Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.9 Том 82, 2015, с.34–46

Исследование одного класса систем нелинейных уравнений

Е. В. Олейник
Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина,
пл. Свободы 4, 61022, Харьков, Украина
elenaoliynik@gmail.com

В работе исследованы и описаны решения системы нелинейных уравнений, лежащей в основе построения треугольных моделей для коммутативных систем линейных несамосопряженных операторов. Рассмотрен случай кратного спектра спектральной плотности.
Ключевые слова: треугольные модели, коммутативные системы линейных несамосопряженных операторов, собственные вектора.

Олійник О. В., **Дослідження одного класу систем нелінійних рівнянь**. В роботі досліджено і описано розв'язки системи нелінійних рівнянь, яка лежить в основі побудови трикутних моделей комутативних систем лінійних несамоспряжених операторів. Розглянуто випадок кратного спектру спектральної щільності.
Ключові слова: трикутні моделі, комутативні системи лінійних несамоспряжених операторів, власні вектори.

E. V. Oliynyk, **The study of solutions of a class of nonlinear systems**. We have studied and described for systems of nonlinear equations. It is a basis of the triangular model for commutative systems of non-selfadjoint bounded operators. The case of a multiple spectrum of the spectral density.
Keywords: triangular model, commutative systems of linearnonselfadjoint, eigenvectors.

2000 Mathematics Subject Classification 47A48, 47N20, 34G20.

Введение

В работе изучается система n нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, которая лежит в основе построения треугольных моделей для коммутативных систем линейных несамосопряженных ограниченных операторов. Для случая $\dim E = 3$, $J = I$, $\alpha(x) = 0$ и кратного спектра гладкой матрицы $a(x)$ показано, что можно найти собственные вектора матрицы $a(x)$ при известных собственных значениях матриц $a(x)$, $\gamma(x)$ и действии σ_2 в базисе этих собственных векторов, и таким образом, представить явный вид решений изучаемой системы уравнений.

Пусть задана $\{A_1, A_2\}$ коммутативная система линейных ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве H, а также линейный ограниченный оператор φ: $H \to E$.

Совокупность

$$\Delta = \left(\{A_1, A_2\}; H; \varphi; E; \{\sigma_1, \sigma_2\}; \{\gamma^-\}; \{\gamma^+\}\right), \tag{1}$$

где $\{\sigma_k\}_1^2$, $\{\gamma^\pm\}$ — самосопряженные операторы в E, называется коммутативным узлом [3], если:

$$\begin{array}{ll} 1. & [A_1, A_2] = 0; \\ 2. & A_k - A_k^* = i\varphi^*\sigma_k\varphi; \quad \sigma_k = \sigma_k^*; \quad k = 1,\ 2; \\ 3. & \sigma_1\varphi A_2^* - \sigma_2\varphi A_1^* = \gamma^-\varphi; \\ 4. & \gamma^+ = \gamma^- + (\sigma_1\varphi\varphi^*\sigma_2 - \sigma_2\varphi\varphi^*\sigma_1). \end{array} \tag{2}$$

Любая коммутативная система ограниченных линейных операторов $\{A_k\}_1^2$ может быть включена в узел [2].

Рассмотрим коммутативный узел (1) когда $\dim E = n < \infty$, причем $\sigma_1 = J$ $(J = J^* = J^{-1})$ — инволюция.

Обозначим через $S_1(\lambda)$ характеристическую функцию оператора A_1 узла Δ (1)

$$S_1(\lambda) = I - i\varphi(A_1 - \lambda I)^{-1}\varphi^*\sigma_1 \tag{3}$$

Характеристическая функция $S_1(\lambda)$ [3] оператора A_1 в случае вещественного спектра оператора A_1 и абсолютной непрерывности матричной меры Стильтьеса мультипликативного интеграла имеет вид:

$$S_1(\lambda) = S_l(\lambda); \quad S_x(\lambda) = \int_0^{\widehat{x}} \exp\left\{\frac{iJa(t)dt}{\lambda\alpha(t)}\right\}, \tag{4}$$

где $\alpha(t)$ — вещественная, ограниченная, неубывающая функция на $[0, l]$ $(0 < l < \infty)$, а матрица $a(t) \geq 0$ размера $[n \times n]$ такая, что $tr\ a(t) \equiv 1$. Матрица-функция $a(\cdot)$ является спектральной плотностью из мультипликативного представления Потапова для характеристической функции [7]. Из (2) следует, что характеристическая функция $S_1(\lambda)$ удовлетворяет условию сплетаемости [3]:

$$\left(\sigma_2\lambda + \gamma^-\right) JS_1(\lambda) = S_1(\lambda)\left(\sigma_2\lambda + \gamma^+\right) J. \tag{5}$$

Задача продолжения условия сплетаемости (5) вдоль цепочки инвариантных подпространств оператора A_1, которой отвечает мультипликативное представление $S_x(\lambda)$ (4), приводит к соотношению:

$$(\sigma_2\lambda + \gamma(x))\, J S_x(\lambda) = S_x(\lambda)\left(\sigma_2\lambda + \gamma^+\right) J \quad (\forall x \in [0,l]). \tag{6}$$

В [3] показано, что выполнение условия сплетаемости (6) эквивалентно системе уравнений:

$$\begin{cases} [Ja(x), (\sigma_k\alpha(x) + \gamma(x))\, J] = 0; \quad x \in [0,l], \\ \gamma'(x)J = i\,[Ja(x), \sigma_k J]\,; \quad x \in [0,l], \\ \gamma(0) = \gamma^+. \end{cases} \tag{7}$$

Решение этой системы $\gamma(x)$ используется при построении треугольных моделей коммутативных систем операторов [3].

Целью данной работы является исследование и описание решений системы уравнений (7) в случае $dimE = 3$, кратного спектра матрицы $a(x)$, причем для простоты будем полагать, что матрица $a(x)$ достаточно гладкая, $\alpha(x) = 0$ и $J = I$.

1. Собственные значения и собственные векторы матрицы $a(x)$ в случае кратного спектра

I. Исследуем разрешимость системы условий сплетаемости в случае, когда $\dim E = 3 < \infty$, для $a(x) \geq 0$, причем $a(x)$ имеет кратный спектр, где $J = J^* = J^{-1}$, а $\alpha(x)$ – вещественная, ограниченная, неубывающая функция на $[0,l]$ $(0 < l < \infty)$. Система уравнений (7) в случае $\alpha(x) = 0$, и $J = I$ примет вид:

$$\begin{cases} [a(x), \gamma(x)] = 0, \quad x \in [0,l], \\ \gamma'(x) = i[a(x), \sigma_2], \quad x \in [0,l], \\ \gamma(0) = \gamma^+. \end{cases} \tag{8}$$

Проинтегрируем систему (8), получим

$$\begin{cases} \gamma(x) = i\,[A(x), \sigma_2] + \gamma^+; \\ [A'(x), \gamma(x)] = 0, \end{cases} \tag{9}$$

где $A(x) = \int\limits_0^x a(t)dt$. Таким образом, задача нахождения решений системы уравнений (8) сводится к нахождению матрицы-функции $A(x)$ из нелинейного уравнения

$$[A'(x), [A(x), \sigma_2] - i\gamma_0] = 0. \tag{10}$$

То есть необходимо найти матрицу $A(x)$ как решение нелинейного уравнения (10), а затем определить $\gamma(x)$ из (9).

Пусть $a(x)$ – гладкая матрица с кратным спектром. Выберем ортонормированный базис $h_k(x)$

$$h_k(x) \perp h_s(x),\ (k \neq s)\,, \|h_k(x)\| = 1,\ (1 \leq k, s \leq 3) \tag{11}$$

так, чтобы $a(x)h_k(x) = \mu_k(x)h_k(x)$, где $\mu_k(x)$ – собственные значения матрицы $a(x)$. Не ограничивая общности, будем считать, что $\mu_1(x) = \mu_2(x)$, $\mu_1(x) \neq \mu_3(x)$. Воспользуемся вторым уравнением в (8):

$$\gamma'(x)h_k(x) = ia(x)\sigma_2 h_k(x) - i\sigma_2 a(x)h_k(x) = ia(x)\sigma_2 h_k(x) - i\sigma_2\mu_k(x)h_k(x).$$

Введем обозначение

$$\langle \sigma_2 h_k(x), h_s(x)\rangle = \beta_{sk}(x), \quad (1 \leq k, s \leq n) \tag{12}$$

Учитывая $\sigma_2 h_k(x) = \sum\limits_{s=1}^{3} \beta_{sk}(x)h_s(x)$, получим, что

$$\begin{aligned} \gamma'(x)h_k(x) &= ia(x)\sigma_2 h_k(x) - i\mu_k(x)\sigma_2 h_k(x) = i\left(a(x) - \mu_k(x)\right)\sigma_2 h_k(x) = \\ &= i\sum_{s=1}^{n} \beta_{sk}(x)\left(a(x) - \mu_k(x)\right)h_s(x) = i\sum_{s\neq k} \beta_{sk}(x)\left(\mu_s(x) - \mu_k(x)\right)h_s(x). \end{aligned} \tag{13}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \gamma'(x)h_1(x) &= i\sum_{s=1}^{3} \beta_{s1}(x)\left(\mu_s(x) - \mu_1(x)\right)h_s(x) = \\ &= i\beta_{31}(x)\left(\mu_3(x) - \mu_1(x)\right)h_3(x); \\ \gamma'(x)h_2(x) &= i\sum_{s=1}^{3} \beta_{s2}(x)\left(\mu_s(x) - \mu_2(x)\right)h_s(x) = \\ &= i\beta_{32}(x)\left(\mu_3(x) - \mu_2(x)\right)h_3(x); \\ \gamma'(x)h_3(x) &= i\sum_{s=1}^{3} \beta_{s3}(x)\left(\mu_s(x) - \mu_3(x)\right)h_s(x) = \\ &= i\left(\mu_1(x) - \mu_3(x)\right)\left(\beta_{13}(x)h_1(x) - \beta_{23}(x)h_2(x)\right). \end{aligned} \tag{14}$$

Из первого уравнения системы (8) получим

$$\begin{cases} \gamma(x)h_1(x) = \xi_{11}(x)h_1(x) + \xi_{12}(x)h_2(x); \\ \gamma(x)h_2(x) = \overline{\xi_{12}}(x)h_1(x) + \xi_{22}(x)h_2(x); \\ \gamma(x)h_3(x) = \xi_{33}(x)h_3(x), \end{cases} \tag{15}$$

где $\xi_{ks}(x) \in \mathbb{C}, \quad (1 \leq k, s \leq 3)$.
Продифференцируем первое из уравнений системы (15)

$$\begin{aligned} &\gamma'(x)h_1(x) + \gamma(x)h_1'(x) = \\ &= \xi_{11}'(x)h_1(x) + \xi_{11}(x)h_1'(x) + \xi_{12}'(x)h_2(x) + \xi_{12}(x)h_2'(x). \end{aligned} \tag{16}$$

Умножим (16) на $h_3(x)$ скалярно, учитывая (11), получим

$$\begin{aligned}
&i\beta_{31}(x)\left(\mu_3(x)-\mu_1(x)\right)\langle h_3(x),h_3(x)\rangle+\\
&+\langle h_1'(x),\gamma(x)h_3(x)\rangle=\\
&\langle \xi_{11}(x)h_1'(x),h_3(x)\rangle+\langle \xi_{12}(x)h_2'(x),h_3(x)\rangle;\\
&i\beta_{31}(x)\left(\mu_3(x)-\mu_1(x)\right)+\\
&+(\xi_{33}(x)-\xi_{11}(x))\langle h_1'(x),h_3(x)\rangle=\xi_{12}(x)\langle h_2'(x),h_3(x)\rangle.
\end{aligned} \tag{17}$$

Аналогично, продифференцировав второе уравнение (15) и домножив его скалярно на $h_3(x)$, придем к выражению

$$\begin{aligned}
&i\beta_{32}(x)\left(\mu_3(x)-\mu_2(x)\right)+\\
&+(\xi_{33}(x)-\xi_{22}(x))\langle h_1'(x),h_3(x)\rangle=\overline{\xi_{12}}(x)\langle h_2'(x),h_3(x)\rangle,
\end{aligned} \tag{18}$$

и, продифференцировав третье уравнение системы (15), получим, что

$$\begin{aligned}
&\gamma'(x)h_3(x)+\gamma(x)h_3'(x)=\xi_{33}'(x)h_3(x)+\xi_{33}(x)h_3'(x);\\
&i(\beta_{13}(x)h_1(x)+\beta_{23}(x)h_2(x))\left(\mu_1(x)-\mu_3(x)\right)+\\
&+\gamma(x)h_3'(x)=\xi_{33}'(x)h_3(x)+\xi_{33}(x)h_3'(x);\\
&\langle h_3'(x),\gamma(x)h_3(x)\rangle=\xi_{33}'(x)+\langle \xi_{33}(x)h_3'(x),h_3(x)\rangle;\\
&\xi_{33}(x)\langle h_3'(x),h_3(x)\rangle-\xi_{33}(x)\langle h_3'(x),h_3(x)\rangle=\xi_{33}'(x).
\end{aligned} \tag{19}$$

Таким образом, $\xi_{33}'(x)=0$, то есть ξ_{33} не зависит от x. Умножим (16) скалярно на $h_1(x)$, получим

$$\begin{aligned}
&i\beta_{31}(x)\left(\mu_3(x)-\mu_1(x)\right)\langle h_3(x),h_1(x)\rangle+\\
&+\langle h_1'(x),\gamma(x)h_1(x)\rangle=\\
&\langle \xi_{11}(x)h_1'(x),h_1(x)\rangle+\langle \xi_{12}(x)h_2'(x),h_1(x)\rangle+\xi_{11}'(x);\\
&\langle h_1'(x),\xi_{11}(x)h_1(x)+\xi_{12}(x)h_2(x)\rangle=\\
&\langle \xi_{11}(x)h_1'(x),h_1(x)\rangle+\langle \xi_{12}(x)h_2'(x),h_1(x)\rangle+\xi_{11}'(x),
\end{aligned} \tag{20}$$

то есть

$$\overline{\xi_{12}}(x)\langle h_1'(x),h_2(x)\rangle=\xi_{12}(x)\langle h_2'(x),h_1(x)\rangle+\xi_{11}'(x). \tag{21}$$

При умножении (16) скалярно на $h_2(x)$, получим

$$\begin{aligned}
&\xi_{12}(x)\left(\langle h_1'(x),h_1(x)\rangle-\langle h_2'(x),h_2(x)\rangle\right)+\\
&+(\xi_{22}(x)-\xi_{11}(x))\langle h_1'(x),h_2(x)\rangle=\xi_{12}'(x).
\end{aligned} \tag{22}$$

Продифференцировав второе уравнение системы (15) и умножив его скалярно на $h_1(x)$, а потом на $h_2(x)$, получим следующие соотношения

$$\begin{aligned}
&\overline{\xi_{12}(x)}\left(\langle h_2'(x),h_2(x)\rangle-\langle h_1'(x),h_1(x)\rangle\right)+\\
&+(\xi_{11}(x)-\xi_{22}(x))\langle h_1'(x),h_2(x)\rangle=\overline{\xi_{12}}'(x);
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\xi_{12}(x)\langle h_2'(x),h_1(x)\rangle=\overline{\xi_{12}(x)}\langle h_1'(x),h_2(x)\rangle+\xi_{22}'(x); \tag{24}$$

Сложив (21) и (24), получим, что $\xi_{11}'(x)+\xi_{22}'(x)=0$. Используя (17) и (18), запишем систему уравнений

$$\begin{cases}(\xi_{33}-\xi_{11}(x))\langle h_1'(x),h_3(x)\rangle-\xi_{12}(x)\langle h_2'(x),h_3(x)\rangle=\\ =i\beta_{31}(x)\left(\mu_1(x)-\mu_3(x)\right);\\ (\xi_{33}-\xi_{22}(x))\langle h_1'(x),h_3(x)\rangle-\overline{\xi_{12}}(x)\langle h_2'(x),h_3(x)\rangle=\\ =i\beta_{32}(x)\left(\mu_2(x)-\mu_3(x)\right).\end{cases}\tag{25}$$

Решим ее по правилу Крамера

$$\Delta=\begin{vmatrix}\xi_{33}-\xi_{11}(x) & -\xi_{12}(x)\\ \xi_{33}-\xi_{22}(x) & -\overline{\xi_{12}(x)}.\end{vmatrix}=$$
$$=\xi_{12}(x)(\xi_{33}-\xi_{22}(x))-\overline{\xi_{12}(x)}(\xi_{33}-\xi_{11}(x)).$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}i\beta_{31}(x)\left(\mu_1(x)-\mu_3(x)\right) & -\xi_{12}(x)\\ i\beta_{32}(x)\left(\mu_2(x)-\mu_3(x)\right) & -\overline{\xi_{12}(x)}\end{vmatrix}=$$
$$=i\left(\mu_1(x)-\mu_3(x)\right)\left(\beta_{32}(x)\xi_{12}(x)-\beta_{31}(x)\overline{\xi_{12}(x)}\right.$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}\xi_{33}-\xi_{11}(x) & i\beta_{31}(x)\left(\mu_1(x)-\mu_3(x)\right)\\ \xi_{33}-\xi_{22}(x) & i\beta_{32}(x)\left(\mu_2(x)-\mu_3(x)\right)\end{vmatrix}=$$
$$=i\left(\mu_1(x)-\mu_3(x)\right)\left(\beta_{32}(x)(\xi_{33}-\xi_{11}(x))-\beta_{31}(x)(\xi_{33}-\xi_{22}(x))\right)$$

То есть, с учетом того, что $\mu_1(x)=\mu_2(x)$

$$\langle h_1'(x),h_3(x)\rangle=\frac{\Delta_1}{\Delta}=$$
$$=\frac{i\left(\mu_1(x)-\mu_3(x)\right)\left(\beta_{32}(x)\xi_{12}(x)-\beta_{31}(x)\overline{\xi_{12}(x)}\right)}{\xi_{12}(x)(\xi_{33}-\xi_{22}(x))-\overline{\xi_{12}(x)}(\xi_{33}-\xi_{11}(x))}\tag{26}$$

а

$$\langle h_2'(x),h_3(x)\rangle=\frac{\Delta_2}{\Delta}=$$
$$=\frac{i(\mu_1(x)-\mu_3(x))\left[\beta_{32}(x)(\xi_{33}-\xi_{11}(x))-\beta_{31}(x)(\xi_{33}-\xi_{22}(x))\right]}{\xi_{12}(x)(\xi_{33}-\xi_{22}(x))-\overline{\xi_{12}(x)}(\xi_{33}-\xi_{11}(x))}\tag{27}$$

Продифференцировав третье уравнение системы (15) с учетом того, что ξ_{33} не зависит от x, и после, умножив его сначала на $h_1(x)$, а потом на $h_2(x)$, получим следующую систему уравнений

$$\begin{gathered}(\xi_{33}-\xi_{11}(x))\langle h_3'(x),h_1(x)\rangle-\overline{\xi_{12}}(x)\langle h_3'(x),h_2(x)\rangle=\\ =i\beta_{13}(x)\left(\mu_1(x)-\mu_3(x)\right);\\ -\xi_{12}(x)\langle h_3'(x),h_1(x)\rangle+(\xi_{33}-\xi_{22}(x))\langle h_3'(x),h_2(x)\rangle=\\ =i\beta_{23}(x)\left(\mu_1(x)-\mu_3(x)\right).\end{gathered}\tag{28}$$

Также решим ее по правилу Крамера,

$$\Delta=\begin{vmatrix}\xi_{33}-\xi_{11}(x) & -\overline{\xi_{12}(x)}\\ -\xi_{12}(x) & \xi_{33}-\xi_{22}(x)\end{vmatrix}=$$
$$=(\xi_{33}-\xi_{22}(x))(\xi_{33}-\xi_{11}(x))-\xi_{12}^2(x);$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} i\beta_{13}(x)\,(\mu_1(x)-\mu_3(x)) & -\overline{\xi_{12}(x)} \\ i\beta_{23}(x)\,(\mu_1(x)-\mu_3(x)) & \xi_{33}-\xi_{22}(x) \end{vmatrix} = \\ = i(\mu_1(x)-\mu_3(x))(\beta_{23}(x)\overline{\xi_{12}(x)}+\beta_{13}(x)(\xi_{33}-\xi_{22}(x)));$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \xi_{33}-\xi_{11}(x) & i\beta_{13}(x)(\mu_1(x)-\mu_3(x)) \\ -\xi_{12}(x) & i\beta_{23}(x)(\mu_1(x)-\mu_3(x)) \end{vmatrix} = \\ = i(\mu_1(x)-\mu_3(x))(\beta_{23}(x)(\xi_{33}-\xi_{11}(x))+\beta_{13}(x)\xi_{12}(x)).$$

То есть

$$\langle h_3'(x), h_1(x)\rangle = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \\ = \frac{i\,(\mu_1(x)-\mu_3(x))\,(\beta_{23}(x)\overline{\xi_{12}(x)}+\beta_{13}(x)(\xi_{33}-\xi_{22}(x))}{(\xi_{33}-\xi_{22}(x))(\xi_{33}-\xi_{11}(x))-\xi_{12}^2(x)}, \tag{29}$$

а

$$\langle h_3'(x), h_2(x)\rangle = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \\ = \frac{i\,(\mu_1(x)-\mu_3(x))\,(\beta_{23}(x)(\xi_{33}-\xi_{11}(x))+\beta_{13}(x)\xi_{12}(x))}{(\xi_{33}-\xi_{22}(x))(\xi_{33}-\xi_{11}(x))-\xi_{12}^2(x)}. \tag{30}$$

Итак, получены выражения для $\langle h_1'(x), h_3(x)\rangle$, $\langle h_2'(x), h_3(x)\rangle$, $\langle h_3'(x), h_1(x)\rangle$, $\langle h_3'(x), h_2(x)\rangle$ в виде (26), (27), (29), (30).

2. Решение системы уравнений при дополнительных условиях

II. В случае, если $\xi_{12}(x)\in\mathbb{R}$, и оператор σ_2 действует на базисные вектора $\{h_k(x)\}_1^3$ следующим образом:

$$\begin{cases} \sigma_2 h_1(x) = \psi(x)h_1(x), \\ \sigma_2 h_2(x) = \nu(x)h_3(x), \\ \sigma_2 h_3(x) = \overline{\nu}(x)h_2(x), \end{cases} \tag{31}$$

где $\psi(x)$ – вещественная функция, а $\nu(x)$ – комплекснозначная функция, получим, что $\beta_{12}(x)=\beta_{21}(x)=\beta_{13}(x)=\beta_{31}(x)=0$, $\beta_{32}(x)=\nu(x)$, $\beta_{23}(x)=\overline{\nu}(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} \langle h_1'(x), h_3(x)\rangle &= \frac{i\,(\mu_3(x)-\mu_1(x))\,\varphi(x)}{\xi_{22}(x)-\xi_{11}(x)}; \\ \langle h_2'(x), h_3(x)\rangle &= \frac{i(\mu_3(x)-\mu_1(x))\varphi(x)(\xi_{33}-\xi_{11}(x))}{\xi_{12}(x)(\xi_{22}(x)-\xi_{11}(x))}; \\ \langle h_3'(x), h_1(x)\rangle &= \frac{i\,(\mu_1(x)-\mu_3(x))\,\overline{\varphi(x)}\xi_{12}(x)}{(\xi_{33}-\xi_{22}(x))(\xi_{33}-\xi_{11}(x))-\xi_{12}^2(x)}; \\ \langle h_3'(x), h_2(x)\rangle &= \frac{i\,(\mu_1(x)-\mu_3(x))\,\overline{\varphi(x)}(\xi_{33}-\xi_{11}(x))}{(\xi_{33}-\xi_{22}(x))(\xi_{33}-\xi_{11}(x))-\xi_{12}^2(x)}. \end{aligned} \tag{32}$$

Так как $\langle h_k(x), h_s(x)\rangle = 0$, нетрудно заметить, что $(\langle h_k(x), h_s(x)\rangle)' =$
$= \langle h_k'(x), h_s(x)\rangle + \langle h_k(x), h_s'(x)\rangle = 0$, или

$$\langle h_k'(x), h_s(x)\rangle = -\overline{\langle h_s'(x), h_k(x)\rangle}. \tag{33}$$

В таком случае

$$\frac{i\,(\mu_3(x)-\mu_1(x))\,\varphi(x)}{\xi_{22}(x)-\xi_{11}(x)} = -\frac{i\,(\mu_1(x)-\mu_3(x))\,\varphi(x)\xi_{12}(x)}{(\xi_{33}-\xi_{22}(x))(\xi_{33}-\xi_{11}(x))-\xi_{12}^2(x)},$$

значит, $(\xi_{22}(x)-\xi_{11}(x))\xi_{12}(x) = (\xi_{33}-\xi_{22}(x))(\xi_{33}-\xi_{11}(x))-\xi_{12}^2(x)$.
Предположим, что $\langle h_k(x), h_k'(x)\rangle = i\delta_k(x)$, а $\langle h_1'(x), h_2(x)\rangle = a(x)+ib(x)$, где $\delta_k(x),\ a(x),\ b(x)\in\mathbb{R}$. Из (21) получим следующее выражение

$$\xi_{12}'(x) = i\xi_{12}(x)(\delta_1(x)-\delta_2(x)) + (\xi_{22}(x)-\xi_{11}(x))(a(x)+ib(x)). \tag{34}$$

Приравняв вещественные и мнимые части, придем к соотношениям:
$a(x) = \dfrac{\xi_{12}'(x)}{\xi_{22}(x)-\xi_{11}(x)}$, $b(x) = \dfrac{\xi_{12}(x)(\delta_2(x)-\delta_1(x))}{\xi_{22}(x)-\xi_{11}(x)}$.
То есть $\langle h_1'(x), h_2(x)\rangle = \dfrac{\xi_{12}'(x)}{\xi_{22}(x)-\xi_{11}(x)} + i\dfrac{\xi_{12}(x)(\delta_2(x)-\delta_1(x))}{\xi_{22}(x)-\xi_{11}(x)}$.
Разложив вектора $h_k'(x)$ по базису $h_k(x)$, получим

$$h_k'(x) = \sum_{s=1}^{3}\langle h_s'(x), h_s(x)\rangle h_s(x). \tag{35}$$

Подставив полученные выражения, придем к системе

$$\begin{aligned}
h_1'(x) \quad &= i\delta_1(x)h_1(x) + \left(\frac{\xi_{12}'(x)+i\xi_{12}(x)(\delta_2(x)-\delta_1(x))}{\xi_{22}(x)-\xi_{11}(x)}\right)h_2(x)+\\
&\quad + \frac{i\,(\mu_3(x)-\mu_1(x))\,\varphi(x)}{\xi_{22}(x)-\xi_{11}(x)}h_3(x);\\
h_2'(x) \quad &= \left(\frac{-\xi_{12}'(x)+i\xi_{12}(x)(\delta_2(x)-\delta_1(x))}{\xi_{22}(x)-\xi_{11}(x)}\right)h_1(x) + i\delta_2(x)h_2(x)+\\
&\quad + \frac{i(\mu_3(x)-\mu_1(x))\varphi(x)(\xi_{33}-\xi_{11}(x))}{\xi_{12}(x)(\xi_{22}(x)-\xi_{11}(x))}h_3(x);\\
h_3'(x) \quad &= -\frac{i\,(\mu_3(x)-\mu_1(x))\,\overline{\varphi(x)}}{\xi_{22}(x)-\xi_{11}(x)}h_1(x)-\\
&\quad - \frac{i(\mu_3(x)-\mu_1(x))\overline{\varphi(x)}(\xi_{33}-\xi_{11}(x))}{\xi_{12}(x)(\xi_{22}(x)-\xi_{11}(x))}h_2(x) + i\delta_3(x)h_3(x).
\end{aligned} \tag{36}$$

Введем обозначения, считая, что $\xi_{ks} = const$ $(k,s=\overline{1,3})$,
$m = \dfrac{\xi_{33}-\xi_{11}}{\xi_{12}(\xi_{22}-\xi_{11})}$, $k = \dfrac{\xi_{12}}{\xi_{22}-\xi_{11}}$, $n = \dfrac{1}{\xi_{22}-\xi_{11}}$,
$d(x) = (\mu_3(x)-\mu_1(x))\,\varphi(x)$. Тогда система (35) запишется в следующем виде:

$$\begin{cases}
h_1'(x) = i\delta_1(x)h_1(x) + ik(\delta_2(x)-\delta_1(x))h_2(x) + ind(x)h_3(x);\\
h_2'(x) = -ik(\delta_2(x)-\delta_1(x))h_1(x) + i\delta_2(x)h_2(x) + imd(x)h_3(x);\\
h_3'(x) = -in\overline{d(x)}h_1(x) - im\overline{d(x)}h_2(x) + i\delta_3(x)h_3(x).
\end{cases} \tag{37}$$

Пусть $f_k(x) = exp^{-i\int\limits_0^x \delta_k(t)dt}$. Теперь система (36) примет вид

$$\begin{cases} f_1'(x) = ik(\delta_2(x) - \delta_1(x))exp^{i\int\limits_0^x (\delta_2(t)-\delta_1(t))dt} f_2(x) + \\ \qquad +ind(x)exp^{i\int\limits_0^x (\delta_3(t)-\delta_1(t))dt} f_3(x); \\ f_2'(x) = -ik(\delta_2(x) - \delta_1(x))exp^{-i\int\limits_0^x (\delta_2(t)-\delta_1(t))dt} f_1(x) + \\ \qquad +imd(x)exp^{i\int\limits_0^x (\delta_3(t)-\delta_2(t))dt} f_3(x); \\ f_3'(x) = -in\overline{d(x)}exp^{-i\int\limits_0^x (\delta_3(t)-\delta_1(t))dt} f_1(x) - \\ \qquad -im\overline{d(x)}exp^{-i\int\limits_0^x (\delta_3(t)-\delta_2(t))dt} f_2(x). \end{cases} \tag{38}$$

В случае $\delta_2(t) = \delta_1(t)$ система примет ранее изученный вид, а именно

$$\begin{cases} f_1'(x) = ind(x)exp^{i\int\limits_0^x (\delta_3(t)-\delta_1(t))dt} f_3(x); \\ f_2'(x) = imd(x)exp^{i\int\limits_0^x (\delta_3(t)-\delta_2(t))dt} f_3(x); \\ f_3'(x) = -in\overline{d(x)}exp^{-i\int\limits_0^x (\delta_3(t)-\delta_1(t))dt} f_1(x) - \\ \qquad -im\overline{d(x)}exp^{-i\int\limits_0^x (\delta_3(t)-\delta_2(t))dt} f_2(x), \end{cases} \tag{39}$$

решения которой легко находятся при некоторых дополнительных условиях. Например, если $d(x)$ – вещественная функция, а $nd(x)exp^{i\int\limits_0^x (\delta_3(t)-\delta_1(t))dt}$, $md(x)exp^{i\int\limits_0^x (\delta_3(t)-\delta_2(t))dt}$ линейно зависимы, то есть $m \cdot exp^{i\int\limits_0^x (\delta_3(t)-\delta_2(t))dt} =$ $= k \cdot n \cdot exp^{i\int\limits_0^x (\delta_3(t)-\delta_1(t))dt} = k \cdot v(x)$, где $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, тогда система (39) примет вид:

$$\begin{cases} f_1'(x) = iv(x)f_3(x), \\ f_2'(x) = ikv(x)f_3(x), \\ f_3'(x) = -iv(x)(f_1(x) + kf_2(x)), \\ f_j(0) = f_0^j, \ j = \overline{1,3} \end{cases} \tag{40}$$

Лемма 1. *Если $k \in \mathbb{R}$, то система уравнений* (40) *имеет единственное решение:*

$$\begin{cases} f_1(x) = \dfrac{if_0^3}{\sqrt{1+k^2}} exp^{\varphi(x)}, \\ f_2(x) = \dfrac{ikf_0^3}{\sqrt{1+k^2}} exp^{\varphi(x)}, \\ f_3(x) = f_0^3 exp^{\varphi(x)}, \end{cases} \tag{41}$$

где $\varphi(x) = \sqrt{1+k^2}\int\limits_0^x v(t)dt.$

Для системы (38) примем обозначения

$$\begin{cases} a(x) = ik(\delta_2(x)-\delta_1(x))exp^{i\int\limits_0^x (\delta_2(t)-\delta_1(t))dt}; \\ b(x) = ind(x)exp^{i\int\limits_0^x (\delta_3(t)-\delta_1(t))dt}; \\ c(x) = imd(x)exp^{i\int\limits_0^x (\delta_3(t)-\delta_2(t))dt}, \end{cases} \tag{42}$$

будем считать, что $a(x),\ b(x),\ c(x)$ – вещественнозначные функции, тогда система (38) примет вид

$$\begin{cases} f_1'(x) = a(x)f_2(x) + b(x)f_3(x); \\ f_2'(x) = a(x)f_1(x) + c(x)f_3(x); \\ f_3'(x) = b(x)f_1(x) + c(x)f_2(x). \end{cases} \tag{43}$$

Теорема 1. *Пусть* $a(x),\ b(x),\ c(x)$ *- вещественнозначные функции, положим*

$$\begin{array}{rcl} A(x) & = & exp^{2\int\limits_0^x a(t)dt}, \\ P(x) & = & (b(x)+c(x))exp^{-\int\limits_0^x a(t)dt}, \\ Q(x) & = & (b(x)-c(x))exp^{\int\limits_0^x a(t)dt}. \end{array} \tag{44}$$

Кроме того, выполняются следующие условия

$$Q'(x) := k(x)Q(x), \tag{45}$$

$$(P(x)A^2(x))' = k(x)P(x)A^2(x), \tag{46}$$

$$P^2(x)A^2(x) + Q^2(x) = \frac{1}{2A(x)}exp^{-\int\limits_0^x k(t)dt},\ p>0,\ p\in\mathbb{R}, \tag{47}$$

где $k(x)$ *– вещественная дифференцируемая функция. Тогда система* (43) *имеет единственное решение*

$$f_1(x) = f_1(0) + \frac{1}{2}\left(\sqrt{A}\int\limits_0^x P(t)f_3(t)dt + \frac{1}{\sqrt{A}}\int\limits_0^x Q(t)f_3(t)dt\right) \tag{48}$$

$$f_2(x) = f_2(0) + \frac{1}{2}\left(\sqrt{A}\int\limits_0^x P(t)f_3(t)dt - \frac{1}{\sqrt{A}}\int\limits_0^x Q(t)f_3(t)dt\right) \tag{49}$$

$$f_3(x) = f_3(0)cos\sqrt{p}\int\limits_0^x g_1(t)dt + \frac{2(b(0)f_1(0)+c(0)f_2(0))}{\sqrt{p}}\sin\sqrt{p}\int\limits_0^x g_1(t)dt. \tag{50}$$

Доказательство. Складывая и вычитая первые два уравнения этой системы, получим следующий ее вид

$$\begin{cases}(f_1(x)+f_2(x))' = a(x)(f_1(x)+f_2(x)) + (b(x)+c(x))f_3(x);\\ (f_1(x)-f_2(x))' = -a(x)(f_1(x)-f_2(x)) + (b(x)-c(x))f_3(x);\\ f_3'(x) = b(x)f_1(x)+c(x)f_2(x).\end{cases} \tag{51}$$

Введем в рассмотрение следующие функции

$$\begin{cases}F_+(x) = exp^{-\int\limits_0^x a(t)dt}(f_1(x)+f_2(x));\\ F_-(x) = exp^{\int\limits_0^x a(t)dt}(f_1(x)-f_2(x)).\end{cases} \tag{52}$$

Теперь система (38) приобретает вид

$$\begin{cases}F_+'(x) = (b(x)+c(x))f_3(x)exp^{-\int\limits_0^x a(t)dt};\\ F_-'(x) = (b(x)-c(x))f_3(x)exp^{\int\limits_0^x a(t)dt};\\ f_3'(x) = \frac{1}{2}(b(x)+c(x))exp^{\int\limits_0^x a(t)dt}F_+(x)+\\ \qquad +\frac{1}{2}(b(x)-c(x))exp^{-\int\limits_0^x a(t)dt}F_-(x).\end{cases} \tag{53}$$

Упростим систему, используя обозначения (44)

$$\begin{cases}F_+'(x) = P(x)f_3(x);\\ F_-'(x) = Q(x)f_3(x);\\ f_3'(x) = \frac{1}{2}P(x)A(x)F_+(x)+\frac{1}{2}Q(x)A^{-1}(x)F_-(x).\end{cases} \tag{54}$$

Введем условия (45) и (46), теперь система (54) приобретает вид

$$\begin{cases}B'(x) = k(x)B(x)+(P^2(x)A^2(x)+Q^2(x))f_3(x);\\ f_3'(x) = \dfrac{1}{2A(x)}B(x).\end{cases} \tag{55}$$

где $B(x) = P(x)A^2(x)F_+(x)+Q(x)F_-(x)$. Пусть $G(x) = exp^{-\int\limits_0^x k(t)dt}B(x)$, тогда

$$\begin{cases}G'(x) = (P^2(x)A^2(x)+Q^2(x))f_3(x);\\ f_3'(x) = \dfrac{1}{2A(x)}G(x)exp^{-\int\limits_0^x k(t)dt}.\end{cases} \tag{56}$$

Перепишем систему, используя (47) и, обозначив $g_1(x) = P^2(x)A^2(x)+$ $+Q^2(x) = \frac{1}{2A(x)}exp^{-\int\limits_0^x k(t)dt}$, придем к соотношениям

$$\begin{cases}G'(x) = g_1(x)f_3(x);\\ f_3'(x) = pg_1(x)G(x),\ p\in\mathbb{R}.\end{cases} \tag{57}$$

Дифференцируя второе уравнение системы (57) и подставляя первое, получим соотношение

$$f_3''(x) - \frac{g_1'(x)}{g_1(x)} f_3'(x) - p g_1^2(x) f_3(x) = 0. \tag{58}$$

Решая (58), получим

$$f_3(x) = f_3(0) cos \sqrt{p} \int_0^x g_1(t)dt + C_2 \sin \sqrt{p} \int_0^x g_1(t)dt. \tag{59}$$

Используя (52) и (54) найдем выражения для $f_1(x)$ и $f_2(x)$:

$$\begin{aligned} f_1(x) + f_2(x) &= exp^{\int_0^x a(t)dt} \left(\int_0^x P(t) f_3(t)dt + f_1(0) + f_2(0) \right), \\ f_1(x) - f_2(x) &= exp^{-\int_0^x a(t)dt} \left(\int_0^x Q(t) f_3(t)dt + f_1(0) - f_2(0) \right). \end{aligned} \tag{60}$$

Нетрудно заметить, что выражения (60) могут быть записаны в виде (48) и (49).

Благодарность. Автор выражает искреннюю признательность за постановку задачи и внимание к работе доктору физ.-мат. наук, профессору Золотареву В. А.

ЛИТЕРАТУРА

1. Глазман И.М., Любич Ю.И., Конечномерный линейный анализ. — М.: Наука, 1969. — 476 с.

2. Золотарев В.А., Аналитические методы спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов. — Харьков: ХНУ, 2003. — 342 с.

3. Золотарев В.А., Временные конусы и функциональная модель на римановой поверхности // Мат. сб., — 1990. — Т. 181. — **7**. — С. 965–994.

4. Золотарев В.А., Спектральный анализ несамосопряженных коммутативных систем операторов и нелинейные дифференциальные уравнения // Теория функций и функцион. анализ, и их прил. Харьков: Респ. сб., 1983. — Вып. 40. – С. 68–71.

5. Золотарев В.А., Треугольные модели и задачи Коши для характеристических функций коммутирующих систем операторов. — Рукопись депонирована в ВИНИТИ РЖ "Математика"1Б916 деп, 1981. — 66 с.

6. Золотарев В.А., Модельные представления систем самосопряженных операторов, удовлетворяющих коммутационным соотношениям. // Математический сборник, 2010. — Т. 201. — **10**. — С. 59–92.

7. Лившиц М.С., Янцевич А.А., Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. — Харьков: Изд. Харьк. ун-та, 1971. — 160 с.

Статья получена: 2.11.2013; принята: 23.03.2015.