Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.9:535.4 № 749, 2006, с.50-56

Интегральное уравнение задачи электростатики для сферического сегмента и диэлектрического закругления конуса

В.А.Резуненко

Харьковский национальный университет им.В.Н.Каразина, Украина

Методом регуляризации выделена и обращена главная часть оператора задачи электростатики для сферического сегмента, погружённого в диэлектрическое закругление конуса. Этот метод базируется на использовании техники контурного интегрирования и интегрального преобразования типа Абеля. В результате получено эффективно разрешимое интегральное уравнение Фредгольма II рода с компактным оператором в гильбертовом пространстве $L_2(0, \gamma)$. Рассмотрены частные случаи постановки задачи.
2000 Mathematics Subject Classification: 65N12, 35A25,78A45.

1. Введение. В литературе по математической физике, электродинамике, по теории дифракции известно немного работ, посвященных решению задач электростатики для сферического сегмента в присутствии бесконечного конуса [1] - [4]. Вместе с тем, актуальность таких задач следует, в частности, из того, что сферический сегмент является хорошей моделью многих устройств: антенн, резонаторов, узлов волноводов. Диэлектрическое закругление конуса может быть моделью кожуха электроприборов. Заземленный конус можно рассматривать как подстилающую поверхность с острым выступом. Многочисленные применения сферических и конических поверхностей стимулируют развитие методов решения прямых и обратных задач математической физики, электродинамики и теории дифракции [5] - [10] на рассматриваемых поверхностях.

При анализе задач электростатики выбирают модели со сравнительно небольшим числом параметров. При этом выбранные параметры должны описывать основные характеристики моделируемых объектов и характеристики материальных сред, окружающих объекты.

Целью данной работы является приминение метода регуляризации задачи электростатики для сферического сегмента, погруженного в диэлектрическое сферическое закругление конуса. В результате регуляризации задача отыскания распределения электростатического потенциала в трехмерном пространстве сведена к решению интегрального уравнения Фредгольма II рода для вспомогательной функции. Оператор интегрального уравнения является компактным в пространстве $L_2(0,\gamma), 0 < \gamma < \pi$. В работе показана, в частности, эффективная разрешимость полученного интегрального уравнения, а также рассмотрены некоторые случаи постановки задачи.

В данной работе применен метод [1]-[5] и развито его обобщение на более сложную задачу электростатики с неоднородными диэлектрическими средами, окружающими сферический сегмент и конус.

2. Постановка задачи. Пусть центр сферического сегмента, сферического закругления конуса и вершина бесконечного конуса помещены в начало декартовой и сферической систем координат. Полагаем a_1 - радиус сферического сегмента, θ_0 - полярный угол, измеряющий сегмент (на сегменте $0 \leq \theta < \theta_0$), a- радиус сферического закругления конуса ($a_1 < a$), γ - угол раскрыва конуса ($\theta_0 < \gamma$). Полагаем, что потенциал V сферического сегмента задан и $V \neq 0$, что потенциал конуса V_0 равен нулю (конус заземлён). Пусть диэлектрическая проницаемость среды (материала), из которой изготовлено сферическое закругления конуса есть $\varepsilon \neq 1$. Пусть вне закругления и вне конуса диэлектрическая проницаемость среды равна ε_0 и $\varepsilon_0 \neq 1$. Пусть сферический сегмент является идеально проводящим (его проводимость $\sigma = \infty$). Полагаем материальную среду вне сегмента непроводящей ($\sigma = 0$). Пусть в пространстве R^3 выделены три области: $0 \leq r < a$, $a < r < a_1$, $r > a_1$; для всех трёх областей $\theta \in [0,\gamma]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Вторичные потенциалы в этих областях представим рядами Фурье:

$$u_1 = \frac{1}{\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{\nu_n} P_{\nu_n}(\cos\theta), \quad 0 \leq r < a_1, \tag{1}$$

$$u_2 = \frac{1}{\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty} B_n r^{-\nu_n-1} P_{\nu_n}(\cos\theta), \quad a_1 < r < a, \tag{2}$$

$$u_3 = \frac{1}{\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{\nu_n} P_{\nu_n}(\cos\theta), \quad a_1 < r < a, \tag{3}$$

$$u_4 = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{n=1}^{\infty} D_n r^{-\nu_n-1} P_{\nu_n}(\cos\theta), \quad r > a, \tag{4}$$

Полные потенциалы должны удовлетворять уравнению Лапласа $\Delta u = 0$, граничным условиям, в частности,

$$P_{\nu_n}(\cos\theta) = 0, \quad \theta = \gamma, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad 0 \leq r < \infty. \tag{5}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial r} = \frac{\partial [u_2 + u_3]}{\partial r}, \quad r = a_1, \quad \theta_0 < \theta \leq \gamma. \tag{6}$$

$$u_2 + u_3 = u_4, \quad r = a, \quad 0 < \theta \leq \gamma. \tag{7}$$

Полные потенциалы должны исчезать на бесконечности как $O(1/r)$, $r \to \infty$, и удовлетворять условию конечности интеграла энергии в любой ограниченной области пространства R^3. Требуется найти полные потенциалы вне конуса в трех рассматриваемых областях. В такой постановке задача электростатики имеет единственное решение [11].

3.Функциональные уравнения. Для решения задачи построим парные сумматорные функциональные уравнения относительно неизвестных коэффициентов $B_n, n \geqslant 1$ потенциала u_2 (2). Для этого сначала используем граничные условия(5)-(7). В результате получим вспомогательные уравнения

$$\frac{1}{\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty} B_n a_1^{-\nu_n-1} P_{\nu_n}(\cos\theta) = \nu - \frac{1}{\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty} C_n a^{\nu_n} P_{\nu_n}(\cos\theta), \quad 0 \leqslant \theta < \theta_0. \tag{8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-\nu_n-1)B_n a_1^{-\nu_n-2} - \nu_n a_1^{\nu_n-1}(A_n - C_n)\right] P_{\nu_n}(\cos\theta) = 0, \quad \theta_0 < \theta \leq \gamma. \tag{9}$$

Исключим из уравнений (8),(9) коэффициенты A_n, C_n, $n = 1, 2, 3, ...$ (1)-(4). Для этого из граничных условий получаем систему 3-х уравнений с тремя неизвестными A_n, C_n, D_n, $n = 1, 2, 3, ...$.Систему будем решать по правилу Крамера

$$A_n = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad C_n = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad D_n = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \tag{10}$$

для которого (10) определители Δ, Δ_i, $i = 1, 2, 3$ вычислим ниже, в (11)-(14):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^{\nu_n} & -a_1^{\nu_n} & 0 \\ 0 & \nu_n a^{\nu_n-1} & (\nu_n+1)a^{\nu_n-2} \\ 0 & -a^{\nu_n}\varepsilon^{-1} & a^{-\nu_n-1}\varepsilon_0^{-1} \end{vmatrix} = a_1^{\nu_n} a^{-2}[\varepsilon_0^{-1}\nu_n + \varepsilon^{-1}(\nu_n+1)]. \tag{11}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} B_n a_1^{-\nu_n-1} & -a_1^{\nu_n} & 0 \\ B_n(\nu_n+1)a^{-\nu_n-2} & \nu_n a^{\nu_n-1} & (\nu_n+1)a^{-\nu_n-2} \\ B_n a^{-\nu_n-1} & -a^{\nu_n} & \varepsilon a^{-\nu_n-1} \end{vmatrix}$$

$$= B_n\left\{a_1^{-\nu_n-1}a^{-2}[\varepsilon\nu_n + (\nu_n+1)] + a_1^{\nu_n}a^{-2\nu_n-3}(\nu_n+1)(\varepsilon-1)\right\}. \tag{12}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1^{\nu_n} & B_n a_1^{-\nu_n-1} & 0 \\ 0 & B_n(\nu_n+1)a^{-\nu_n-2} & (\nu_n+1)a^{-\nu_n-2} \\ 0 & B_n a^{-\nu_n-1} & \varepsilon a^{-\nu_n-1} \end{vmatrix}$$

$$= B_n a_1^{\nu_n}(\nu_n+1)a^{-2\nu_n-3}[\varepsilon-1]. \tag{13}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1^{\nu_n} & -a_1^{\nu_n} & B_n a_1^{-\nu_n-1} \\ 0 & \nu_n a^{\nu_n-1} & B_n(\nu_n+1)a^{-\nu_n-2} \\ 0 & -a^{\nu_n} & B_n a^{-\nu_n-1} \end{vmatrix} = B_n(2\nu_n+1)a_1^{\nu_n}a^{-2}. \tag{14}$$

Подставим коэффициенты A_n, C_n (10)-(14) в уравнения (8),(9). В полученных уравнениях введем обозначения

$$X_n = \frac{B_n}{\varepsilon a_1^{\nu_n+1}}, \qquad \varepsilon_n^{(1)} = \frac{(\nu_n+1)(\varepsilon_0-\varepsilon)}{\varepsilon\nu_n+\varepsilon_0(\nu_n+1)}\left(\frac{a_1}{a}\right)^{\nu_n+1}. \tag{15}$$

В итоге устанавливаем требуемые парные сумматорные функциональные уравнения относительно неизвестных коэффициентов X_n (15):

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n\left[1+\varepsilon_n^{(1)}\right]P_{\nu_n}(\cos\theta) = V, \quad 0 \le \theta < \theta_0. \tag{16}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2\nu_n+1)X_n\,P_{\nu_n}(\cos\theta) = 0, \quad \theta_0 < \theta \le \gamma. \tag{17}$$

4. Интегральное уравнение II рода. Система функциональных уравнений (16),(17) является системой I рода по функциям Лежандра с дробным индексом ν_n, $n \geqslant 1$. Прямые численные методы решшения таких систем неэффективны. До сих пор общего метода решения таких уравнений нет. Сведем задачу отыскания коэффициентов X_n, $n \geqslant 1$ (15) к решению интегрального уравнения II рода для вспомогательной функции. Для этого в (18),(19) сначала выполним подстановку

$$X_n = \beta_n \int_0^{\theta_0} \psi(t)\cos\left(\nu_n+\frac{1}{2}\right)t\,dt \tag{18}$$

$$\beta_n = -2\left\{\sin^2\gamma\left(\frac{\partial}{\partial\theta}P_{\nu_n}(\cos\theta)\right)|_{\theta=\gamma}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial\nu}P_{\nu}(\cos\gamma)\right)|_{\nu=\nu_n}\right\}^{-1}, \quad n=1,2.\dots \tag{19}$$

Полагаем, что $\psi(t)$ является непрерывно дифференцируемой функцией на $[0,\gamma]$. В результате подстановки (18),(19) в уравнение (17) убеждаемся, что (17) выполяется тождественно. Чтобы убедится в этом, сначала следует в (17) поменять порядки интегрирования и суммирования, так как последовательность X_n, $n \geqslant 1$ принадлежит l^2. После этого выполним интегрирование по частям и воспользуемся суммами разрывных рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{int}P_n(\cos\gamma) = e^{-i\frac{t}{2}}\sqrt{2(\cos t-\cos\theta)}, \quad 0<t,\,\theta<\pi. \tag{20}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\cos\left(\nu_n+\frac{1}{2}\right)t\,P_{\nu_n}(\cos\theta) = I(\theta,t)+\left(2(\cos t-\cos\theta)\right)^{-\frac{1}{2}}, 0<\theta<t<\gamma, \tag{21}$$

где

$$I(\theta, t) = -\int_0^\infty \frac{P_{-\frac{1}{2}+ir}(-\cos\gamma)}{P_{-\frac{1}{2}+ir}(\cos\gamma)} \cdot P_{-\frac{1}{2}+ir}(\cos\theta) \cdot \frac{\cosh(tr)}{\cosh(\pi r)}\, dr.$$

Правые части равенств (20),(21) являются производящими функциями для рядов в левых частях. Для получения, в частности, равенства (23) необходимо рассмотреть функцию комплексного переменного z

$$N(z;t,\theta,\gamma) = e^{i(z+\frac{1}{2})t} P_z(\cos\theta) \left[\frac{2Q_z(\cos\theta)}{P_z(\cos\gamma)} - \pi\coth(z\pi)\right] \tag{22}$$

и параметров t, θ из $(0, \pi)$ [1-4], где $P_z(\cos\theta), Q_z(\cos\theta)$ функции Лежандра соответственно первого и второго рода комплексного индекса z. Затем необходимо выполнить контурное интегрирование функции $N(z;t,\theta,\gamma)$ (22) и воспользоваться теоремой о вычетах в полюсах $z = \nu_n$ и $z = n, n = 1, 2, 3...$, за счет обращения в нуль соответственно функций $P_z(\cos\gamma)$ и $\coth(z\pi)$, а также воспользоваться леммой Жордана [12] .

Преобразование функционального уравнения (16) начнем с подстановки вместо функций Лежандра $P_{\nu_n}(cos\theta)$ их интегрального представления Мелера-Дирихле

$$P_{\nu_n}(\cos\theta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\theta \frac{\cos(\nu_n + \frac{1}{2})y}{\sqrt{\cos y - \cos\theta}}\, dy. \tag{23}$$

Воспользовавших равномерной сходимостью ряда в (16) поменяем порядки интегрирования и суммирования. Этим уравнение (16) преобразовывется в интегральное уравнение типа Абеля со слабой особеностью в ядре. Решив это уравнение, в результате получаем искомое интегральное уравнение II рода относительно функции $\psi(y)$ (18):

$$\psi(y) - \int_0^{\theta_0} K(y,t)\,\psi(t)\,dt = \frac{2V}{\pi}\cos\frac{y}{2}, \qquad 0 \le y < \theta_0, \tag{24}$$

$$K(y,t) = K_1(y,t) - K_2(y,t), \tag{25}$$

$$K_1(y,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \varepsilon_n^{(1)}\beta_n \cos\left(\nu_n + \frac{1}{2}\right)\, y\, \cdot\, \cos\left(\nu_n + \frac{1}{2}\right) t, \tag{26}$$

$$K_2(y,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{P_{-\frac{1}{2}+ir}(-\cos\gamma)\cdot\cosh(yr)\cdot\cosh(tr)}{P_{-\frac{1}{2}+ir}(\cos\gamma)\cdot\cosh(\pi r)}\, dr. \tag{27}$$

Здесь введены $\varepsilon_n^{(1)}$ в (15), а β_n в (19).

5. Выводы. Интегральное уравнение (24) имеет единственное решение в $L_2(0,\gamma)$. Действительно, ядро (25) уравнения (24) является непрерывной функцией аргументов y,t, так как ряд (26) и интеграл (27) сходятся равномерно по y,t на сегмента $[0,\gamma]$; правая часть уравнения также непрерывна на

$[0, \gamma]$. Для уравнения (24) справедлива альтернатива Фредгольма. Однородное уравнение, соответствуюшее (24), имеет единственное тривиальное решение.

Уравнение (24) разрешимо как аналитически, так и численно[13-15]. Действительно, правая часть (24) и функция $K_1(y,t)$ (26) являются бесконечно дифференцируемыми функциями по y,t из $[0, \gamma]$, а подынтегральная функция в $K_2(y,t)$ (27) при фиксированных y, t из $[0, \gamma]$ убывает к нулю быстрее экспоненты при $r \to \infty$.

6. Частные случаи постановки задачи. Обобщения.

A). Пусть параметр среды ε для диэлектрического закругления конуса и параметр ε_0 среды для пространства вне этого закругления равны друг другу: $\varepsilon = \varepsilon_0$, В этом спучае интегральное уравнение (24) существенно упрощается, так как в ядре $K(y,t)$ (25) функция $K_1(y,t)$ (26) обращается в нуль в связи с обращением в нуль величин $\varepsilon_n^{(1)}$(15).

B). Рассмотрим такой случай постановки задачи, для которого диэлектрическое закругление конуса выбрано двухслойным, ограниченным по радиусу, а сферический сегмент (с заданным потенциалом V, неравным нулю) размещен на границе слоёв. Такая задача требует модификации применяемого метода, так как в новой системе функциональных уравнений вида (16),(17) новый параметр "малости"(аналог величин $\varepsilon_n^{(1)}$ (15)) будет убывать недостаточно быстро, как $O(1/n)$, при $n \to \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Конторович М.И., Лебедев Н.Н. Об одном методе решения некоторых задач дифракции и родственных ей проблем. // Журн. Тех. Физ. - 1938. - Т.8, **10-11**. - С. 1193-1206.

2. Уфлянд Я.С. О решении одного класса задач электростатики методом парных рядов.//Письма в Журн. Тех. Физ . - 1976. - Т.2, **17**. - С. 794-798.

3. Варяница Л.А., Резуненко В.А. Регуляризация задачи электростатики на бесконечном конусе и двух сферических сегментах.// Вiсник Харкiвського нацiонального унiверситету. Серiя "Математика, прикладна математика i механiка". - 2002. - Т. 542. - С. 59-68.

4. Резуненко В.А., Степуренко О.В. Решение одной осесимметричной задачи электростатики для сферы с круговым отверстием и конуса с шаровым закруглением. // Вiсник Харкiвського нацiонального унiверситету iм. В.Н. Каразiна. Серiя "Математичне моделювання. Iнформацiйнi технологiї. Автоматизованi системи управлiння".-2003.-Т.605.-С.118-125.

5. Радин А.М., Резуненко В.А., Шестопалов В.П. Излучение волн сферой с круговым отверстием // ЖВМ и МФ. - 1977. - Т. 17, **2**.- С. 394-406.

6. Агранович З.С., Марченко В.А., Шестопалов В.П. Дифракция электромагнитных волн на плоских металлических решетках. // Журн. техн. физ . - 1962. - Т. 32,**4**. - С. 381-394.

7. Шестопалов В.П., Литвиненко Л.Н., Масалов С.А., Сологуб В.Г. Дифракция волн на решетках. - Харьков: Изд. ХГУ, - 1973. - 288 с.

8. Шестопалов В.П., Тучкин Ю.А., Поединчук А.Е., Сиренко Ю.К. Новые методы решения прямых и обратных задач теории дифракции. - Харьков: Основа, - 1997. - 284 с.

9. Свищев Ю.В., Тучкин Ю.А. Векторная задача дифракции электромагнитных волн на двух сферических сегментах. ДАН УССР, сер. А. - 1987. - Т. 12. - с. 56-60.

10. Куриляк Д.Б., Назарчук З.Т. Аналітико-числові методи в теорії дифракції хвиль на конічних і клиноподібних поверхнях. - Київ: Наукова Думка, - 2006. - 275 с.

11. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. - М.: -Мир, - 1987. - 312 с.

12. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. -М.: Наука, - 1973. - 736 с.

13. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. -Киев: Наукова Думка, - 1977. - 362 с.

14. Садовничий В.А. Теория операторов.- М.: Высшая школа, - 1999. - 368 с.

15. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. - Киев: Наукова Думка, - 1986. - 543 с.