использованием множителей Лагранжа.

Постановка задачи

Рассматривается задача деформирования неоднородной упругой пластины толщиной $2h$, занимающей конечную односвязную область $\tilde{G} = \{X \mid X = (x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq b\}$ с границей Γ , где $X = \{(x, y)\}$ — вектор координат точки области \tilde{G} ; a, b — линейные размеры пластины. Пластина находится под действием нормального к поверхности внешнего давления.

Внутри области \tilde{G} имеется несколько непересекающихся подобластей G_m , $m = \overline{1, M}$ с тензорами упругих модулей C_{ijkl}^m , отличными от свойств основного тела и возможно разными для каждой подобласти. Полость и жесткие включения рассматриваются как частные случаи упругого включения с тензорами упругих модулей $C_{ijkl}^m = 0$ и $C_{ijkl}^m = \infty$ соответственно.

Линейно упругое тело с тензором упругих модулей C_{ijkl} занимает область $G = \tilde{G} \setminus \bigcup_m G_m$. Упругие свойства области G предполагаются известными. На границах внутренних подобластей и области G предполагается полное сцепление, непрерывность векторов перемещений и напряжений.

Решение задачи предполагает определение в пластине местоположения включений. Указанная задача может быть сведена к задаче идентификации параметров модели деформирования пластины, описываемой соответствующей краевой задачей, а именно координат точек X_k , $k = \overline{1, K}$, в которых расположены включения.

Задача идентификации может быть сформулирована как обратная задача [8]. В качестве неизвестных выступает вектор $H(X) = \{X_k\}$, компонентами которого являются координаты точек пластины, где расположены жесткие включения.

Информацией для определения вектора неизвестных $H(X)$ служат измеренные на поверхности тела в конечном числе точек наблюдений X_p , $p = \overline{1, P}$, значения функции деформации $\varepsilon(X, H) = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{22}\}$

$$\varepsilon(X, H)|_{X=X_p} = \varepsilon^*, p = \overline{1, P}.$$

Обратная задача формулируется в вариационной постановке и сводится к задаче минимизации функционала $I(H)$, характеризующего среднеквадра-

тичное уклонение между измеренными ε^* и вычисленными значениями компонент функции деформаций $\varepsilon(X_p, H)$ в точках X_p :

$$H(X) = \arg \min_{H \in \bar{H}} I(H), \quad (1)$$

$$I(H) = \int_{\tilde{G}} \sum_p (\varepsilon(X_p, H) - \varepsilon^*)^2 d\tilde{G} \quad H \in \bar{H}; \quad \varepsilon(X_p, H) \in \bar{U},$$

где \bar{U}, \bar{H} —области определения неизвестных функций прямой и обратной задачи.

Деформации $\varepsilon(X_p, H)$ в точках X_p вычисляются с использованием математической модели прямой задачи при заданном векторе $H(X)$.

Сужение класса возможных решений прямой и обратной задачи до некоторого множества, на котором решение будет устойчиво, позволяет сформулировать обратную задачу в условно-корректной постановке.

Математическая модель прямой и обратной задачи

Рассматриваемая тонкая пластина находится в равновесии под действием внешней нагрузки q . Задача об определении напряженно-деформированного состояния пластины при известном местоположении включений является прямой задачей и формулируется как задача минимизации функционала потенциальной энергии на множестве допустимых нормальных перемещений $w(X, H)$ в виде:

$$\delta \mathcal{E}_0 = \delta A, \quad (2)$$

где \mathcal{E}_0, A — работа внутренних и внешних сил.

За основные неизвестные прямой задачи принимаются значения функции нормальных перемещений $w(X, H)$. Тогда потенциальную энергию деформации можно выразить через потенциальную энергию деформации срединной поверхности пластины и потенциальную энергию изгиба в виде:

$$\mathcal{E}_0 = \int_{\tilde{G}} (M_{11}\chi_{11} + M_{22}\chi_{22} + 2M_{12}\chi_{12}) d\tilde{G},$$

где $\chi_{ij}, i, j = 1, 2$ определяются из геометрических соотношений, связывающих кривизны срединной поверхности и функцию нормальных перемещений

$$\chi_{11} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \chi_{22} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \chi_{12} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (3)$$

Работа внешних сил представляется в виде:

$$A = \int_G q w(X, H) dG.$$

Выражения для изгибающих моментов M_{11}, M_{22}, M_{12} с учетом закона Гука принимают вид:

$$M_{11} = -D(\chi_{11} + \nu \chi_{22}); \quad M_{22} = -D(\chi_{22} + \nu \chi_{11}); \quad M_{12} = -(1 - \nu) D \chi_{12},$$

где D — цилиндрическая жесткость пластины.

Цилиндрическая жесткость пластины при наличии в ней включений является переменной и может быть представлена в виде:

$$D = D_0 + \sum_k D^* \delta(X - X_k),$$

где $D_0 = \frac{E_0 h^3}{12(1-\nu^2)}$, D^* — цилиндрическая жесткость пластины и включения соответственно; E_0 — модуль Юнга материала пластин; ν — коэффициент Пуассона; $\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака; X_k — координаты точек пластины, в которых расположены жесткие включения, $k = \overline{1, N}$.

Компоненты вектор-функции деформации на поверхности пластины, где производится измерение, образуют вектор $\varepsilon(X, H) = \{h\chi_{11}, h\chi_{12}, h\chi_{22}\}^T$.

Для представления компонент вектора неизвестных обратной задачи $H(X) = \{X_k\}$, $k = \overline{1, N}$, составленного из координат точек пластины, в которых расположены жесткие включения, введем функцию

$$u_k(X) = \begin{cases} 1, & \text{если в точке } X_k \text{ есть включение,} \\ 0, & \text{если в точке } X_k \text{ нет включения.} \end{cases}$$

С учетом введенной функции изгибная жесткость пластины с включением (включениями) может быть представлена в виде:

$$D = D_0 + \sum_k D^* u_k.$$

Тогда неизвестными обратной задачи являются компоненты вектора $H(X) = \{u_k\}$, которые определяются из условия (1).

Границные условия жесткого защемления на кромках пластины $x = 0$, $x = a$ формулируются в виде:

$$w(0, H) = w'_x(0, H) = 0; \quad w(a, H) = w'_x(a, H) = 0. \quad (4)$$

Границные условия для свободных кромок $y = 0$, $y = b$ являются естественными для уравнения (2).

Метод решения

Для построения решения прямой задачи (2), (4) и обратной задачи (1) осуществляется переход к дискретной модели пластины с использованием метода конечных элементов (МКЭ). Использование МКЭ для определения напряженно-деформированного состояния конструкции требует представления неизвестных функций задачи и искомых геометрических характеристик системы в параметрическом виде. Для этого на области \tilde{G} вводятся следующие сетки:

- сетка с узлами X_n для описания неизвестных функций прямой задачи, где $X = \{X_n\}$, $X_n = (x_n, y_n)$, $n = \overline{1, N}$, тогда функция, характеризующая нормальные перемещения пластины, представляется в виде вектора $w(X, H) = \{w_n\}$;

- сетка с узлами X_p для описания координат точек измерений (все узлы X_p выбираются из числа узлов X_n), где $X = \{X_p\}$, $X_p = (x_p, y_p)$, $p = \overline{1, P}$; тогда функция, характеризующая деформации пластины в точках X_n представляется в виде вектора $\varepsilon(X, H) = \{\varepsilon_p(H)\}$, результаты наблюдений описываются вектором измеренных значений деформаций $\{\varepsilon_p^*\}$ в точках X_p ;
- сетка с узлами X_k для описания координат точек пластины, в которых имеется включение (все узлы X_k выбираются из числа X_n и находятся внутри области \tilde{G}), где $X = \{X_k\}$, $X_k = (x_k, y_k)$, $k = \overline{1, N}$, тогда функция $H(X)$, описывающая местоположение включения, представляется в виде вектора $H(X) = \{u_k\}$.

С использованием введенной дискретизации неизвестные функции прямой и обратной задач на элементе задаются для локальной системы координат при помощи аппроксимаций через узловые значения.

Вариационное уравнение (2) принимает вид:

$$\int_{\tilde{G}} \{\delta \chi_{ij}\}^T \{M_{ij}\} d\tilde{G} - \int_{\tilde{G}} \{\delta w\}^T \{R\} d\tilde{G} = 0, \quad i, j = 1, 2, \quad (5)$$

$\{R\}$ — вектор объемной нагрузки.

Связь между кривизнами срединной поверхности и перемещениями на элементе устанавливается соотношениями (3), которые в векторной форме представим следующим образом:

$$\{\chi_{ijn}\} = [L]\{w_n\}, n = \overline{1, N},$$

где $[L]$ — матрица дифференцирования.

После выполнения соответствующей процедуры интегрирования соотношения (5) при заданной аппроксимации неизвестных функций, и суммирования матриц элементов, получаем разрешающую систему линейных алгебраических уравнений для определения узловых перемещений в виде:

$$A(u)w = R, \quad (6)$$

или в развернутом виде:

$$\sum_{j=1}^N (a_{ij} + b_{ij}u_j)w_j - R_i = 0, i = \overline{1, N}$$

где $w = \{w_j\}$ — вектор нормальных перемещений в узлах пластины; $R = \{R_i\}$ — вектор нагрузки; $A(u) = [\tilde{a}_{ij}]$ — матрица жесткости ансамбля конечных элементов с компонентами $\tilde{a}_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}u_j)$, $i, j = \overline{1, N}$; $\{u_j\}$ —

вектор, характеризующий наличие включений в узлах пластины; a_{ij} , b_{ij} — коэффициенты, определяемые путем интегрирования соотношений (5) с помощью метода конечных элементов, причем компоненты a_{ij} характеризуют жесткость пластины без включения, b_{ij} — наличие жестких включений в соответствующих узлах пластины.

Предполагается, что количество точек пластины, в которых имеется включение, ограничено, и справедливо условие:

$$\sum_{j=1}^N u_j = K, \quad (7)$$

где K — общее число точек области, занятой включением (включениями).

С использованием введенной дискретизации решение обратной задачи описывается вектором $H = \{u_j\}$. Определим множество $Q = \{q_m\}$, $m = \overline{1, M}$, $M = C_N^K$ n -мерных векторов q_m , $q_m = \{q_{1m} q_{2m} \dots q_{km} 0 \dots 0\}$, в которых компоненты q_{km} , $k = \overline{1, K}$ соответствуют номерам узлов, в которых есть включения, значения этих компонент равны единицам, на остальных ($N - K$) позициях располагаются нули.

Задача определения местоположения дефекта сводится к задаче определения вектора $H = \{u_j\}$ из условия (1), при этом функционал в (1) после подстановки конечноэлементной аппроксимации функций задачи приобретает вид:

$$I(H) = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^P (\varepsilon_p(H) - \varepsilon_p^*)^T (\varepsilon_p(H) - \varepsilon_p^*). \quad (8)$$

Так как компоненты вектора $\{\varepsilon_p(H)\}$ определяются из соотношений (3) путем подстановки в них решений задачи (6), то к функции (8) необходимо присоединить условия, обеспечивающие решение прямой задачи. Условия (6) и (7) присоединяются к функции (8) с помощью множителей Лагранжа:

$$I(H) = \frac{1}{2} (B_p w_p - \varepsilon_p^*)^T (B_p w_p - \varepsilon_p^*) + \sum_{i=1}^N \varphi_i \left(\sum_{j=1}^N (a_{ij} + b_{ij} u_j) w_j - R_i \right) + \\ + \varphi_0 \sum_{j=1}^N (u_j - K), \quad (9)$$

где w_p — нормальные перемещения в узлах X_p ; B_p — коэффициенты, определяемые из условия аппроксимации функции $w(X)$ внутри конечного элемента и соотношений (3); $\psi = (\varphi_0, \varphi_i)$, $i = \overline{1, N}$ — вектор множителей Лагранжа.

Из условий экстремума функции $I(H)$ получим систему алгебраических

уравнений:

$$\begin{aligned}
 \forall i, j = p \quad & (B_p w_p - \varepsilon_p^*) + \varphi_i \sum_{j=1}^N (a_{ij} + b_{ij} u_j) - R_i = 0 \\
 \forall i, j \neq p \quad & \varphi_i \sum_{j=1}^N (a_{ij} + b_{ij} u_j) - R_i = 0 \\
 \forall i, j \quad & \sum_{i=1}^N \varphi_i \sum_{j=1}^N b_{ij} w_j + \varphi_0 = 0 \\
 & \sum_{j=1}^N u_j = K
 \end{aligned} \tag{10}$$

Тогда значения компонент вектора $\{u_j^*\}$ могут быть определены из условия (11)

$$u_j^* = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi_i \sum_{j=1}^N b_{ij} w_j + \varphi_0 < 0 \\ 0, & \text{если } \varphi_i \sum_{j=1}^N b_{ij} w_j + \varphi_0 > 0 \\ \text{любое число, } \in [0, 1], & \text{если } \varphi_i \sum_{j=1}^N b_{ij} w_j + \varphi_0 = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Если упорядочить значения $\varphi_i \sum_{j=1}^N b_{ij} w_j$, $i = \overline{1, N}$ по возрастанию, то можно построить последовательность компонент $\{q_{1m}^* q_{2m}^* \dots q_{km}^*\}$ в векторе $q_m = \{q_{1m} q_{2m} \dots q_{km} 0 \dots 0\}$, при которой

$$\sum_{i=1}^N \varphi_i \sum_{j=1}^N b_{ij} w_j = \min \sum_{i=1}^N \varphi_i \sum_{j=1}^N b_{ij} w_j, \quad i, j = \overline{1, N}.$$

Значения φ_0 определяются из условия (11) с учетом (7) в виде:

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} \left(\varphi_k \sum_{j=1}^N b_{kj} w_j + \varphi_{k+1} \sum_{j=1}^N b_{k+1j} w_j \right). \tag{12}$$

Алгоритм определения местоположения включения

Описанный подход к решению обратной задачи может быть реализован следующим алгоритмом:

1. Инициализировать переменные: l — номер шага итерационного процесса; K — число точек, в которых есть включение; $H^l = \{u_j^l\}$, $j = \overline{1, N}$ — вектор решения обратной задачи.
2. Задать начальные значения: $l = 0$; K ; $H^0 = \{u_j^0\}$, $j = \overline{1, N}$.
3. Решить прямую задачу (6) при известном векторе H^l , получить вектор $\{w_n\}$, матрицу $A(u) = [\tilde{a}_{ij}]$, сформировать функционал (9).
4. Сформировать систему (10), из решения первого и второго уравнений системы (10) определить значения φ_i^l , $i = \overline{1, N}$.
5. Сформировать $\varphi_i^l \sum_{j=1}^N b_{ij} w_j$, $i = \overline{1, N}$ упорядочить значения по возрастанию, выбрать первые K значений.
6. Определить значение $\varphi_0^{(l)}$ из условия (12).
7. $l = l + 1$.
8. Определить значения компонент вектора $H^l = \{u_j^l\}$, $j = \overline{1, N}$ из условия (11).
9. Проверить выполнение условия $I^l(H) > \delta$, где δ — малое наперед заданное число; если условие выполняется, то перейти к шагу 3, иначе перейти к следующему шагу.
10. Конец.

Результаты численного эксперимента

Представленный алгоритм был применен для определения местоположения включений ($E_1 = 2 \cdot 10^{15}$ Н/м²) в тонкой прямоугольной пластине ($a/b = 1$, $a/2h = 100$, $E_0 = 2 \cdot 10^6$ Н/м², a , b , $2h$ — длина, ширина, толщина пластины) по измеренным значениям деформаций, которые фиксируются датчиками, установленными на поверхностях пластины.

Решение прямой задачи (2),(4), моделирующее процесс измерения деформаций пластины, выполнялось с использованием пакета прикладных программ, реализующих метод конечных элементов. В результате решения прямой задачи при заданном местоположении включения получены значения деформаций, которые в дальнейшем использовались в качестве результата наблюдений ε^* .

С использованием предложенного подхода была выполнена идентификация местоположения включений для случаев, когда в пластине имелось одно и несколько включений. Модель пластины с двумя включениями представлена на рис. 1, местоположение включений отмечено темным фоном, площадь включения 1 составляет 0.5% от площади пластины, площадь включения 2 — 1%.

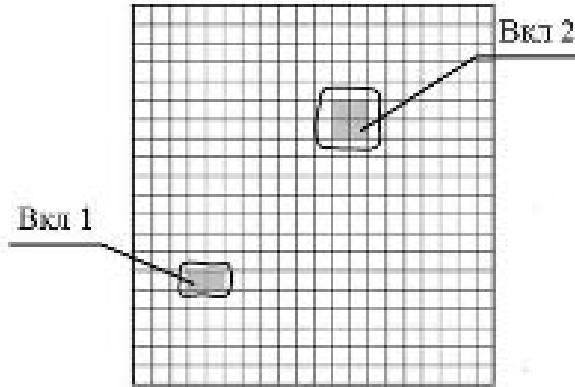


Рис. 1: Модель пластины с включениями

Для организации итерационной процедуры определения местоположения включения был сформирован вектор $\{u_j\}$, $j = \overline{1, N}$. Номера компонент вектора $\{u_j\}$ соответствуют номерам узлов пластины и принимают значения равные 1 там, где наблюдаются наибольшие отклонения значений деформаций пластины с включением от значений деформаций в соответствующих точках пластины без включения (на рис. 1 эти области выделены линиями). В остальных узлах сетки пластины значения компонент вектора $\{u_j\}$ выбирались равными 0.

Далее значения компонент вектора $\{u_j\}$, $j = \overline{1, N}$ определяются в итерационном процессе из условия (11) и характеризуют местоположение включения (включений).

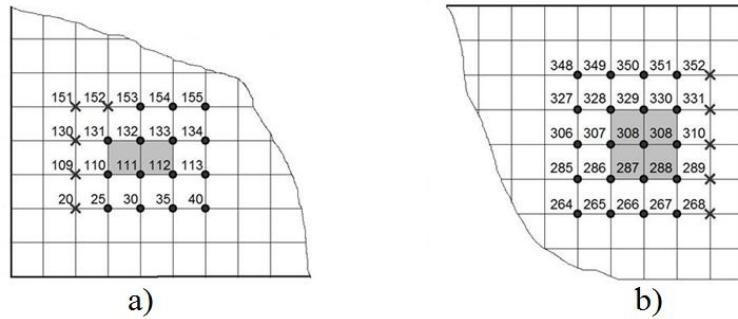


Рис. 2: Результат первой итерации для каждого из включений

На рис. 2 а,б показан результат выполнения первой итерации алгоритма идентификации первого (соответствует рис. 2а) и второго (соответствует рис. 2б) включений. Темным фоном на рисунке выделены области, в которых расположены действительные включения, точками с номерами обозначены узлы, для которых значения компонент вектора $\{u_j\}$ в соответствии с условием (11) приняли значения равные 1. Эти узлы являются начальным

приближением для выполнения следующей итерации. Крестиками помечены узлы, которые исключаются при выполнении следующей итерации, соответствующие им компоненты вектора $\{u_j\}$ принимают значения равные 0.

Видно, что уже на первом шаге итерационного процесса определяются области пластины, в которых расположены действительные включения.

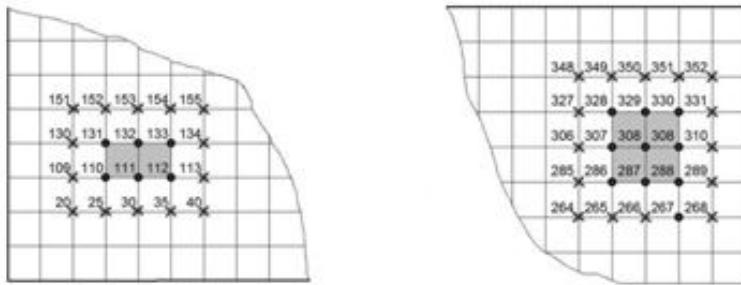


Рис. 3: Результат ідентифікації включень

На рис. 3 представлен результат ідентифікації включень, отриманий на 4 ітерації.

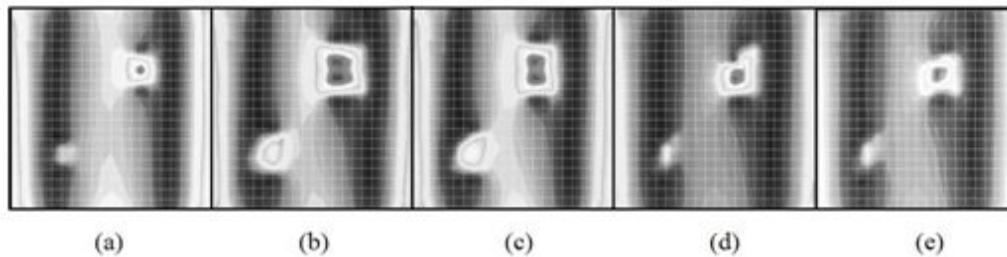


Рис. 4: Візуалізація ітераціонного процесу ідентифікації включень: а – дійсне включение; б – початкове приближення; в – результат першої ітерації; г – результат другої ітерації; д – результат ідентифікації.

На рис. 4 показаны картины напряженно-деформированного состояния пластины с включением, полученные на итерациях процедуры идентификации, рис. 4а соответствует действительному расположению включений, рис. 4е – результату идентификации.

Анализ проведенных вычислительных экспериментов показывает, что предложенный алгоритм позволяет идентифицировать как мелкие включения, имеющие размер порядка 1% от характерного размера пластины, так и включения, линейный размер которых составляет 5 – 7 % от характерного размера пластины, при этом погрешность восстановления не превышает 3%.

Можно отметить, что в результате выполнения предложенной процедуры определяются геометрические параметры всех имеющихся в пластине включений, если они размещены на удалении друг от друга. Для группы близко

расположенных мелких включений (расстояние между включениями меньше линейного размера включения) возможна идентификация только границы области местоположения включений.



Рис. 5: Идентификация группы включений

На рис. 5 представлена модель пластины с группой мелких близкорасположенных включений и результат идентификации (область включений выделена жирной линией).

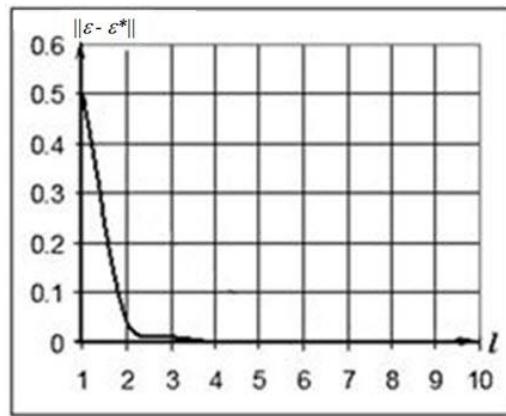


Рис. 6: Зависимость $\|\varepsilon - \varepsilon^*\|$ от количества итераций

На рис. 6 представлен характер поведения нормы невязки $\|\varepsilon - \varepsilon^*\|$ на итерациях предложенного алгоритма (соответствующая кривая обозначена сплошной жирной линией). Из анализа рисунка видно, что с увеличением номера итерации значения $\|\varepsilon - \varepsilon^*\|$ быстро уменьшаются.

Следует отметить, что использование предложенного подхода для получения результата идентификации требует выполнения только матричных операций и решения систем линейных алгебраических уравнений.

Выводы

Предложенный подход позволяет идентифицировать местоположение включений в тонкой прямоугольной пластине по результатам измерений значений деформаций; ограничения, накладываемые на множество решений прямой и обратной задачи, обеспечивают условно-корректную постановку обратной задачи; предложенный способ описания области дефекта и разработанный алгоритм идентификации существенно сокращают количество операций для получения удовлетворительного результата идентификации; сравнительный анализ результатов вычислительного эксперимента показывает, что с использованием предложенного подхода возможна идентификация местоположения жестких включений различных размеров. В перспективе предложенный подход может быть применен для идентификации жестких включений не только в тонких прямоугольных пластинах, но и в других тонкостенных системах – круглых пластинах, тонких оболочках и т.п.

Список литературы

1. Адаменко А. А. Современные методы радиационной дефектоскопии. — К. : Наукова думка, 1984. — 202 с.
2. Радько В. И., Заплотинский И. А., Галаненко Д. В. Выявление, идентификация и измерение размеров плоскостных дефектов с применением технологии TOFD в ручных дефектоскопах. // Неразрушающий контроль, 2012. — №1. — С. 45–50.
3. Shifrin E.I., Shushpannikov P.S. Identification of a spheroidal defect in an elastic solid using a reciprocity gap functional. // Inv. Probl., 2010. — V.26.— N.5. 055001.
4. Щербаков В. В., Существование оптимальной формы тонких жестких включений в пластине Кирхгофа–Лява. // Сиб. журн. индустр. матем., 2013. — Т. 16. — № 4. — С. 142–151.
5. Ватульян А. О. Проблемы идентификации неоднородных свойств твердых тел. // Вестник СамГУ - Естественнонаучная серия, 2007. — №4(54). — С. 93–104.
6. Ободан Н.И., Макаренко Н.Б. Идентификационно-инверсный метод диагностики повреждений // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформованого твердого тіла. — Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2006. — №7. — С. 81–88.
7. Ободан Н.И., Шульга А.С. Идентификация дефектов в деформируемых телах. // Проблемы машиностроения, 2005. — 1. — С. 33–37.

8. Тихонов А. Н., Кальнер В. Д., Гласко В. Б. Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении. — М.: Машиностроение, 1990. — 264 с.
9. Баранов И. В., Ватулян А. О., Соловьев А. Н. Об одном генетическом алгоритме и его применении в обратных задачах идентификации упругих сред. // Вычислительные технологии, 2006. — №3. — С. 14–26.
10. Киселева Е. М. Математические методы оптимального разбиения множеств и их приложения/ Е. М. Киселева. — Днепропетровск: ДГУ, 1982. — 107 с.

Статья получена: 3.09.2015; окончательный вариант: 15.12.2015;
принята: 16.12.2015.

Сума елементів зведененої матриці показників

О. В. Зеленський, В. М. Дармосюк

*Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
вул. Огієнка, 61, 32301, м. Кам'янець-Подільський, Україна
Миколаївський національний університет ім. В.О. Сухомлинського
вул. Нікольська, 24, 54030, м. Миколаїв, Україна
zelik82@mail.ru, darmosiuk@gmail.com*

У роботі досліджуються можлива сума елементів зведененої матриці показників та можлива сума елементів зведененої матриці показників з сагайдаком без петель.

Ключові слова: матриця показників, допустимий сагайдак матриці показників.

Зеленский А.В., Дармосюк В.Н. **Сумма элементов приведенной матрицы показателей.** В работе исследуются возможная сумма элементов приведенной матрицы показателей и возможная сумма элементов приведенной матрицы показателей с колчаном без петель.

Ключевые слова: матрица показателей, допустимый колчан матрицы показателей.

O. V. Zelenskiy, V. M. Darmosiuk. **The sum of elements of the reduced exponent matrix.** This paper investigates the possible sum of elements of the reduced exponent matrix and possible sum of elements of the reduced exponent matrix with a quiver without loops.

Keywords: exponent matrix, admissible quiver of exponent matrix.

2000 Mathematics Subject Classification 16G20, 16G30.

1. Вступ

Один із аспектів теорії кілець є вивчення властивостей кілець за допомогою теорії графів. Кожний черепичний порядок повністю визначається своєю матрицею показників і дискретно нормованим кільцем. Багато властивостей таких кілець повністю визначаються їх матрицями показників, зокрема, сагайдаки таких кілець. Порівняно недавно матриці показників стали окремим об'єктом вивчення.

Сума елементів матриці показників черепичного порядку є його інваріантом і вперше зустрічається в роботі [3]. Сума елементів матриць показників зустрічається в дослідження частково-впорядкованих множин на жорсткість [2]. У зв'язку з дослідженням сагайдаків черепичних порядків скінченної глобальної розмірності виникло питання про мінімальну суму елементів такого порядку [4]. Для одиничних сагайдаків оцінки суми елементів матриці показників знайдені в [5]. В роботі продовжуються дослідження матриць показників, а саме, досліджуються суми елементів зведеніх матриць показників.

2. Попередні відомості

Розглянемо матрицю $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})(M_n(\mathbb{Z}))$ — це кільце матриць розмірності n з цілими елементами).

Означення 1. [1, гл.14, с. 353]. *Матриця $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$, для якої виконуються наступні умови:*

$$1) \alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik} \text{ для всіх } i, j, k = 1, \dots, n,$$

$$2) \alpha_{ii} = 0 \text{ для всіх } i = 1, \dots, n,$$

називається матрицею показників.

Матриця показників, для якої виконується умова

$$3) \alpha_{ij} + \alpha_{ji} \geq 1 \text{ для всіх } i, j \in \{1, \dots, n\} (i \neq j)$$

називається зведенюю матрицею показників.

Нехай $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ — зведена матриця показників.

Введемо матриці $\mathcal{E}^{(1)} = (\beta_{ij}) = \mathcal{E} + E_n \in M_n(\mathbb{Z})$, де E_n — одинична матриця, та $\mathcal{E}^{(2)} = (\gamma_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$: $\gamma_{ij} = \min_k \{\beta_{ik} + \beta_{kj}\}$.

Означення 2. [1, гл.14, с. 357]. *Сагайдаком зведеної матриці показників $Q = Q(\mathcal{E})$ називається сагайдак, матриця суміжності якого задається формулою $[Q] = \mathcal{E}^{(2)} - \mathcal{E}^{(1)}$.*

Для елементів матриці суміжності сагайдака Q маємо наступні формули:

$$\begin{aligned} q_{ij} &= \gamma_{ij} - \beta_{ij} = \min_k (\beta_{ik} + \beta_{kj}) - \beta_{ij} = \min \left(1, \min_{k \neq i, j} (\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \beta_{ij}) \right) = \\ &= \min \left(1, \min_{k \neq i, j} (\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij}) \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{ii} &= \min_k (\beta_{ik} + \beta_{ki}) - \beta_{ii} = \min \left(2, \min_{k \neq i} (\alpha_{ik} + \alpha_{ki}) \right) - 1 = \\ &= \min \left(1, \min_{k \neq i} (\alpha_{ik} + \alpha_{ki} - 1) \right). \end{aligned}$$

Звідси отримуємо, що $q_{ij}=1$ при $i \neq j$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} > \alpha_{ij}$ для всіх $k \neq i, j$. $q_{ii} = 1$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha_{ik} + \alpha_{ki} > 1$ для всіх $k \neq i$.

Означення 3. [1, гл.14, с. 357]. *Сагайдак Q називається допустимим, якщо існує зведена матриця показників \mathcal{E} , така що $Q(\mathcal{E}) = Q$.*

3. Матриці показників із заданою сумою елементів

Для зведеній матриці показників $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ виконується нерівність $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} \geq 1$ для всіх $i \neq j$. Оскільки таких пар елементів матриці

показників, які симетричні відносно головної діагоналі є C_n^2 , то сума елементів \mathcal{E} не менше, ніж $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$.

Теорема 1. Для довільного натурального $n \geq 2$ та довільного натурального $k \geq \frac{n(n-1)}{2}$ існує зведенна матриця показників $\mathcal{E} \in M_n(\mathbb{Z})$ із сумою елементів k .

Доведення. Для $n = 2$ — твердження очевидне, оскільки $\begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ — матриця показників для $\forall \alpha_{12} \geq 1$. Нехай $n \geq 3$. Розділимо k на $\frac{n(n-1)}{2}$ з остачею. Тобто знайдемо такі числа q та r , що $k = q\frac{n(n-1)}{2} + r$, $0 \leq r < \frac{n(n-1)}{2}$ (за теоремою про ділення з остачею).

Оскільки $k \geq \frac{n(n-1)}{2}$, то $q \geq 1$. Знайдемо таке число p , що $\frac{p(p-1)}{2} \leq k < \frac{p(p+1)}{2}$ ($p = \left[\frac{1+\sqrt{1+8r}}{2} \right]$). Оскільки $r < \frac{n(n-1)}{2}$, то $p < n$. Нехай $t = r - \frac{(p-1)(p-2)}{2}$.

$$\frac{p(p-1)}{2} - \frac{(p-1)(p-2)}{2} \leq t < \frac{p(p+1)}{2} - \frac{(p-1)(p-2)}{2},$$

$$p-1 \leq t < 2p-1.$$

Розглянемо матрицю $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$, де

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{для } i = j, \\ q, & \text{для } i < j, \\ \alpha_{ij} = 1, & \text{для } j < i \leq p, \\ \alpha_{p+1,j} = 1, & \text{для } j \leq t, \\ \alpha_{ij} = 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Доведемо, що \mathcal{E} є зведенуою матрицею показників.

1. $\alpha_{ii} = 0$ за побудовою матриці \mathcal{E}

2. Доведемо нерівність $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} \geq \alpha_{ij}$.

Оскільки $q \geq 1$, то всі елементи \mathcal{E} не більші за q . Тому якщо $\alpha_{ik} = q$ або $\alpha_{kj} = q$, то нерівність $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} \geq \alpha_{ij}$ виконується. Нехай $\alpha_{ij} = q$ а $\alpha_{ik} < q$, $\alpha_{kj} < q$. Тоді $i < j$, $k < i$ та $k \geq j$, що неможливо. Отже, хоча б одне з чисел α_{ij} або α_{ik} дорівнює q і тоді нерівність виконується.

Розглянемо випадок, коли елементи α_{ik} , α_{kj} , α_{ij} не дорівнюють q , тобто $i \geq k \geq j$. Якщо $i = k$ або $k = j$, то нерівність очевидна. Тому розглянемо випадок $i > k > j$. Якщо $i \leq p$, то $\alpha_{ik} = 1$. Якщо ж $i = p+1$, то $\alpha_{kj} = 1$. В обох випадках нерівність $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} \geq \alpha_{ij}$ виконується. Теорему доведено.

Приклад 1. При $n = 4$ та $k = 34$ маємо

$$\frac{n(n-1)}{2} = 6, \quad 34 = 5 \cdot 6 + 4, \quad \text{тому } q = 5, \quad r = 4, \quad p = \left[\frac{1+\sqrt{1+8 \cdot 4}}{2} \right] = 3,$$

$$t = 4 - \frac{3 \cdot 2}{2} = 1, \quad \mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Зауважимо, що для побудованої матриці $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$: $\alpha_{ij} \in \{0, 1, q\}$. Тобто в загальному випадку множина значень елементів матриці складається з трьох елементів. Виникає питання: чи завжди можна побудувати зведену матрицю показників $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ з сумаю елементів $k \geq \frac{n(n-1)}{2}$ таким чином, щоб множина значень елементів матриці складалася з двох чисел? Відповідь на це питання негативна. Для $n = 3$, $k = 7$ такої матриці не існує. Оскільки $\alpha_{ii} = 0$, то множина значень елементів матриці $\{0, a\}$. Якщо $a = 1$, то максимальна сума елементів матриці

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ дорівнює } 6 < 7. \text{ Отже, } a > 1. \text{ Нехай елемент, рівний } a,$$

зустрічається в матриці \mathcal{E} m разів, тоді $ma = 7$, $a > 1$. Отже, $a = 7$, $m = 1$. Тобто матриця \mathcal{E} складається з восьми нульових елементів та елемента 7. Але $\alpha_{12} + \alpha_{21} \geq 1$, $\alpha_{13} + \alpha_{31} \geq 1$, $\alpha_{23} + \alpha_{32} \geq 1$. Отже, серед елементів матриці має бути мінімум три додатні. Отримали суперечність. Виникає питання: чи виконується теорема 1, якщо добавити умову, що сагайдак без петель?

Теорема 2. Для довільного натурального $n \geq 4$ та довільного натурального $k \geq \frac{n(n-1)}{2}$ існує зведена матриця показників $\mathcal{E} \in M_n(\mathbb{Z})$ з сагайдаком без петель, сумаю елементів k , та множиною значень елементів матриці потужності 3.

Доведення. Розглянему матрицю показників \mathcal{E} вигляду:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & q & q & \dots & q \\ 0 & 0 & q & q & \dots & q \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Нехай $p = 1 + \frac{(n-2)(n-3)}{2}$ (це число одиниць в квадратних блоках матриці). Розділимо з остачею $k - p$ на $2n - 4$:

$$k - p = (2n - 4)q + r, \quad r < 2n - 4. \text{ Зауважимо, що } k - p \geq \frac{n(n-1)}{2} - \left(1 + \frac{(n-2)(n-3)}{2}\right) = 2n - 4. \text{ Тому } q \geq 1.$$

Позначимо $t = \lceil \frac{r}{2} \rceil + 2$. Якщо $t \geq 2$, то $\alpha_{31} = \alpha_{32} = \alpha_{t1} = \alpha_{t2} = 1$. Інші $\alpha_{ij} = 0$ для $i \in [t+2, n]$, $j \in [1, 2]$. Якщо r непарне, то $\alpha_{t+1,2} = 1$.

Теорему доведено.

Доведемо, що \mathcal{E} — зведена матриця показників.

1. $\alpha_{ii} = 0$ (за побудовою матриці \mathcal{E}).
2. Оскільки $q \geq 1$, то в матриці показників \mathcal{E} вище головної діагоналі знаходяться всі елементи, які не менше одиниці. Тому $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} \geq 1$.

3. Доведемо нерівність

$$\alpha_{ik} + \alpha_{kj} \geq \alpha_{ij} \quad (1)$$

Якщо $\alpha_{ij} = 0$, то нерівність (1) очевидна, тому досить розглянути два випадки: $\alpha_{ij} = 1$ та $\alpha_{ij} = q$.

Випадок а) $\alpha_{ij} = q$. З побудови матриці \mathcal{E} випливає, що $j \geq 3$, $i = 1$ або $i = 2$. Нерівність (1) набуде вигляду: $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} \geq q$. Оскільки $\alpha_{ik} = q$ для $k \geq 3$ та $\alpha_{kj} = q$ для $k \in [1, 2]$, то нерівність (1) виконується.

Випадок б) $\alpha_{ij} = 1$. Припустимо протилежне, що нерівність (1) не виконується. Тоді $\alpha_{ik} = \alpha_{kj} = 0$. Якщо $i = k$, то $\alpha_{kj} = \alpha_{ij}$, якщо $k = j$, то $\alpha_{ik} = \alpha_{ij}$, якщо $i = j$, то $\alpha_{ij} = 0$, тому індекси i, k, j попарно не співпадають. Розглянемо яких значень може набувати індекс k . $k \geq 2$, оскільки при $k = 1$, $k \neq j$ $\alpha_{kj} > 0$.

Якщо $k = 2$, то $j = 1$ (для інших $j \neq k$ $\alpha_{kj} > 0$). За побудовою матриці \mathcal{E} , якщо $\alpha_{i2} = 0$, то і $\alpha_{i1} = 0$. Тому $k \neq 2$.

Якщо $k \in [3, n]$ тоді $i > k$ (бо $\alpha_{ik} > 0$, для $i < k$), якщо $j \in [1, 2]$ то з того, що $\alpha_{kj} = 0$ випливає, що $\alpha_{ij} = 0$. Отже, $i, j, k \in [3, n]$. Отримали

суперечність, оскільки $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ — матриця показників, тому ви-

падок $\alpha_{ik} = \alpha_{kj} = 0$, $\alpha_{ij} = 1$ неможливий. Отже, нерівність (1) виконується.

Для матриці \mathcal{E} виконуються умови 1)- 3), тому \mathcal{E} — зведена матриця показників. Для довільного $i \in [1, n]$ існує таке j , що $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = 1$. Тому $Q(\mathcal{E})$ — сагайдак без петель.

Отже, \mathcal{E} — зведена матриця показників розмірності n з сумою елементів k , та сагайдаком без петель. Теорему доведено.

Приклад 2. Нехай $n = 7$, $k = 46$: $p = 11$, $k - p = 35$, $2n - 4 = 10$, $35 = 3 \cdot 10 + 5$, $q = 3$, $r = 5$

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Висновок: Для довільного натурального $n \geq 2$ та довільного натурального $k \geq C_n^2$ існує зведена матриця показників розмірності n та сумою елементів k . Для довільного натурального $n \geq 4$ та довільного натурального $k \geq C_n^2$ існує зведена матриця показників розмірності n з сагайдаком без петель та сумою елементів k . Причому завжди можна побудувати матрицю показників з заданою сумою $k \geq C_n^2$, яка складається тільки з трьох різних елементів.

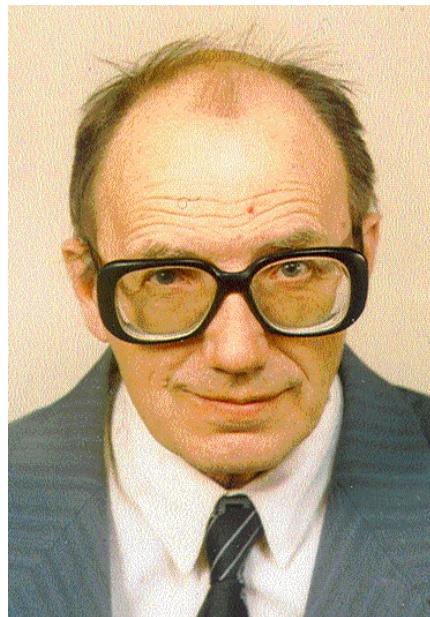
ЛІТЕРАТУРА

1. Hazewinkel M., Gubaren N., Kirichenko V.V. Algebras, Rings and Modules, Mathematics and Its Applications, Springer, 2004. — v. 1. — 380 p.
2. Hazewinkel M., Gubaren N., Kirichenko V.V. Algebras, Rings and Modules, Mathematics and Its Applications, Springer, 2007. — v. 2. — 400 p.
3. Jategaonkar V. A. Global dimension of tiled orders over a discrete valuation ring / V. A. Jategaonkar / Trans. Amer. Math. Soc., 1974. — 196. — P. 313-330.
4. Журавльов В. М., Журавльов Д. В. Черепичні порядки в $M_6(D)$ скінченної глобальної розмірності. / Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки, 2013. — №1. — С. 28-34.
5. Журавльов В. М., Зеленський О. В., Дармосюк В. М. Однічні сагайдаки матриць показників. / Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки, 2012. — №4. — С. 27-31.

Стаття одержана: 25.07.2015; перероблений варіант: 25.12.2015;
прийнята: 26.12.2015.

АНАТОЛИЙ ФИЛИППОВИЧ ГРИШИН (некролог)

9.09.1941 - 10.02.2015



10 февраля 2015 года украинская математическая школа понесла невосполнимую утрату — скоропостижно скончался выдающийся харьковский математик, признанный аналитик, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа Харьковского национального университета имени В.Н.Каразина Анатолий Филиппович Гришин.

Анатолий Филиппович родился 9 сентября 1941 года в небольшом заводском городе Дружковка Донецкой области в рабочей семье. С 1958 по 1963 год обучался на физико-математическом (затем механико-математическом) факультете Харьковского университета. Уже с 3-го курса принимает участие в научной работе как член городского семинара по анализу Бориса Яковлевича Левина, будущего научного руководителя Анатолия Филипповича. С этого момента вся его последующая жизнь уже неразрывно связана с математическим анализом.

Дипломная работа Анатолия Филипповича была посвящена аналитическим функциям нулевого порядка в полуплоскости. К этой тематике он возвращался неоднократно. Так, одна из последних его работ (совместная с аспирантом Нгуен Ван Куинем) посвящена целым функциям нулевого порядка. После окончания университета Анатолий Филиппович поступает в аспирантуру при кафедре математического анализа. С этого момента вся его жизнь

связана с этой кафедрой.

После защиты кандидатской диссертации "О регулярности роста субгармонических функций" Анатолий Филиппович работает ассистентом, затем доцентом. В 1992 году он защищает докторскую диссертацию "Субгармонические функции конечного порядка", вскоре после этого становится профессором, затем заведующим кафедрой.

Научные интересы Анатолия Филипповича были связаны с теорией роста и распределения значений аналитических и субгармонических функций. Он получает тонкие оценки снизу субгармонических в плоскости функций вне исключительных множеств. Он вводит новое понятие полной меры для субгармонических функций в полу平面. Это чрезвычайно полезное понятие позволило ему перенести на аналитические и субгармонические функции в полу平面 многие результаты теории предельных множеств Азарина, а также получить аналоги второй основной теоремы Неванлиинны для полу平面.

Среди других работ А. Ф. Гришина отметим цикл статей об интерполяции в классе целых функций конечного порядка с заданным индикатором, доказательства новых теорем тауберова типа, а также замечательную лемму о дельта-субгармонических функциях, получившую название "лемма Гришина".

Эта лемма нашла многочисленные применения в теории аналитических функций и в теории дифференциальных уравнений в частных производных. Смысл ее состоит в том, что мера Рисса на множестве, где неотрицательная дельта-субгармоническая функция принимает значение нуль, также неотрицательна. Как выяснилось впоследствии, более слабые версии этого утверждения ранее были независимо получены Вале-Пуссеном, Брело, Като, Г. Леви.

Анатолий Филиппович являлся признанным экспертом в области математического анализа: к нему всегда можно было обратиться по самым тонким вопросам и получить исчерпывающий ответ.

Лекции Анатолия Филипповича как по математическому анализу, так и по специальным курсам отличались тщательной продуманностью и строгостью изложения. Он подготовил большое количество аспирантов, его ученики успешно работают в Украине, США, Израиле. Последние 15 лет А.Ф.Гришин руководил семинаром по анализу, в котором и начинался его научный путь. Долгое время был председателем Харьковского математического общества.

Анатолий Филиппович был широко эрудированным, доброжелательным, остроумным человеком, прекрасным руководителем, коллегой и другом, пользовался большим авторитетом среди математиков как Украины, так и других стран. Он навсегда останется в нашей памяти.

Ю. В. Гандель, В. Д. Гордевский, Г. Н. Жолткевич, В. И. Коробов,
К. Г. Малютин, И. И. Марченко, А. В. Резуненко, Г. М. Склар,
М. Л. Содин, С. Ю. Фаворов.