Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517 Том 82, 2015, с.19–26

Опис операторів C-симетрії у випадку простору $\mathbb{C}^2$

В. І. Суділовська
Київський професійний коледж,
Київ, Україна
veronica.sudi@gmail.com

Описано всі оператори C в двовимірному гільбертовому просторі $\mathbb{C}^2$ за допомогою матриць Паулі. Знайдено умови на $J_{\vec{\alpha}}$-самоспряжений оператор, які гарантують йому властивість C-симетрії.
Ключові слова: простір Крейна, індефінітна метрика, C-симетрія, матриці Паулі.

Судиловская В. И., **Описание операторов C-симметрии в случае пространства $\mathbb{C}^2$.** Описаны все операторы C в двумерном гильбертовом пространстве $\mathbb{C}^2$ с помощью матриц Паули. Найдены условия на $J_{\vec{\alpha}}$ - самоспряженого оператора, гарантирующих ему свойство C-симметрии.
Ключевые слова: пространство Крейна, индефинитная метрика, C-симметрия, матрица Паули.

V.Ĩ. Sudilovskaya, **Description operator C-symmetry in the case of the space $\mathbb{C}^2$.** We describe all operators C in two-dimensional Hilbert space $\mathbb{C}^2$ using Pauli matrices. The conditions for $J_{\vec{\alpha}}$-adjoint operator, which guarantee it the property of C-symmetry.
Keywords: Krein spaces, indefinite metrics, C-symmetry, Pauli matrices.

2000 Mathematics Subject Classification: 47A55, 47A57, 47B25.

Вступ

Розвиток псевдо-ермітової квантової механіки протягом останніх десятиліть [3, 4, 10] привів до необхідності вивчення нових класів несамоспряжених операторів. Одним з таких класів є несамоспряжені оператори з властивістю C-симетрії.

Властивість C-симетрії для несамоспряженого оператора A, який діє в гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$, означає існування обмеженого лінійного оператора[1] C в $\mathfrak{H}$ з наступними властивостями:

(i) $C^2 = I$;

(ii) оператор JC є додатним в $\mathfrak{H}$;

(iii) $ACf = CAf$ має сенс для всіх f з області визначення $\mathcal{D}(A)$ оператора A.

В умові (ii) цього означення, обмежений оператор J задовольняє властивості $J^2 = I$, $J^* = J$, де J^* означає спряжений оператор для оператора J відносно скалярного добутку $(\cdot,\cdot)$ простору $\mathfrak{H}$. Оператор J з такими властивостями називається *фундаментальною симетрією.*

Довільна фундаментальна симетрія J та початковий гільбертів простір $\mathfrak{H}$ з скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ дозволяє визначити півторалінійну форму (індефінітну метрику) $[f,g] = (Jf,g), \qquad f,g \in \mathfrak{H}$.

Гільбертів простір $\mathfrak{H}$ з індефінітною метрикою $[\cdot,\cdot]$ називається простором Крейна[2] і позначається як $(\mathfrak{H},[\cdot,\cdot])$.

Припустимо, що несамоспряжений в гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$ оператор A є самоспряженим відносно індефінітної метрики $[\cdot,\cdot]$. Якщо, у цьому випадку, оператор A має властивість C-симетрії, то цей оператор стане самоспряженим відносно нового скалярного добутку $(\cdot,\cdot)_C$ гільбертового простору $\mathfrak{H}$, визначеного за допомогою оператора C:

$$(f,g)_C = [Cf,g] = (JCf,g), \qquad f,g \in \mathfrak{H}.$$

Отже існування C-симетрії для самоспряженого в просторі Крейна $(\mathfrak{H},[\cdot,\cdot])$ оператора A дозволяє модифікувати початковий скалярний добуток $(\cdot,\cdot)$ до нового скалярного добутку $(\cdot,\cdot)_C$, відносно якого оператор A ставав би самоспряженим.

Наведений результат ілюструє корисність побудови оператора C для різних класів несамоспряжених операторів. Ця задача є однією з основних задач в дослідженнях псевдо-ермітової квантової механіки [5, 6, 7, 9, 11]. Метою роботи є опис всіх операторів C, діючих в двовимірному гільбертовому просторі $\mathbb{C}^2$ зі скалярним добутком:

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = x_1\bar{x}_2 + y_1\bar{y}_2, \ x_j, y_j \in \mathbb{C}. \ j = 1,2. \tag{1}$$

Розв'язання цієї задачі базується на суттєвим використанні матриць Паулі.

Частковий випадок цієї задачі при додатковому припущенні $\mathcal{PT}$-симетрії був розглянутий в [1].

[1] тут ми маємо певну тавтологію: *властивість C-симетрії* та *оператор C*, яка, однак, традиційно використовується.

[2] детальний виклад теорії просторів Крейна можна знайти в [2]

Матриці Паулі та фундаментальні симметрії в $\mathbb{C}^2$

Розглянемо матриці Паулі:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матриці Паулі мають властивості

$$\sigma_j\sigma_k = -\sigma_k\sigma_j, \quad j \neq k, \quad \sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2,\ \sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3,\ \sigma_2\sigma_3 = i\sigma_1. \tag{2}$$

Крім того, $\sigma_j^2 = \sigma_0$, де $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ є одиничною матрицею.

Зазначимо, що дію довільного оператора в $\mathbb{C}^2$ можна представити у вигляді матриці X другого порядку. Цю матрицю можна розкласти відносно базису з матриць Паулі та одиничної матриці:

$$X = \sum_{j=0}^{3} x_j\sigma_j, \tag{3}$$

де $x_j \in \mathbb{C}$. В цьому випадку, як легко перевірити,

$$\mathbf{Tr}\ X = 2x_0, \quad \mathbf{det}\ X = x_0^2 - \sum_{j=1}^{3} x_j^2, \quad X^{-1} = \frac{1}{\mathbf{det}\ X}\left(x_0\sigma_0 - \sum_{j=1}^{3} x_j\sigma_j\right). \tag{4}$$

Нехай $Y = \sum_{j=0}^{3} y_j\sigma_j$. Використовуючи (2) дістаємо,

$$X \cdot Y = \sum_{j=0}^{3} x_j y_j \sigma_0 + \sum_{j=1}^{3}(x_0 y_j + x_j y_0)\sigma_j + i\vec{x} \times \vec{y}, \tag{5}$$

де $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ і "векторний добуток"$\vec{x} \times \vec{y}$ визначається через формальний визначник

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix},$$

де

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}\sigma_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}\sigma_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\sigma_3.$$

В подальшому, будемо ідентифікувати матриці другого порядку з відповідними операторами гільбертового простору $\mathbb{C}^2$. Зауважимо, що оператори σ_j в $\mathbb{C}^2$ задовольняють властивості $\sigma_j^* = \sigma_j$ і $\sigma_j^2 = \sigma_0$ (тобто є фундаментальними симетріями).

Знайдемо умови за якими оператор X, визначений в (3), буде фундаментальною симетрією. Зрозуміло, що умова $X^* = X$ (самоспряженість) рівносильна тому що всі коефіцієнти x_j в (3) є дійсними числами.

Нехай X є самоспряженим оператором. Використовуючи (5) одержуємо

$$X^2 = \sum_{j=0}^{3} x_j^2 \sigma_0 + 2 \sum_{j=1}^{3} x_0 x_j \sigma_j.$$

Тому $X^2 = \sigma_0$ тоді і тільки тоді, коли $X = \pm\sigma_0$ або $X = J_{\vec{\alpha}}$, де

$$J_{\vec{\alpha}} = \sum_{j=1}^{3} \alpha_j \sigma_j, \qquad \vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{S}^2$$

де $\mathbb{S}^2 = \{\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \sum_{j=1}^{3} \alpha_j^2 = 1\}$. Таким чином нетривіальні фундаментальні симетрії в гільбертовому просторі $\mathbb{C}^2$ мають вигляд $X = J_{\vec{\alpha}}$.

Опис операторів C в просторі Крейна $(\mathbb{C}^2, [\cdot,\cdot]_{\vec{\alpha}})$

Зафіксуємо фундаментальну симетрію $J_{\vec{\alpha}}$ в гільбертовому просторі $(\mathbb{C}^2, (\cdot,\cdot))$ і розглянемо простір Крейна $(\mathbb{C}^2, [\cdot,\cdot]_{\vec{\alpha}})$ з індефінітною метрикою

$$[\cdot,\cdot]_{\vec{\alpha}} = (J_{\vec{\alpha}}\cdot,\cdot).$$

Метою цього підрозділу є опис множини операторів C, тобто операторів, задовольняючих умови: (i) $C^2 = I$; (ii) $J_{\vec{\alpha}}C > 0$.

Зауважимо, що зазначені умови (i), (ii) є еквівалентними для представлення оператора у вигляді $\mathcal{C} = J_{\vec{\alpha}}e^Q$, де Q є самоспряженим оператором в гільбертовому просторі $\mathbb{C}^2$, який антикомутує з $J_{\vec{\alpha}}$. Відомо [8], що такі оператори C є у взаємно-однозначній відповідності з множиною всіх можливих $J_{\vec{\alpha}}$-ортогональних розкладів простору Крейна $(\mathbb{C}^2, [\cdot,\cdot]_{\vec{\alpha}})$ на максимальні рівномірно додатні / від'ємні підпростори.

Теорема 1 *Множина всіх операторів C в просторі Крейна $(\mathbb{C}^2, [\cdot,\cdot]_{\vec{\alpha}})$ задається формулою*

$$C = -i\sinh\rho\sin\xi J_{\vec{\beta}} + i\sinh\rho\cos\xi J_{\vec{\zeta}} + \cosh\rho J_{\vec{\alpha}}, \tag{6}$$

де $\xi \in \mathbb{R}$, $\rho \geq 0$, вектор $\vec{\beta} \in \mathbb{S}^2$ є ортогональним до $\vec{\alpha} \in \mathbb{S}^2$ і $\vec{\zeta} = \vec{\alpha} \times \vec{\beta}$ є векторним добутком $\vec{\alpha}$ та $\vec{\beta}$.

Доведення. Знайдемо загальний вигляд Q в представленні $\mathcal{C} = J_{\vec{\alpha}}e^Q$. Для цього розглянемо оператор $J_{\vec{\beta}} = \sum_{j=1}^{3} \beta_j \sigma_j$, де вектор $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{S}^2$. Таким чином $J_{\vec{\beta}}$ є фундаментальною симетрією в гільбертовому просторі $\mathbb{C}^2$. Припустимо додатково $\sum_{j=1}^{3} \alpha_j \beta_j = 0$. Тоді, з урахуванням (5), одержуємо

$$J_{\vec{\alpha}} J_{\vec{\beta}} = i\vec{\alpha} \times \vec{\beta} = -i\vec{\beta} \times \vec{\alpha} = -J_{\vec{\beta}} J_{\vec{\alpha}}.$$

Отже $J_{\vec{\alpha}}$ і $J_{\vec{\beta}}$ є антикомутуючими фундаментальними симетріями в $\mathbb{C}^2$.

Аналогічно візьмемо вектор $\vec{\zeta}$ як (стандартний) векторний добуток векторів $\vec{\alpha}$ і $\vec{\beta}$. Таким чином вектор $\vec{\zeta} = \vec{\alpha} \times \vec{\beta}$ належить до $\mathbb{S}^2$ і він є ортогональним до векторів $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$. Повторюючи попередні міркування одержуємо, що фундаментальна симетрія $J_{\vec{\zeta}}$ антикомутує з операторами $J_{\vec{\alpha}}$ і $J_{\vec{\beta}}$. Більш того,

$$J_{\vec{\alpha}} J_{\vec{\beta}} = i J_{\vec{\zeta}}, \qquad J_{\vec{\alpha}} J_{\vec{\zeta}} = -i J_{\vec{\beta}}. \tag{7}$$

Зауважимо, що перша рівність в (7) випливає з (5) і означення оператора $J_{\vec{\zeta}}$. Для доведення другої достатньо згадати, що $\vec{\zeta} = \vec{\alpha} \times \vec{\beta}$ і використати тотожність Лагранжа

$$\vec{\alpha} \times [\vec{\alpha} \times \vec{\beta}] = \vec{\alpha}(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) - \vec{\beta}(\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha}) = -\vec{\beta}.$$

Матриці операторів $J_{\vec{\alpha}}$, $J_{\vec{\beta}}$, $J_{\vec{\zeta}}$ та σ_0 є базисом для простору матриць другого порядку. Це означає, що довільний оператор Q діючий в просторі $\mathbb{C}^2$ може бути записаний в вигляді

$$Q = x_0 \sigma_0 + x_1 J_{\vec{\beta}} + x_2 J_{\vec{\zeta}} + x_3 J_{\vec{\alpha}}, \qquad x_j \in \mathbb{C}.$$

Умова самоспряженості оператора Q означає, що всі x_j мають бути дійсними числами. Далі, умова антикомутації з $J_{\vec{\alpha}}$ означає, що $x_0 = x_3 = 0$. Отже оператор C має вигляд

$$C = J_{\vec{\alpha}} e^{x_1 J_{\vec{\beta}} + x_2 J_{\vec{\zeta}}}.$$

Беручи до уваги, що

$$x_1 J_{\vec{\beta}} + x_2 J_{\vec{\zeta}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} J_{\vec{\beta}} + \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} J_{\vec{\zeta}} \right),$$

одержуємо

$$x_1 J_{\vec{\beta}} + x_2 J_{\vec{\zeta}} = \rho(\cos\xi J_{\vec{\beta}} + \sin\xi J_{\vec{\zeta}}) = \rho Z\,,$$

де $Z = \cos\xi J_{\vec{\beta}} + \sin\xi J_{\vec{\zeta}}$, $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ і $\cos\xi = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$, $\sin\xi = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$.

Оператор Z є самоспряженим в $\mathbb{C}^2$. Більш того,

$$Z^2 = (\cos\xi J_{\vec{\beta}} + \sin\xi J_{\vec{\zeta}})^2 = (\cos^2\xi + \sin^2\xi)\sigma_0 = \sigma_0.$$

Отже Z є фундаментальною симетрією і

$$e^{x_1 J_{\vec{\beta}} + x_2 J_{\vec{\zeta}}} = e^{\rho Z} = \cosh\rho\sigma_0 + \sinh\rho Z. \tag{8}$$

Таким чином, беручи (8) та (7) до уваги, ми одержуємо (6). Теорема доведена.

Приклад 1 *Нехай* $\vec{\alpha} = (0,0,1)$, $\vec{\beta} = (1,0,0)$. *Тоді* $\vec{\zeta} = \vec{\alpha} \times \vec{\beta} = (0,1,0)$. *Тоді* $J_{\vec{\alpha}} = \sigma_3$, $J_{\vec{\beta}} = \sigma_1$, $J_{\vec{\zeta}} = \sigma_2$ *і* (6) *набуває вигляд*

$$C = \begin{pmatrix} \cosh\rho & \sinh\rho e^{-i\xi} \\ -\sinh\rho e^{i\xi} & -\cosh\rho \end{pmatrix}.$$

Оператори з C-симетріями

Нехай A – довільний оператор в $\mathbb{C}^2$. *Будемо говорити, що A має властивість C-симетрії, якщо існує такий оператор $C = J_{\vec{\alpha}}e^Q$, що*

$$AC = CA.$$

Це означення є еквівалентним до означення C-симетрії оператора A, яке наведено у вступі. Метою цього підрозділу є знаходження таких умов на $J_{\vec{\alpha}}$-самоспряжений оператор A, які гарантують існування C-симетрії для A.

З [2] дістаємо, що оператор A, самоспряжений в просторі Крейна $(\mathbb{C}^2, [\cdot,\cdot]_{\vec{\alpha}})$, визначають як оператор, задовольняючий співвідношенню

$$J_{\vec{\alpha}}A^* = AJ_{\vec{\alpha}}, \tag{9}$$

де A^* - спряжений відносно початкового скалярного добутку (1).

Беручи до уваги (9), оператор, самоспряжений в просторі Крейна $(\mathbb{C}^2, [\cdot,\cdot]_{\vec{\alpha}})$, будемо називати $J_{\vec{\alpha}}$-самоспряженим.

Охарактеризуємо випадок, коли оператор A буде $J_{\vec{\alpha}}$-самоспряженим. Розкладаючи A відносно базису σ_0, $J_{\vec{\beta}}$, $J_{\vec{\zeta}}$ та $J_{\vec{\alpha}}$, одержуємо

$$A = x_0\sigma_0 + x_1J_{\vec{\beta}} + x_2J_{\vec{\zeta}} + x_3J_{\vec{\alpha}}. \tag{10}$$

Враховуючи, що $J_{\vec{\alpha}}$-самоспряженість оператора A задається рівністю (9), дістаємо

$$J_{\vec{\alpha}}A^* = \overline{x}_0J_{\vec{\alpha}} + i\overline{x}_1J_{\vec{\zeta}} - i\overline{x}_2J_{\vec{\beta}} + \overline{x}_3\sigma_0, \quad AJ_{\vec{\alpha}} = x_0J_{\vec{\alpha}} - ix_1J_{\vec{\zeta}} + ix_2J_{\vec{\beta}} + x_3\sigma_0.$$

Прирівнюючи коефіцієнти, одержуємо, що A є $J_{\vec{\alpha}}$-самоспряженим тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти розкладу (10) задовольняють рівності:

$$x_0 = \overline{x}_0, \quad x_3 = \overline{x}_3, \quad \overline{x}_1 = -x_1, \quad \overline{x}_2 = -x_2.$$

Згадуючи (4), приходимо до висновку, що визначник $\mathbf{det}\ A$ є дійсними числом. Аналогічно з означення операторів $J_{\vec{\alpha}}$, $J_{\vec{\beta}}$ $J_{\vec{\zeta}}$ одержуємо, що сліди відповідних матриц будуть нульовими, тобто $\mathbf{tr}J_{\vec{\alpha}} = \mathbf{tr}J_{\vec{\beta}} = \mathbf{tr}J_{\vec{\zeta}} = 0$. Тому з (10) одержуємо, що слід матриці

$$\mathbf{tr}\ A = 2x_0$$

буде дійсним числом.

Теорема 2 *$J_{\vec{\alpha}}$-самоспряжений оператор A має дійсний спектр тоді і тільки тоді, коли*

$$(\mathbf{tr}\ A)^2 \geq 4\mathbf{det}\ A.$$

Доведення. Нехай $\lambda \in \mathbb{C}$ є власним значенням оператора A. Це означає, що λ буде коренем визначника $\mathbf{det}(A-\lambda\sigma_0) = 0$. Використовуючи (4), одержуємо

$$\mathbf{det}(A-\lambda\sigma_0) = (x_0-\lambda)^2 - \sum_{j=1}^{3} x_j^2 = \mathbf{det}\ A - (\mathbf{tr}\ A)\lambda + \lambda^2 = 0.$$

Отриманий многочлен має дійсні корені λ тоді і тільки тоді, коли $(\mathbf{tr}\ A)^2 - 4\mathbf{det}\ A \geq 0$.

Наслідок 1 *Нехай A є $J_{\vec{\alpha}}$-самоспряженим оператором. Якщо $(\mathbf{tr}\ A)^2 < 4\mathbf{det}\ A$, то для оператора A не існує оператор C-симетрії.*

Доведення. З нерівності $(\mathbf{tr}\ A)^2 < 4\mathbf{det}\ A$ слідує, що оператор A буде мати комплексні власні значення. Припустимо, що A має C-симетрію $C = J_{\vec{\alpha}}e^Q$. Тоді A буде самоспряженим відповідно норми

$$(\cdot,\cdot)_C = [C\cdot,\cdot]_{\vec{\alpha}} = (J_{\vec{\alpha}}C\cdot,\cdot) = (J_{\vec{\alpha}}^2 e^Q\cdot,\cdot) = (e^Q\cdot,\cdot),$$

що є неможливим (оскільки, комплексні власні значення).

Наслідок 2 *Нехай A є $J_{\vec{\alpha}}$-самоспряженим оператором. Тоді для оператора A існує оператор C-симетрії (заданий формулою (6)), якщо $(\mathbf{tr}\ A)^2 > 4\mathbf{det}\ A$. Оператор C визначається однозначно.*

Доведення. Якщо $(\mathbf{tr}\ A)^2 > 4\mathbf{det}\ A$, то оператор A має два різних дійсних власних значення λ_1, λ_2. Нехай f_1 і f_2 – відповідні власні функції. Зауважимо, що $[f_1, f_2]_{\vec{\alpha}} = 0$. Це безпосередньо слідує з $J_{\vec{\alpha}}$-самоспряженості A.

Доведемо тепер, що $[f_1, f_1]_{\vec{\alpha}} \neq 0$. Нехай $[f_1, f_1]_{\vec{\alpha}} = 0$. Тоді $[f_1, f]_{\vec{\alpha}} = 0$ $\forall f \in span\{f_1, f_2\} = \mathbb{C}^2$, що є неможливим. Таким чином $[f_1, f_1] \neq 0$. Аналогічно встановлюємо, що $[f_2, f_2] \neq 0$.

Зауважимо, що випадок $[f_1, f_1]_{\vec{\alpha}} \cdot [f_2, f_2]_{\vec{\alpha}} > 0$ також неможливий. Дійсно, якщо $[f_1, f_1]_{\vec{\alpha}} > 0$ та $[f_2, f_2]_{\vec{\alpha}} > 0$ або $[f_1, f_1]_{\vec{\alpha}} < 0$ та $[f_2, f_2]_{\vec{\alpha}} < 0$, то індефінітна метрика $[\cdot,\cdot]_{\vec{\alpha}}$ буде скалярним добутком (або мінус скалярним добутком) на $\mathbb{C}^2$, що є неможливим (індефінітна метрика $[\cdot,\cdot]_{\vec{\alpha}}$ є нетривіальною за означенням). Отже $[f_1, f_1]_{\vec{\alpha}} \cdot [f_2, f_2]_{\vec{\alpha}} < 0$.

Нехай, без втрати загальності, $[f_1, f_1]_{\vec{\alpha}} > 0$ та $[f_2, f_2]_{\vec{\alpha}} < 0$. В цьому випадку простір Крейна $(\mathbb{C}^2, [\cdot,\cdot]_{\vec{\alpha}})$ можна записати у вигляді суми:

$$\mathbb{C}^2 = \mathfrak{L}_+[\perp]\mathfrak{L}_-, \tag{11}$$

де $\mathfrak{L}_+ = span\{f_1\}$ і $\mathfrak{L}_- = span\{f_2\}$ є відповідно максимально додатнім і максимально від'ємним підпросторами простору Крейна $(\mathbb{C}^2, [\cdot,\cdot]_{\vec{\alpha}})$ [8]. Оператор C, що відповідає рокладу (11), буде оператором C-симетрії для оператора A. Згідно Теореми 1 цей оператор C задається формулою (6), при певному виборі параметрів $\xi \in \mathbb{R}$, $\rho \geq 0$. Зауважимо, що такий оператор C визначається однозначно (оскільки підпростори $\mathfrak{L}_\pm$ однозначно визначаються відповідними власними функціями).

Зауваження 1 *Граничний випадок* $(\mathbf{tr}\ A)^2 = 4\mathbf{det}\ A$ *є невизначеним з точку зору існування операторів* C*. Коротко кажучи, їх може бути "багато"або взагалі не буде. Пояснимо цей факт докладніше. Отже, при виконанні умови* $(\mathbf{tr}\ A)^2 = 4\mathbf{det}\ A$ *оператор* A *має єдине дійсне власне значення* λ*. Якщо* λ *відповідають дві лінійно незалежні власні функції* f_1, f_2*, то оператор* A *набуває вигляду* $A = \lambda\sigma_0$*. Цей оператор комутує з довільним оператором* C*-симетрії. Якщо ж власному значенню* λ *відповідає тільки одна власна функція* f_1*, то геометрична кратність* λ *відрізняється від алгебраїчної кратності. Це означає що оператор* A *не буде подібним до самоспряженого. Отже для* A *не існує оператора* C*-симетрії.*

ЛІТЕРАТУРА

1. Грод А. І. До теорії $\mathcal{PT}$-симетричних операторів. // Чернівецький Науковий Вісник, 2011. — Т. 1, № 4. — 128 с.
2. T. Ya. Azizov and I.S. Iokhvidov. Linear Operators in Spaces with Indefinite Metric. Wiley, Chichester, 1989.
3. C. M. Bender. Making sense of non-Hermitian Hamiltonians. // *Rep. Progr. Phys.* **70**, 2007. — no. 6. — P. 947–1018.
4. C. M. Bender, D. C. Brody, and H. F. Jones. Complex Extension of Quantum Mechanics. // *Phys. Rev. Lett.,* **89**, 2002. — No. 27. — P. 401–405.
5. C. M. Bender and H. F. Jones. Semiclassical Calculation of the C Operator in $\mathcal{PT}$-Symmetric Quantum Mechanics. // *Phys.Lett.A* **328**, 2004. — P. 102–109.
6. C. M. Bender and S. P. Klevansky. Nonunique C operator in PT quantum mechanics. // *Phys. Lett. A* **373**, 2009. — no. 31. — P. 2670–2674.
7. C. M. Bender and Barnabas Tan. Calculation of the hidden symmetry operator for a PT-symmetric square well. // *J. Phys. A* **39**, 2006. — no. 8.— P. 1945–1953.
8. A. Grod, S. Kuzhel, and V. Sudilovskaya. On operators of transition in Krein spaces. // *Opuscula Mathematica* **31**, 2011. — No. 1. — P. 49–59.
9. S. Kuzhel. On pseudo-Hermitian operators with generalized C-symmetries. // *Modern Analysis and Applications. The Mark Krein Centenary Conference*, Vol. 1: Operator theory and related topics, Oper. Teory Adv. Appl., 190, 2009. — P. 375–385.
10. A. Mostafazadeh. Pseudo-Hermitian Representation of Quantum Mechanics. // *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **7**, 2010. — P. 1191–1306.
11. A. Mostafazadeh. Pseudo-Hermiticity and Generalized PT- and CPT-Symmetries. // *J.Math.Phys.* **44**, 2003. — P. 974–989.

Стаття одержана: 30.01.2015; перероблений варіант: 5.07.2015; прийнята: 10.07.2015.