Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.948 № 1133, 2014, с.95–102

О функциональной модели ограниченного оператора

О. В. Розуменко

Харьковский национальный университет,
пл. Свободы, 4, 61022, Харьков, Украина.
ovrozumenko@gmail.com

Для функциональной модели ограниченного недиссипативного оператора, которая реализуется оператором умножения на независимую переменную в специальном гильбертовом пространстве квадратично интегрируемых с некоторым весом функций, найден конкретный вид соответствующего веса.
Ключевые слова: функциональная модель, недиссипативный оператор.

Розуменко О. В., **Про функціональну модель обмеженого оператору.** Для функціональної моделі обмеженого недисипативного оператора, яка реалізується оператором множення на незалежну змінну в спеціальному гільбертовому просторі квадратично інтегровних з деякою вагою функцій, знайдено конкретний вигляд відповідної ваги.
Ключові слова: функціональна модель, недисипативний оператор.

O. V. Rozumenko, **On functional model of a bounded operator.** For the functional model of a bounded non-dissipative operator that is realized by the operator of multiplication by an independent variable in the special Hilbert space of quadratically integrable functions, the concrete form of the corresponding weight is obtained.
Keywords: functional model, non-dissipative operator.

2000 Mathematics Subject Classification: 47A40.

Функциональные модели уже более полувека играют важную роль в теории операторов и являются естественными аналогами спектральных разложений в несамосопряжённом (неунитарном) случае. Эти модельные реализации изометрий хорошо изучены для диссипативных (сжимающих) операторов [1, 4]. Для операторов, не принадлежащих этому классу (недиссипативных или несжимающих) аналогичные построения были осуществлены в [1, 2]. Данная работа является продолжением исследований, начатых в статье [2], найден конкретный вид веса соответствующего модельного пространства и модельных реализаций.

I. Совокупность гильбертовых пространств H, E, и операторов $A \in [H, H]$, $\varphi \in [H, E]$, $J \in [E, E]$, где J — инволюция, $J = J^* = J^{-1}$, называется [1] локальным узлом

$$\Delta = (A, H, \varphi, E, J), \tag{1}$$

если выполняется условие

$$A - A^* = i\varphi^* J\varphi. \tag{2}$$

Оператор-функция $Z_t \in [H, H]$ аргумента $t \in \mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$ называется полугруппой [4], если

$$Z_0 = I, \quad Z_{t+s} = Z_t \cdot Z_s.$$

Если Z_t непрерывна в равномерной топологии H, то $Z_t = \exp(itA)$, где $A \in [H, H]$ — инфинитезимальный оператор полугруппы Z_t [4] задается формулой

$$iA = s - \lim_{t \to 0} \frac{Z_t - I}{t}.$$

Полугруппа U_t, действующая в пространстве $\mathcal{H}$, называется дилатацией полугруппы Z_t в H [3], если

$$\mathcal{H} \supseteq H; \quad Z_t = P_H U_t|_H \quad (t \geq 0), \tag{3}$$

где P_H — ортопроектор на H. Дилатация U_t называется унитарной [3], если U_t унитарна при каждом $t \in \mathbb{R}_+$. Дилатация U_t в $\mathcal{H}$ полугруппы Z_t в H называется минимальной [3], если

$$\mathcal{H} = span\{U_t h : h \in H, t \in \mathbb{R}\}.$$

Обозначим через $\mathcal{M}$ линейную оболочку вектор-функций вида

$$f(\xi) = (u_+(\xi), h, u_-(\xi)), \tag{4}$$

где $u_\pm(\xi)$ — вектор-функции из E такие, что $\operatorname{supp} u_\pm(\xi) \in \mathbb{R}_\mp$, а $h \in H$. Зададим на $\mathcal{M}$ норму

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{0} \|u_+(\xi)\|_E^2 d\xi + \|h\|^2 + \int_{0}^{\infty} \|u_-(\xi)\|_E^2 d\xi < \infty. \tag{5}$$

Замыкание многообразия $\mathcal{M}$ в этой метрике и образует гильбертово пространство, которое мы обозначим через $\mathcal{H}$. Зададим [1] в пространстве $\mathcal{H}$ полугруппу U_t, –

$$(U_t f)(\xi) = f_t(\xi) = (u_+(t, \xi), h_t, u_-(t, \xi)), \quad (t \geq 0). \tag{6}$$

Вектор-функция $u_-(t,\xi)$ имеет вид:

$$u_-(t,\xi) = P_{\mathbb{R}_+} u_-(\xi + t). \tag{7}$$

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} i\dfrac{d}{d\xi} y_t(\xi) + A y_t(\xi) = \varphi^* J P_{(-t,0)} u_-(\xi+t); & \xi \in (-t,0); \\ y_t(-t) = h; \end{cases} \tag{8}$$

и положим $h_t = y_t(0)$. Наконец,

$$u_+(t,\xi) = u_+(\xi+t) + P_{(-t,0)}\{u_-(\xi+t) - i\varphi y_t(\xi)\}, \tag{9}$$

где $y_t(\xi)$ — решение задачи Коши (8). Введем метрику

$$\langle f(\xi)\rangle_J^2 = \int\limits_{\mathbb{R}_-} \langle Ju_+(\xi), u_+(\xi)\rangle_E \, d\xi + \|h\|^2 + \int\limits_{\mathbb{R}_+} \langle Ju_-(\xi), u_-(\xi)\rangle_E \, d\xi. \tag{10}$$

Полугруппа U_t называется J-унитарной [1], если U_t унитарна в J-метрике (10), то есть

$$U_t^* J U_t = J, \quad U_t J U_t^* = J. \tag{11}$$

Теорема 1. [2] *Полугруппа $Z_t = \exp(itA)$ в H, где A — ограниченный оператор в H, обладает J-унитарной дилатацией U_t (6) в $\mathcal{H}$.*

II. Подпространства D_+ и D_- в $\mathcal{H}$ называются [6] уходящим и приходящим подпространствами группы U_t в $\mathcal{H}$ в смысле П. Лакса и Р. Филлипса, если $D_- \perp D_+$ и

$$\begin{array}{ll} U_t D_+ \subset D_+ & (\forall t \in \mathbb{R}_+); \\ U_{-t} D_- \subset D_- & (\forall t \in \mathbb{R}_+). \end{array} \tag{12}$$

Отметим, что подпространства

$$D_+ = \{f(\xi) = (u_+(\xi), 0, 0) \in \mathcal{H}\}; \quad D_- = \{f(\xi) = (0, 0, u_-(\xi)) \in \mathcal{H}\}$$

являются уходящим и приходящим подпространствами для U_t, кроме того имеет место

$$\mathcal{H} = D_+ \oplus H \oplus D_-. \tag{13}$$

Зададим в гильбертовом пространстве

$$L^2_{\mathbb{R}}(E) = \left\{ g(\xi) \in E : \xi \in \mathbb{R} : \int\limits_{-\infty}^{\infty} \|g(\xi)\|_E^2 d\xi < \infty \right\} \tag{14}$$

свободную [5] унитарную группу сдвигов

$$(V_t g)(\xi) = g(\xi + t). \tag{15}$$

Определим [5] волновые операторы $W_{\mp}$,

$$W_{\mp} = s - \lim_{t\to\pm\infty} U_t P_{D_{\mp}} V_{-t}. \tag{16}$$

Как известно [3], для равномерно непрерывной полугруппы U_t имеет место оценка $\|U_t\| \leq e^{\beta t}$, где $\beta \geq 0$.

Определим гильбертово пространство

$$L^2_{\mathbb{R}}\left(E,\alpha^-\right) = \left\{ g(\xi)\in E : \xi\in\mathbb{R};\ \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-2\alpha^-\xi}\left\|g(\xi)\right\|^2_E d\xi + \int\limits_{0}^{\infty}\|g(\xi)\|^2_E d\xi < \infty \right\}, \tag{17_-}$$

где $\alpha^- > \beta$. Если $\alpha^- > \beta > 0$, то для функций $g(\xi)$ из $L^2_{\mathbb{R}}\left(E,\alpha^-\right)$ предел $W_-g(\xi)$ (16) существует [2].

Предел $W_+g(\xi)$ существует [2], если $g(\xi)\in L^2_{\mathbb{R}}(E,\alpha^+)$, где

$$L^2_{\mathbb{R}}\left(E,\alpha^+\right) = \left\{ g(\xi)\in E : \xi\in\mathbb{R};\ \int\limits_{0}^{\infty} e^{-2\alpha^+\xi}\left\|g(\xi)\right\|^2_E d\xi + \int\limits_{-\infty}^{0}\|g(\xi)\|^2_E d\xi < \infty \right\}, \tag{17_+}$$

$\alpha^+ > \beta' > 0$, причем $\|U_{-t}\| \leq e^{\beta' t}$.

Оператор рассеяния S определим [5, 6] следующим образом:

$$S = W_+^* W_- \quad \left(L^2_{\mathbb{R}}\left(E,\alpha^-\right) \to L^2_{\mathbb{R}}\left(E,\alpha^+\right)\right). \tag{18}$$

Рассмотрим отображение B_p из $L^2_{\mathbb{R}}\left(E,\alpha^-\right) + L^2_{\mathbb{R}}\left(E,\alpha^+\right)$ в пространство $\mathcal{H}$, задаваемое формулой

$$B_p f = B_p \begin{pmatrix} f_- \\ f_+ \end{pmatrix} = W_- f_- + W_+ f_+, \tag{19}$$

где $f_+ \in L^2_{\mathbb{R}}\left(E,\alpha^+\right)$, $f_- \in L^2_{\mathbb{R}}\left(E,\alpha^-\right)$. Прообразы подпространств D_- и D_+ (12) при отображении B_p (19) имеют вид

$$\widehat{D}_-(E) = \begin{pmatrix} L^2_{\mathbb{R}_+}(E) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{D}_+(E) = \begin{pmatrix} 0 \\ L^2_{\mathbb{R}_-}(E) \end{pmatrix}, \tag{20}$$

в силу (16). Очевидно, что

$$\|B_p f\|^2_{\mathcal{H}} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\langle \begin{bmatrix} W_-^*W_- & W_-^*W_+ \\ W_+^*W_- & W_+^*W_+ \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_-(\xi) \\ f_+(\xi) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_-(\xi) \\ f_+(\xi) \end{pmatrix} \right\rangle_{E\oplus E} d\xi, \tag{20}$$

поэтому естественно определить гильбертово пространство

$$\begin{aligned} L^2_\alpha(W) = \Bigg\{ f(\xi) = \begin{pmatrix} f_-(\xi) \\ f_+(\xi) \end{pmatrix} : f_-(\xi) \in L^2_{\mathbb{R}}\left(E,\alpha^-\right), \\ f_+(\xi)\in L^2_{\mathbb{R}}(E,\alpha^+);\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \langle W f(\xi), f(\xi)\rangle_{E\oplus E} d\xi < \infty \Bigg\}, \end{aligned} \tag{21}$$

где W, в силу (20), имеет вид

$$W = \begin{bmatrix} W_-^* W_- & W_-^* W_+ \\ W_+^* W_- & W_+^* W_+ \end{bmatrix}. \tag{22}$$

В формуле (22) оператор W можно записать в виде

$$W = \begin{bmatrix} I & S^* \\ S & I \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} W_-^* Q^- W_- - Q_E^- & W_-^* Q^- W_+ - S^* Q_E^- \\ W_+^* Q^- W_- - Q_E^- S & W_+^* Q^- W_+ - Q_E^-, \end{bmatrix}, \tag{23}$$

где $2Q^{\pm} = I \pm J$ — ортопроекторы в E. В случае сжатия Z_t ($Q^- = Q_E^- = 0$) оператор W имеет традиционный [1] вид

$$W = \begin{bmatrix} I & S^* \\ S & I \end{bmatrix}.$$

Дилатация U_t в пространстве $L^2_\alpha(W)$ (21) действует трансляционным образом [2]:

$$\widehat{U}_t f(\xi) = f(\xi + t). \tag{24}$$

Очевидно, что в силу структуры пространства дилатации $\mathcal{H}$ и вида $\widehat{D}_-(E)$, $\widehat{D}_+(E)$ (19) в пространстве $L^2_\alpha(W)$ (21) исходное пространство H изоморфно

$$\widehat{H}_p = L^2_\alpha(W) \ominus \begin{pmatrix} L^2_{\mathbb{R}_+}(E) \\ L^2_{\mathbb{R}_-}(E) \end{pmatrix}, \tag{25}$$

а действие полугруппы Z_t преобразуется в полугруппу сдвигов

$$\widehat{Z}_t f(\xi) = P_{\widehat{H}_p} f(\xi + t), \tag{26}$$

где $f(\xi) \in \widehat{H}_p$ (25).

Теорема 2. [2] *Минимальная J-унитарная дилатация U_t (6) в $\mathcal{H}$ полугруппы $Z_t = \exp\{itA\}$ в H, где A — вполне-несамосопряжённый оператор, унитарно эквивалентна группе трансляций $\widehat{U}_t$ (24) в пространстве $L^2_\alpha(W)$ (21), а полугруппа Z_t эквивалентна, соответственно, полугруппе сдвигов $\widehat{Z}_t$ (26) в пространстве $\widehat{H}_p$ (25).*

III. Рассмотрим преобразование Фурье

$$\tilde{f}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\xi} f(\xi) d\xi \tag{27}$$

Справедлива следующая теорема [2].

Теорема 3. *Преобразование Фурье (27) действие оператора W (23) переводит в оператор умножения на оператор-функцию $\widetilde{W}(\lambda)$:*

$$\widetilde{Wg}(\xi) = \widetilde{W}(\lambda)\tilde{g}(\lambda), \tag{28}$$

где $g(\xi) \in L^2_\alpha(W)$, $\tilde{g}(\lambda) \in H^2_{(0,\alpha^-)}(E) + H^2_{(-\alpha^+,0)}(E)$. *Оператор-функция* $\widetilde{W}(\lambda)$ *при этом имеет вид*

$$\widetilde{W}(\lambda) = \begin{bmatrix} I & S^*_\Delta(\lambda) \\ S_\Delta(\lambda) & I \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} \widetilde{W}_{11} & \widetilde{W}_{12} \\ \widetilde{W}_{21} & \widetilde{W}_{22} \end{bmatrix}, \tag{29}$$

где

$$\widetilde{W}_{11} = \left\{S^*_\Delta(\lambda)Q^-_E P_+ S_\Delta(\lambda) - Q^-_E\right\} P_+;$$

$$\widetilde{W}_{12} = \left\{S^*_\Delta(\lambda)P_- Q^-_E - Q^-_E P_- S^*_\Delta(\lambda)\right\} J_E;$$

$$\widetilde{W}_{21} = J_E\left\{Q^-_E P_- S_\Delta(\lambda) - S_\Delta(\lambda)P_- Q^-_E\right\};$$

$$\widetilde{W}_{22} = J_E\left\{S_\Delta(\lambda)Q^-_E P_- S^*_\Delta(\lambda) - Q^-_E\right\} J_E P_-;$$

$S_\Delta(\lambda)$ — *характеристическая функция узла* Δ, P_+ *и* P_- — *ортопроекторы на подпространства Харди, отвечающие верхней и нижней полуплоскости относительно соответствующей полосы, и, наконец,* $Q^-_E = \dfrac{1}{2}(I - J_E)$ — *ортопроектор.*

Очевидно, что преобразование Фурье (27) отображает гильбертово пространство $L^2_\alpha(W)$ (21) в пространство

$$H^2_\alpha(W) = \left\{ f(\lambda) = \begin{pmatrix} f_-(\lambda) \\ f_+(\lambda) \end{pmatrix} : f_-(\lambda) \in H^2_{(0,\alpha^-)}(E), \right.$$
$$\left. f_+(\lambda) \in H^2_{(-\alpha^+,0)}(E); \int_0^{2\pi} \langle \widetilde{W}(\lambda) f(\lambda), f(\lambda)\rangle d\lambda < \infty \right\}, \tag{30}$$

где $\widetilde{W}(\lambda)$ имеет вид (29). Дилатация U_t в пространстве $H^2_\alpha(W)$ (30) будет иметь вид

$$\widetilde{U}_t f(\lambda) = e^{i\lambda t} f(\lambda). \tag{31}$$

Пространство $\widehat{H}_p$ (25) в этом случае будет иметь вид

$$\widetilde{H}_p = H^2_\alpha(W) \ominus \begin{bmatrix} H^2_-(E) \\ H^2_+(E) \end{bmatrix}. \tag{32}$$

Наконец, полугруппа Z_t и оператор A в модельном пространстве $\widetilde{H}_p$ (32) будут задаваться формулами

$$\widetilde{Z}_t f(\lambda) = P_{\widetilde{H}_p} e^{i\lambda t} f(\lambda); \quad \widetilde{A} f(\lambda) = P_{\widetilde{H}_p} \lambda f(\lambda). \tag{33}$$

Таким образом, мы приходим к следующей теореме.

Теорема 4. [2] *Минимальная* J*-унитарная дилатация* U_t *полугруппы* $Z_t = \exp(itA)$, *где* A *вполне несамосопряжен, унитарно эквивалентна функциональной модели* $\widetilde{U}_t$ *(31) в пространстве* $H^2_\alpha(W)$ *(30), а* Z_t *эквивалентна*

$\widetilde{Z}_t$ (33) в пространстве $\widetilde{H}_p$ (32) и, наконец, A эквивалентен $\widetilde{A}$ (33), соответственно, в $\widetilde{H}_p$ (32), где $S_\Delta(\lambda) = I - i\varphi(A - \lambda I)^{-1}\varphi^* J$ — характеристическая функция узла Δ.

IV. Рассмотрим случай $\dim E = 2$, $J_E = J_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Пусть

$$S_\Delta(\lambda) = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$T_1 = \begin{pmatrix} s_{12} & 0 \\ 0 & s_{22} \end{pmatrix}; \quad T_2 = \begin{pmatrix} s_{21} & 0 \\ 0 & s_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned}
\widetilde{W}_{11} &= T_2^* P_+ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} T_2 P_+ - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_- \end{pmatrix}; \\
\widetilde{W}_{12} &= P_- \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} T_1^* - T_1^* \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P_-; \\
\widetilde{W}_{21} &= T_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P_- - P_- \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \\
\widetilde{W}_{22} &= T_1 P_- \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} T_2 P_+ - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_+ \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{34}$$

Следовательно, в рассматриваемом случае найден явный вид элементов $\widetilde{W}_{ik}$. Использование теоремы 4 приводит к утверждению.

Теорема 5. *При $\dim E = 2$ и $J_E = J_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ оператор-функция $\widetilde{W}(\lambda)$ имеет вид (29), W_{ik} задаются формулами (34);*

$$S_\Delta(\lambda) = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$$

— характеристическая функция узла Δ,

$$T_1 = \begin{pmatrix} s_{12} & 0 \\ 0 & s_{22} \end{pmatrix}; \quad T_2 = \begin{pmatrix} s_{21} & 0 \\ 0 & s_{22} \end{pmatrix};$$

P_+ и P_- — ортопроекторы на подпространства Харди, отвечающие верхней и нижней полуплоскости относительно соответствующей полосы, и, наконец, $Q_E^- = \dfrac{1}{2}(I - J_E)$ — ортопроектор. Модельные реализации A и Z_t в этом случае имеют вид (33).

ЛИТЕРАТУРА

1. Золотарев В. А. Аналитические методы спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов. Харьков: Изд. ХНУ, 2003. — 342 с.

2. Золотарев В. А., Розуменко О. В. Функциональная модель Павлова ограниченного несамосопряженного оператора. // Харьков: Вісник Харківського національного університету, серія «Математика, прикладна математика і механіка», 2006. — **749**. — С. 30–49.

3. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. — 464 с.

4. Рисс Ф., Надь Б. С. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979. — 587 с.

5. Адамян В. М., Аров Д. З. Об унитарных сцеплениях полуунитарных операторов. // Кишинев: Математические исследования, 1966. — Т. 1, вып. 2. — С. 3 – 64.

6. Лакс П. Д., Филлипс Р. С. Теория рассеяния. М: Мир, 1971. — 312 с.

Статья получена: 8.05.2014; окончательный вариант: 17.10.2014; принята: 22.10.2014.