Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.977.14 № 1133, 2014, с.140–155

Несколько подходов к определению границ изменения возмущения в задаче глобального робастного синтеза

Т. В. Ревина

*Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина
пл.Свободы 4, 61022, Харьков, Украина
t.revina@karazin.ua*

Рассмотрена задача глобального робастного позиционного синтеза ограниченного управления системой с неизвестными ограниченными возмущениями. На основе метода функции управляемости В. И. Коробова предложены различные подходы к нахождению границ изменения возмущения. Построено независящее от возмущения управление, которое переводит произвольную начальную точку в начало координат за конечное время, для которого приведена оценка сверху.
Ключевые слова: задача робастного синтеза, позиционное ограниченное управление, неизвестное ограниченное возмущение.

Ревіна Т. В., **Кілька підходів до визначення меж зміни збурення в задачі глобального робастного синтезу.** Розглянуто задачу глобального робастного позиційного синтезу обмеженого керування системою з невідомими обмеженими збуреннями. На основі методу функції керованості В. І. Коробова запропоновано різноманітні підходи до знаходження меж зміни збурення. Побудоване незалежне від збурення керування, яке переводить довільну початкову точку у початок координат за скінчений час, для якого наведена оцінка зверху.
Ключові слова: задача робастного синтезу, позиційне обмежене керування, невідоме обмежене збурення.

T. V. Revina, **Several approaches to delimiting a perturbation in the global robust feedback synthesis problem.** The paper deals with the problem of the global robust feedback synthesis of a bounded control for a system with an unknown bounded perturbations. On the basis of V. I. Korobov's controllability function method we suggest several approaches to delimiting a perturbation. We provide a positional control which is independent of the perturbation and steers an arbitrary initial point to the origin in a finite time; an estimate from above for the time of motion is given.
Keywords: robust feedback synthesis problem, positional bounded control, unknown bounded perturbation.

2000 Mathematics Subject Classification: 93B50, 93C73, 93C10, 95B52, 93B35.

1. Постановка задачи

В этой работе предложено конструктивное решение задачи глобального робастного позиционного синтеза ограниченного управления для одного специального класса систем. Предлагаются разные подходы к определению границы изменения возмущения. Получена оценка сверху на время движения из произвольной начальной точки в начало координат.

Вначале введем понятие локального позиционного синтеза ограниченного управления. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(t, x, u), \tag{1}$$

где $x \in Q \subset \mathbb{R}^n$, $u \in \Omega \subset \mathbb{R}^r$, причем Ω таково, что $0 \in \operatorname{int} \Omega$.

Под *локальным позиционным синтезом ограниченного управления* будем понимать нахождение такого управления $u = u(x) \in \Omega$, что траектория $x(t)$ замкнутой системы $\dot{x} = f(t, x, u(x))$, выходящая из произвольной начальной точки $x(0) = x_0 \in Q \subset \mathbb{R}^n$, оканчивается в начале координат в некоторый конечный момент времени $T(x_0) < \infty$, т. е. $\lim\limits_{t \to T(x_0)} x(t) = 0$. При этом если $Q = \mathbb{R}^n$, то синтез называется *глобальным*.

Для решения поставленной задачи в 1979 году Коробовым В. И. был предложен метод функции управляемости [2, 3], развитый в совместных работах Коробова В. И., Скляра Г. М. [7] и других авторов (например, [1]). К работам Коробова В. И. примыкают работы Polyakov и др. [18], Rodoumta и др. [19]. Приложение метода к задачам управления хаосом можно найти в работе Bowong и др. [12]. Другие идеи для близких постановок задач развиваются в работах [13, 14, 16]. В работе [4] метод функции управляемости был обобщен на случай систем с возмущением вида

$$\dot{x} = Ax + b(u + v), \quad |u| \le d, \quad |v| \le \gamma < d,$$

где v – неизвестное возмущение.

В работе в [6] была поставлена следующая задача: для систем вида

$$\dot{x} = (A + pD)x + bu, \quad -d_1 \le p \le d_2, \ (d_1, d_2 > 0)$$

требуется построить такое управление $u = u(x)$, $|u| \le 1$, что траектория $x(t, x_0)$ системы $\dot{x} = (A + pD)x + bu(x)$, выходящая из произвольной точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ в момент времени $t_0 = 0$, попадает в точку $x_1 = 0$ за конечное время $T(x_0)$ при любом $p \in [-d_1; d_2]$. Эту задачу мы будем называть задачей робастного позиционного синтеза (точное определение будет дано ниже). Далее, в работе [9] решена задача робастного позиционного синтеза для конкретных колебательных систем второго и четвертого порядков.

В данной работе мы рассматриваем задачу глобального робастного позиционного синтеза ограниченного управления для системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (1 + p(t, x))x_2, \\ \dot{x}_i = (1 + r_i p(t, x))x_{i+1}, \ i = 2, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n = u, \end{cases} \tag{2}$$

где $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, u – скалярное управление, удовлетворяющее ограничению $|u| \leq 1$, $r_2, \dots r_{n-1}$ – некоторые числа, $p(t,x)$ – *неизвестное* ограниченное возмущение, удовлетворяющее ограничению $|p(t,x)| \leq d$.

Для числа d через $\mathcal{P}_d$ обозначим класс функций $p(t,x): [0;+\infty)\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $p(t,x)$ непрерывно по переменной t;

2) в каждой области

$$K_1(t_1,\rho_2) = \{(t,x):\ 0 \leq t \leq t_1,\ \|x\| \leq \rho_2\},\ \rho_2 > 0,\ t_1 > 0$$

функция $p(t,x)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|p(t,x'') - p(t,x')| \leq \ell_1(t_1,\rho_2)\|x'' - x'\|;$$

3) для всех $(t,x) \in [0;+\infty) \times \mathbb{R}^n$ функция $p(t,x)$ удовлетворяет ограничению $|p(t,x)| \leq d$.

Под *d-глобальным робастным позиционным синтезом ограниченного управления* будем понимать нахождение такого управления $u = u(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, что:

1) в каждой области $K_2(\rho_1,\rho_2) = \{x:\ 0 < \rho_1 \leq \|x\| \leq \rho_2\}$, $0 < \rho_1 < \rho_2$ функция $u(x)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|u(x'') - u(x')| \leq \ell_2(\rho_1,\rho_2)\|x'' - x'\|;$$

2) для всех $x \in \mathbb{R}^n$ выполнено условие $|u(x)| \leq 1$;

3) для всех $p(t,x) \in \mathcal{P}_d$ траектория $x(t)$ замкнутой системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (1 + p(t,x))x_2, \\ \dot{x}_i = (1 + r_i p(t,x))x_{i+1},\ i = 2,\dots,n-1, \\ \dot{x}_n = u(x), \end{cases}$$

выходящая из произвольной начальной точки $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, оканчивается в начале координат в некоторый конечный момент времени $T(x_0,p) < \infty$, т. е. $\lim\limits_{t\to T(x_0,p)} x(t) = 0$.

Наша цель – для заданных $r_2,\dots,r_{n-1}$ получить оценку для d, при котором задача глобального робастного позиционного синтеза имеет решение. Заметим, что при $p(t,x) = -1$ в системе (2) первая координата не управляема, т. е. не при всех d задача разрешима.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 представлены некоторые результаты метода функции управляемости, необходимые в дальнейшем. В разделе 3 содержатся основные результаты работы (теорема 2). В разделе 4 приведен пример.

2. Метод функции управляемости

Опишем один из возможных подходов к решению задачи глобального позиционного синтеза для канонической системы [5, 7]:

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = x_3,\ \ldots,\ \dot{x}_{n-1} = x_n,\ \dot{x}_n = u, \tag{3}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, u — скалярное управление, удовлетворяющее ограничению $|u| \le 1$. Эту систему можно записать в виде $\dot{x} = A_0 x + b_0 u$, где

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ & & \ldots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что при $p(t,x) = 0$ система (2) полностью управляема и совпадает с системой (3). Пусть матрица F^{-1} имеет вид

$$F^{-1} = \int\limits_0^1 (1-t) e^{-A_0 t} b_0 b_0^* e^{-A_0^* t} dt =$$

$$= \left(\frac{(-1)^{2n-i-j}}{(n-i)!(n-j)!(2n-i-j+1)(2n-i-j+2)} \right)_{i,j=1}^n.$$

В работе [10] указан явный вид элементов f_{ij} матрицы F. Обозначим

$$D(\Theta) = diag \left(\Theta^{-\frac{2n-2i+1}{2}} \right)_{i=1}^n.$$

Теорема 1 (Коробов, Скляр [7]) *Определим функцию управляемости $\Theta = \Theta(x)$ как единственное положительное решение уравнения*

$$2a_0\Theta = (D(\Theta) F D(\Theta) x, x), \quad x \neq 0, \quad \Theta(0) = 0, \tag{4}$$

где постоянная a_0 выбирается согласно неравенству

$$0 < a_0 \le \frac{2}{f_{nn}}. \tag{5}$$

Тогда управление вида

$$u(x) = -\frac{1}{2}\, b_0^* D(\Theta(x)) F D(\Theta(x)) x \tag{6}$$

решает для системы (3) задачу глобального позиционного синтеза непрерывного управления, удовлетворяющего ограничению $|u| \le 1$. При этом функция управляемости $\Theta(x_0)$ является временем движения из произвольной точки x_0 в начало координат.

3. Основные результаты

Перепишем систему (2) в матричном виде

$$\dot{x} = (A_0 + p(t,x)R)x + b_0 u,$$

где матрицы A_0 и b_0 введены ранее, а матрица R имеет вид

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_2 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & r_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $y(\Theta, x) = D(\Theta)x$. Тогда уравнение (4) принимает вид

$$2a_0\Theta = (Fy(\Theta,x), y(\Theta,x)). \tag{7}$$

Выберем постоянную a_0, удовлетворяющую неравенству (5). Рассмотрим замкнутую систему

$$\dot{x} = (A_0 + p(t,x)R)x + b_0 u(x), \tag{8}$$

где $u(x)$ задается формулой (6), $\Theta(x(t))$ – единственное положительное решение уравнения (7). Обозначим через $x(t)$ траекторию системы (8) и найдем производную в силу системы $\dot{\Theta} = \frac{d}{dt}\Theta(x(t))$. Из уравнения (7) имеем

$$2a_0\dot{\Theta} = (F\dot{y}(\Theta,x), y(\Theta,x)) + (Fy(\Theta,x), \dot{y}(\Theta,x)). \tag{9}$$

Найдем $\dot{y}(\Theta,x)$. Обозначим $H = diag\left(-\frac{2n-2i+1}{2}\right)_{i=1}^{n}$ тогда $\dfrac{d}{d\Theta}D(\Theta) = \dfrac{1}{\Theta}HD(\Theta)$, откуда

$$\dot{y}(\Theta,x) = \dot{D}(\Theta)x + D(\Theta)\dot{x} = \frac{\dot{\Theta}}{\Theta}Hy(\Theta,x) + D(\Theta)A_0D^{-1}(\Theta)y(\Theta,x)+$$

$$+p(t,x)D(\Theta)RD^{-1}(\Theta)y(\Theta,x) - \frac{1}{2}D(\Theta)b_0b_0^*D(\Theta)Fy(\Theta,x).$$

Обозначим

$$F^1 = F - FH - HF = ((2n-i-j+2)f_{ij})_{i,j=1}^{n} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2nf_{11} & (2n-1)f_{12} & \dots & (n+1)f_{1n} \\ (2n-1)f_{21} & (2n-2)f_{22} & \dots & nf_{2n} \\ & & \dots & \\ (n+1)f_{1n} & nf_{2n} & \dots & 2f_{nn} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что F^1 – положительно определенная матрица [5]. Обозначим

$$S(\Theta) = \Theta(FD(\Theta)RD^{-1}(\Theta) + D^{-1}(\Theta)R^*D(\Theta)F).$$

Нетрудно установить тождество [5] $D(\Theta)RD^{-1}(\Theta) = \Theta^{-1}R$, откуда

$$S(\Theta) = S = FR + R^*F.$$

В дальнейшем мы существенно пользуемся тем, что матрица S не зависит от Θ. Укажем явный вид матрицы S :

$$\begin{pmatrix} 0 & f_{11} & f_{12}r_2 & \dots & f_{1n-1}r_{n-1} \\ f_{11} & 2f_{12} & f_{13} + f_{22}r_2 & \dots & f_{1n} + f_{2n-1}r_{n-1} \\ f_{12}r_2 & f_{13} + f_{22}r_2 & 2f_{23}r_2 & \dots & f_{2n}r_2 + f_{3n-1}r_{n-1} \\ & & \dots & & \\ f_{1n-1}r_{n-1} & f_{1n} + f_{2n-1}r_{n-1} & f_{2n}r_2 + f_{3n-1}r_{n-1} & \dots & 2f_{n-1n}r_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Можно доказать тождества [5]

$$D(\Theta)A_0D^{-1}(\Theta) = \frac{1}{\Theta}A_0, \quad D(\Theta)b_0 = \Theta^{-1/2}b_0, \quad FA_0 + A_0^*F - Fb_0b_0^*F = -F^1,$$

пользуясь которыми, из равенства (9) получаем

$$\dot{\Theta}(2a_0 - \frac{1}{\Theta}((FH + HF)y(\Theta, x), y(\Theta, x))) = \frac{1}{\Theta}((-F^1 + p(t, x)S)y(\Theta, x), y(\Theta, x)).$$

Принимая во внимание уравнение (7), получаем, что производная функции управляемости в силу системы (8) имеет вид

$$\dot{\Theta} = \frac{(-F^1 + p(t, x)S)y(\Theta, x), y(\Theta, x))}{(F^1y(\Theta, x), y(\Theta, x))}. \tag{10}$$

Введем обозначения:

• m_{ij} – элементы матрицы M;
• M^* – матрица, транспонированная к матрице M;
• $\sigma(M)$ – спектр матрицы M;
• $\rho(M) = max\{|\lambda|,\ \lambda \in \sigma(M)\}$ – спектральный радиус матрицы M;
• $\lambda_{min}(M) = \min\{\lambda :\ \lambda \in \sigma(M)\}$, где M – симметричная матрица;
• $\lambda_{max}(M) = \max\{\lambda :\ \lambda \in \sigma(M)\}$, где M – симметричная матрица;
• $||M||_\infty = \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |m_{ij}|$ – матричная норма;
• $|M| = (|m_{ij}|)_{i,j=1}^n$ – абсолютное значение матрицы M, т. е. матрица, состоящая из модулей элементов матрицы M;
• $||x||_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}$ – евклидова векторная норма;
• $||S||_2 = max\{\sqrt{\lambda} :\ \lambda \in \sigma(S^*S)\}$ – евклидова матричная норма;
• выражение $M < 0$ означает, что матрица M отрицательно определена;
• $M_1 < M_2$ означает, что $M_1 - M_2 < 0$.

В дальнейшем мы также используем следующие обозначения:

• $\lambda_i(F^1) \in \sigma(F^1)$ – собственные значения матрицы F^1;
• $\mathcal{Q} = \int\limits_0^\infty e^{2(\gamma_1-1)F^1t}dt$;
• $Z(\gamma_1) = |U^*| \cdot |S| \cdot |U|$, где U – ортогональная матрица, столбцами которой являются собственные векторы матрицы $((\gamma_1 - 1)F^1)$.

Теорема 2 *Пусть* $0 < \gamma_1 < 1$ *и выполнено одно из следующих условий:*

$$1.\ d_0 = \frac{(1-\gamma_1)\lambda_{min}(F^1)}{\rho(S)}, \tag{11}$$

$$2.\ d_0 = \frac{1}{2||\mathcal{Q}||_\infty ||S||_\infty}, \tag{12}$$

$$3.\ d_0 = (1-\gamma_1) \min_{1\le i\le n} \frac{\lambda_i(F^1)}{\sum\limits_{j=1}^{n} z_{ij}(\gamma_1)}, \tag{13}$$

$$4.\ d_0 = \frac{1-\gamma_1}{\rho(|(F^1)^{-1}|\cdot|S|)}. \tag{14}$$

Тогда для всех d *таких, что* $0 \le d < d_0$, *управление, задаваемое формулой (6), где функция управляемости* $\Theta(x)$ *есть единственное положительное решение уравнения (4) при* a_0, *удовлетворяющем неравенству (5), решает задачу* d*-глобального робастного позиционного синтеза. При этом траектория системы (8), выходящая из произвольной начальной точки* $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, *оканчивается в точке* $x_1(T) = 0$ *в некоторый конечный момент времени* $T = T(x_0, d)$, *такой, что*

$$T(x_0, d) \le \Theta(x_0)/\gamma_1. \tag{15}$$

Доказательство. Пусть d_0 задается одной из формул (11)-(14). Рассмотрим семейство симметричных матриц $K(p) = (-1+\gamma_1)F^1 + pS$. Докажем, что из устойчивости этого семейства при всех $|p| \le d < d_0$ вытекает, что

$$\dot{\Theta} < -\gamma_1.$$

Пусть семейство $K(p)$ устойчиво при всех $|p| \le d < d_0$, то есть $K(p) < 0$. Тогда $-F^1 + pS < -\gamma_1 F^1$. Тогда для всех $y(\Theta, x)$ и для всех $|p(t,x)| \le d < d_0$ выполнено

$$((-F^1 + p(t,x)S)y(\Theta,x), y(\Theta,x)) < -\gamma_1(F^1 y(\Theta,x), y(\Theta,x)). \tag{16}$$

Поэтому, подставляя (16) в (10), в силу положительной определенности матрицы F^1 [5] получаем $\dot{\Theta} < -\gamma_1$. Дальнейший ход доказательства аналогичен доказательству для канонической системы [5][Теорема 1.2]

Теперь в каждом из случаев (11)-(14) докажем устойчивость семейства $K(p)$ при всех $|p| \le d < d_0$.

1. Условие (11). Воспользуемся утверждением

Лемма 1 (Хорн и др. [11], глава 6.3) *Пусть* K *– нормальная матрица (т. е.* $KK^* = K^*K$*) с собственными значениями* $\hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_n$ *и* E *– произвольная матрица. Если* λ *– собственное значение матрицы* $K + E$, *то найдется* $\hat{\lambda}_i$, *для которого*

$$|\lambda - \hat{\lambda}_i| \le ||E||_2. \tag{17}$$

Обозначим $K = (-1+\gamma_1)F^1$ (это симметрическая матрица, следовательно, она является нормальной) и $E = p\cdot S$. Для этих матриц мы можем воспользоваться леммой 1. Пусть $\lambda(p) \in \sigma(K(p))$ – собственное значение матрицы $K(p)$. Условие (17) означает, что существует такое собственное значение $\hat{\lambda}_i$ матрицы K, что

$$|\lambda(p) - \hat{\lambda}_i| \leq d \cdot ||S||_2 < d_0 \cdot ||S||_2. \tag{18}$$

При этом $\hat{\lambda}_i$ могут совпадать при разных $\lambda(p)$.

Заметим, что $\hat{\lambda}_i = (-1+\gamma_1)\lambda_i(F^1)$. Поскольку $S = S^*$, то $||S||_2 = \rho(S)$. Из условия (18) вытекает, что

$$\lambda(p) < (-1+\gamma_1)\lambda_i(F^1) + d_0\rho(S).$$

Подставим d_0 из условия (11). Тогда

$$\lambda(p) < (-1+\gamma_1)\lambda_i(F^1) + (1-\gamma_1)\lambda_{min}(F^1) = (1-\gamma_1)(-\lambda_i(F^1) + \lambda_{min}(F^1)) \leq 0,$$

следовательно, при выполнении условия (11) при $0 < \gamma_1 < 1$ семейство матриц $K(p)$ устойчиво при всех $|p| \leq d < d_0$, то есть все собственные значения матричного семейства $K(p)$ отрицательны.

2. Условие (12). Воспользуемся результатами работы [21], в которой используется понятие интервальной матрицы.

Определение 1 *Пусть A^m – матрица с элементами a_{ij}^m, A^M – матрица с элементами a_{ij}^M. Интервальной матрицей $[A^m, A^M]$ называется семейство матриц вида $[A^m, A^M] = \{A: \ a_{ij}^m \leq a_{ij} \leq a_{ij}^M, \ 1 = i, j \leq n\}$. Обозначим $A_c = (A^m + A^M)/2$.*

Лемма 2 (Wang и др. [21]) *Пусть для интервальной матрицы $[A^m, A^M]$ выполнено:*
1) матрицы A^m и A^M являются симметричными;
2) матрица A_c устойчива;
3) $||A^M - A^m||_\infty < 1/||\mathcal{Q}||_\infty$, где $\mathcal{Q}$ – решение матричного уравнения Ляпунова $\mathcal{Q}A_c + A_c\mathcal{Q} = -I$.

Тогда интервальная матрица $[A^m, A^M]$ устойчива (т. е. каждая матрица семейства является устойчивой).

Примем $A^m = (-1+\gamma_1)F^1 - d|S|$, $\quad A^M = (-1+\gamma_1)F^1 + d|S|$, тогда $K(p) \subset [A^m, A^M]$. Заметим, что матрица $A_c = K(0) = (-1+\gamma_1)F^1$ при $0<\gamma_1<1$ является устойчивой (напомним, что матрица F^1 является положительно определенной [5]). Тогда матричное уравнение Ляпунова $\mathcal{Q}A_c + A_c\mathcal{Q} = -I$ имеет единственное решение, которое задается равенством $\mathcal{Q} = \int\limits_0^\infty e^{2A_c t}dt$. Вычислим

$$||A^M - A^m||_\infty = ||2d \cdot |S| \ ||_\infty < 2d_0 \cdot ||S||_\infty.$$

Подставим d_0 из условия (12). Тогда для всех $|p| \le d < d_0$ выполнено

$$||A^M - A^m||_\infty < 2d_0 \cdot ||S||_\infty = 1/||\mathcal{Q}||_\infty.$$

Следовательно, при выполнении условия (12) выполнены условия леммы 2, то есть семейство матриц $[A^m, A^M]$ устойчиво, а значит и $K(p)$ устойчиво при всех $|p| \le d < d_0$.

3. Условие (13). В работе [15] рассматривается интервальная матрица вида $A_I = A_c + \delta A$, причем элементы матрицы δA удовлетворяют условию $|\delta a_{ij}| \le \triangle a_{ij}$. Обозначим через $\triangle A$ матрицу с элементами $\triangle a_{ij}$.

Лемма 3 (Juang и др. [17], Franze и др. [15]) *Пусть A_c диагонализируема, $\sigma(A_c) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, U – матрица, столбцами которой являются собственные векторы матрицы A_c. Обозначим $Z = |U^{-1}| \cdot \triangle A \cdot |U|$. Тогда собственные значения интервальной матрицы $A_c + \delta A$ принадлежат объединению шаров с центрами λ_i и радиусами $\rho_i^r = \sum\limits_{j=1}^n z_{ij}$, $i = 1, \ldots, n$ (сумма элементов строки матрицы Z), а также объединению шаров с центрами λ_i и радиусами $\rho_i^c = \sum\limits_{j=1}^n z_{ji}, i = 1, \ldots, n$ (сумма элементов столбца матрицы Z).*

Пусть $A_c = (-1+\gamma_1)F^1$, $\delta A = p \cdot S$, тогда $\triangle A = d \cdot |S|$. Заметим, что собственные значения матрицы A_c имеют вид $\lambda_i = (-1+\gamma_1)\lambda_i(F^1)$. Напомним, что $Z(\gamma_1) = |U^*| \cdot |S| \cdot |U|$, где U – ортогональная матрица, столбцами которой являются собственные векторы матрицы $((\gamma_1 - 1)F^1)$. Для построения U выберем ортогональные собственные векторы, тогда $U = (U^{-1})^*$. Кроме того, заметим, что для произвольной матрицы $|M^*| = |M|^*$. Тогда $Z(\gamma_1)$ – симметричная матрица, откуда $\rho_k^r = \rho_k^c$.

Лемма 3 означает, что для каждого $\lambda(p) \in \sigma(K(p))$ существует $k = 1, \ldots, n$, такое, что

$$|\lambda(p) - (-1+\gamma_1)\lambda_k(F^1)| \le d\sum_{j=1}^n z_{kj}(\gamma_1) < d_0 \sum_{j=1}^n z_{kj}(\gamma_1), \tag{19}$$

следовательно,

$$\lambda(p) < (-1+\gamma_1)\lambda_k(F^1) + d_0\sum_{j=1}^n z_{kj}(\gamma_1).$$

Подставим d_0 из условия (13). Тогда

$$\lambda(p) < (1-\gamma_1)\sum_{j=1}^n z_{kj}(\gamma_1)\left(-\frac{\lambda_k(F^1)}{\sum\limits_{j=1}^n z_{kj}} + \min_{1\le i\le n}\frac{\lambda_i(F^1)}{\sum\limits_{s=1}^n z_{is}(\gamma_1)}\right) \le 0.$$

Следовательно, при выполнении условия (13) семейство матриц $K(p)$ устойчиво при всех $|p| \le d < d_0$.

4. Условие (14). В работе [20] рассматривается симметричная интервальная матрица, т. е. $A^m = A_c - \triangle A,\ \ A^M = A_c + \triangle A$.

Лемма 4 (Rohn [20]) *Пусть $\triangle A$ – матрица, каждый элемент которой неотрицателен. Пусть A_c и $\triangle A$ являются симметричными матрицами и A_c устойчива, причем выполнено неравенство*

$$\rho(|A_c^{-1}|\triangle A) < 1. \tag{20}$$

Тогда интервальная матрица $[A_c - \triangle A; A_c + \triangle A]$ устойчива (т. е. каждая матрица семейства является устойчивой).

Заметим, что

$$K(p) \subset [(-1+\gamma_1)F^1 - d|S|; (-1+\gamma_1)F^1 + d|S|].$$

Докажем, что семейство $[(-1+\gamma_1)F^1 - d|S|; (-1+\gamma_1)F^1 + d|S|]$ устойчиво, откуда будет вытекать устойчивость семейства $K(p)$.

Положим $A_c = (-1+\gamma_1)F^1$. Эта матрица устойчива при $0 < \gamma_1 < 1$. Положим $\triangle A = d \cdot |S|$. Тогда

$$\rho(|A_c^{-1}|\triangle A) = \rho(|((-1+\gamma_1)F^1)^{-1}| \cdot d \cdot |S|) =$$
$$= \frac{d\rho(|(F^1)^{-1}| \cdot |S|)}{1-\gamma_1} < \frac{d_0\rho(|(F^1)^{-1}| \cdot |S|)}{1-\gamma_1}.$$

Подставим d_0 из условия (14). Тогда для всех $|p| \le d < d_0$

$$\rho(|A_c^{-1}|\triangle A) < 1.$$

Итак, при выполнении условия (14) выполнены условия леммы 4, то есть семейство матриц $K(p)$ устойчиво при всех $|p| \le d < d_0$. □

Замечание 1. Доказанная теорема означает, что если $|p(t,x)| \le d < d_0$, где d_0 задается одной из формул (11)-(14), то можно применять метод функции управляемости для построения синтезирующего управления. Для нахождения траектории, начинающейся в заданной точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$, поступаем следующим образом. Решаем уравнение (4) при $x = x_0$ и находим единственный положительный корень $\Theta(x_0) = \theta_0$. Выбираем число d_0 согласно одной из оценок в теореме. Положим $\theta(t) = \Theta(x(t))$. При всех значениях возмущения $|p(t,x)| \le d < d_0$ траектория является решением следующей задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = (A_0 + p(t,x)R)x - \frac{1}{2}\, b_0 b_0^* D(\theta) F D(\theta) x, \\ \dot{\theta} = \dfrac{(-F^1 + p(t,x)S)D(\theta)x, D(\theta)x)}{(F^1 D(\theta)x, D(\theta)x)} \\ x(0) = x_0,\ \theta(0) = \theta_0. \end{cases}$$

Заметим, что при этом уравнение (4) достаточно решить только один раз – для нахождения θ_0.

Замечание 2. В работе [14] рассматривается задача стабилизации за конечное время для системы вида

$$\begin{cases} \dot{x}_i = d_i(x)x_{i+1} + f_i(x_{i+1}, \ldots, x_n, u), \quad i = 1, \ldots, n-1, \\ \dot{x}_n = d_n(x)u + f_n(u), \end{cases}$$

в предположении, что $0 < \underline{d_i} \le d_i(x) \le \overline{d_i}$ – непрерывные функции, которые не известны заранее. В отличие от работы [14] мы указываем границы изменения неизвестных возмущений $d_i(x)$, при этом мы допускаем, что возмущения могут зависеть от времени. Отметим, что применение метода функции управляемости позволяет нам построить управление, удовлетворяющее заранее заданным ограничениям, и получить оценку на время попадания.

4. Робастный синтез для трехмерной системы

Рассмотрим задачу глобального робастного позиционного синтеза для системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (1 + p(t, x_1, x_2, x_3))x_2, \\ \dot{x}_2 = (1 + r_2 p(t, x_1, x_2, x_3))x_3, \\ \dot{x}_3 = u. \end{cases} \tag{21}$$

Запишем эту систему в матричном виде $\dot{x} = (A_0 + pR)x + b_0 u$, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть ограничения на управление имеют вид $|u| \le 1$. Хорошо известен случай, когда p является постоянной величиной [8]. Мы рассматриваем p как неизвестное ограниченное возмущение: $|p(t, x_1, x_2, x_3)| \le d$. Имеем

$$F = \begin{pmatrix} 2400 & 960 & 120 \\ 960 & 420 & 60 \\ 120 & 60 & 12 \end{pmatrix}, \quad F^1 = \begin{pmatrix} 14400 & 4800 & 480 \\ 4800 & 1680 & 180 \\ 480 & 180 & 24 \end{pmatrix},$$

$$(F^1)^{-1} \approx \begin{pmatrix} 0.002 & -0.008 & 0.016 \\ -0.008 & 0.033 & -0.083 \\ 0.016 & -0.083 & 0.333 \end{pmatrix},$$

$$|(F^1)^{-1}| \approx \begin{pmatrix} 0.002 & 0.008 & 0.016 \\ 0.008 & 0.033 & 0.083 \\ 0.016 & 0.083 & 0.333 \end{pmatrix},$$

$$D(\Theta) = \begin{pmatrix} \Theta^{-\frac{5}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \Theta^{-\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \Theta^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \ S = \begin{pmatrix} 0 & 2400 & 960r_2 \\ 2400 & 1920 & 60(2+7r_2) \\ 960r_2 & 60(2+7r_2) & 120r_2 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения матрицы F^1 :

$$\lambda_1(F^1) \approx 16024.4, \ \lambda_2(F^1) \approx 76.75, \ \lambda_3(F^1) \approx 2.81.$$

Пусть $r_2 = -0.1$. В этом случае

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 2400 & -96 \\ 2400 & 1920 & 78 \\ -96 & 78 & -12 \end{pmatrix}, \quad |S| = \begin{pmatrix} 0 & 2400 & 96 \\ 2400 & 1920 & 78 \\ 96 & 78 & 12 \end{pmatrix},$$

$\rho(S) \approx 3544.91, \ ||S||_\infty = 2400 + 1920 + 78 = 4398.$

Положим $\gamma_1 = 0.01$. В силу формулы (11)

$$d_0 = \frac{(1-\gamma_1)\lambda_{min}(F^1)}{\rho(S)} \approx \frac{0.99 \cdot 2.81}{3544.91} \approx 0.0007.$$

В выражении (12)

$$\mathcal{Q} = \int\limits_0^\infty e^{2(\gamma_1 - 1)F^1 t} dt \approx \begin{pmatrix} 0.001 & -0.004 & 0.008 \\ -0.004 & 0.016 & -0.042 \\ 0.008 & -0.042 & 0.168 \end{pmatrix},$$

$||\mathcal{Q}||_\infty \approx 0.008 + 0.042 + 0.168 \approx 0.218$. В силу формулы (12)

$$d_0 = \frac{1}{2||\mathcal{Q}||_\infty ||S||_\infty} \approx \frac{1}{2 \cdot 0.218 \cdot 4398} \approx 0.0005.$$

В выражении (13) матрица, составленная из собственных векторов матрицы $((\gamma_1 - 1)F^1)$, и ее модуль имеют вид

$$U \approx \begin{pmatrix} -0.947 & 0.314 & 0.051 \\ -0.317 & -0.914 & -0.251 \\ -0.032 & -0.254 & 0.966 \end{pmatrix}, \quad |U| \approx \begin{pmatrix} 0.947 & 0.314 & 0.051 \\ 0.317 & 0.914 & 0.251 \\ 0.032 & 0.254 & 0.966 \end{pmatrix},$$

поэтому

$$Z(0.01) \approx \begin{pmatrix} 1645.438 & 2910.089 & 876.397 \\ 2910.089 & 3040.208 & 850.911 \\ 876.397 & 850.911 & 241.696 \end{pmatrix},$$

$$\sum_{j=1}^n z_{1j}(\gamma_1) \approx 1645.438 + 2910.089 + 876.397 \approx 5431.93,$$

$$\sum_{j=1}^n z_{2j}(\gamma_1) \approx 2910.089 + 3040.208 + 850.911 \approx 6801.21,$$

$$\sum_{j=1}^{n} z_{3j}(\gamma_1) \approx 876.397 + 850.911 + 241.696 \approx 1969.01.$$

В силу формулы (13)

$$d_0 = (1-\gamma_1) \min_{1\le i\le n} \frac{\lambda_i(F^1)}{\sum\limits_{j=1}^{n} z_{ij}(\gamma_1)} \approx 0.99 \min\left\{\frac{16024.4}{5431.93}, \frac{76.75}{6801.21}\ \frac{2.81}{1969.01}\right\} \approx$$

$$\approx 0.99 \min\{2.95, 0.011, 0.0014\} \approx 0.0014.$$

В выражении (14)

$$|(F^1)^{-1}| \cdot |S| \approx \begin{pmatrix} 21.6 & 22.8 & 1.07 \\ 88 & 90.5 & 4.4 \\ 232 & 226 & 12.1 \end{pmatrix},$$

$\rho(|(F^1)^{-1}| \cdot |S|) \approx 123.696$. В силу формулы (14)

$$d_0 = \frac{1-\gamma_1}{\rho(|(F^1)^{-1}| \cdot |S|)} \approx \frac{0.99}{123.696} \approx 0.008.$$

Таким образом, формула (14) дает самую лучшую оценку.

Теперь построим синтезирующее управление. Уравнение для функции управляемости имеет вид

$$2a_0\Theta^6 = 2400x_1^2 + 1920\Theta x_1x_2 + 240\Theta^2 x_1x_3 + 420\Theta^2 x_2^2 + 120\Theta^3 x_2x_3 + 12\Theta^4 x_3^2, \tag{22}$$

где $0 < a_0 \le\ 2/f_{33} = 1/6$. Пусть $a_0 = 1/6$. Управление имеет вид

$$u(\Theta, x) = -\frac{60x_1}{\Theta^3} - \frac{30x_2}{\Theta^2} - \frac{6x_3}{\Theta}. \tag{23}$$

Выберем $d_0 = 0.008$. В качестве конкретной реализации возмущения рассмотрим функцию $p(t, x_1, x_2, x_3) = 0.008\ \sin\left(\frac{10(x_1^2-x_2^2-x_3^2)}{t+1}\right)$, тогда система (21) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \left(1 + 0.008\ \sin\left(\frac{10(x_1^2-x_2^2-x_3^2)}{t+1}\right)\right) x_2, \\ \dot{x}_2 = \left(1 - 0.0008\ \sin\left(\frac{10(x_1^2-x_2^2-x_3^2)}{t+1}\right)\right) x_3, \\ \dot{x}_3 = u. \end{cases} \tag{24}$$

Выберем в качестве начальной точки $x_0 = (-2; 3; -1)$. Для нахождения траектории воспользуемся Замечанием 1. Решая уравнение (22), получаем $\theta_0 \approx 7.15$. Компоненты траектории представлены на рис. 1, управление на траектории – на рис. 2. Кроме того, производная от функции управляемости на траектории представлена на рис. 3, а функция управляемости на траектории – на рис. 4. Обратим внимание на то, что $\Theta(x(t))$ почти линейна, то

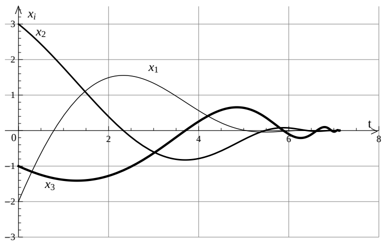

Рис. 1: Компоненты траектории для системы (24)

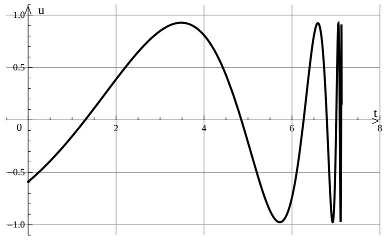

Рис. 2: Управление на траектории для системы (24)

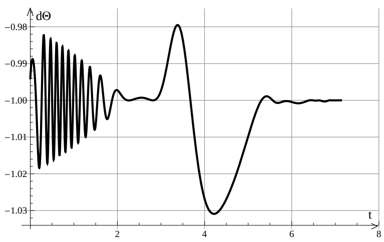

Рис. 3: Производная от функции управляемости на траектории для системы(24)

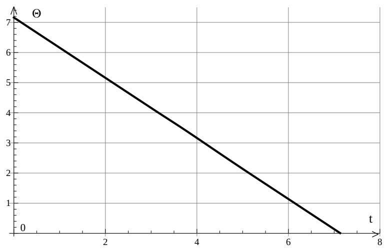

Рис. 4: Функция управляемости на траектории для системы (24)

есть значение $\frac{d}{dt}\Theta(x(t))$ "близко" к -1. Напомним, что при $p(t,x) = 0$ выполнено равенство $\frac{d}{dt}\Theta(x(t)) = -1$. Время попадания в начало координат равно $T \approx 7.13 < \Theta_0$. Заметим, что оценка (15) дает существенно более грубый результат, а именно $T \leq 715.97$.

Благодарности. Автор выражает благодарность доктору физ.-мат. наук, профессору Коробову В. И. за ценные советы при написании работы. Также автор выражает благодарность кандидату физ.-мат. наук, доценту Игнатович С. Ю. за конструктивные замечания на этапе оформления работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бессонов Г. А., Коробов В. И., Скляр Г. М. Задача устойчивого синтеза ограниченных управлений для некоторого класса нестационарных систем / Прикладная математика и механика, 1988. – Т. 52, Вып. 1. – С. 9-15.

2. Коробов В. И. Общий подход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости / Математический сборник, 1979. — Т. 109(151), № 4(8). — С. 582–606.

3. Коробов В.И. Решение задачи синтеза с помощью функции управляемости / Доклады АН СССР, 1979. – Т. 248, № 5. – С. 1051–1055.

4. Коробов В. И. Решение задачи синтеза для управляемых процессов с возмущениями с помощью функции управляемости / Дифференц. уравн., 1987. – Т. 23, № 2. – С. 236–243.

5. Коробов В. И. Метод функции управляемости. — М.-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика 2007. — 576 с.

6. Коробов В. И., Гавриляко В. М. Робастные системы. Синтез ограниченного управления / Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія "Математика, прикладна математика і механіка", 2005. — № 711. — С. 23–27.

7. Коробов В. И., Скляр Г. М. Методы построения позиционных управлений и допустимый принцип максимума / Дифференциальные уравнения, 1990. – Т. 26, № 11. – С. 1914–1924.

8. Поляк Б. Т., Щербаков П. С. Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002.— 303 с.

9. Ревина Т. В. Решение одной задачи синтеза управления для робастных систем на основе метода функции управляемости / Динамические системы. Таврический нац. ун-т им. В. И. Вернадского. — Симферополь, 2008. — Вып. 25. — с. 83–93.

10. Скорик В. А. Аналитическое обращение одного семейства плохо обусловленных матриц, возникающих в методе функции управляемости / Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія "Математика, прикладна математика і механіка", 1999.– № 444. — С. 15–23.

11. Хорн Р. А., Джонсон Ч. Р. Матричный анализ.- Изд-во "Наука". Гл. ред. физ.-мат. лит., М, 1989. — 656 с.

12. Bowong S., Moukam Kakmeni F.M. Chaos control and duration time of a class of uncertain chaotic systems / Physics Letters, 2003. — A 316. — P. 206–217.

13. Bhat S. P., Bernstein D. S. Finite-time stability of continious autonomous systems / SIAM Journal of Control and Optimization, 2000. – Vol. 38. – No. 3. – pp. 751-766.

14. Ding S., Qian C., Li S. Global finite-time stabilization of a class of upper-triangular systems / Proceeding of the 2010 American Control Conference, Baltimore, MD, USA, 2010, June 30 – July 2. — P. 4223–4228.

15. Franze G., Carotenuto L., Muraca P. On the stability of interval matrices / Proceeding of the 2004 American Control Conference, Boston, Massachusets, USA, 2004, June 30 – July 2. — P. 2648-2653.

16. Hong Y. Finite-time stabilization of nonlinear systems with parametric and dynamic uncertainties / IEEE Trans. on Automatic Control, 2006. — Vol. 51. — No. 12. — P. 1950-1956.

17. Juang Y. T., Shao C. S. Stability analysis of dinamic interval systems / Int. J. Contr., 1989. — Vol. 49. — P. 1401–1408.

18. Polyakov A, Efimov D, Perruquetti W. Finite-time stabilization using implicit Lyapunov function technique / IFAC Nolcos, hal-00844386, version 1-15, Jul 2013.

19. Rodoumta K., Bowong S. Construction of bounded feedback by the controllability function method// Applied mathematical sciences, 2007. — Vol. 1. — No 6. — P. 267–279.

20. Rohn J. Positive definitess and stability of interval matrices / SIAM J. Matrix anal. appl., 1994. — Vol. 15. — No. 1. — P. 175–184.

21. Wang K, Michel A, Liu D. Nessesary and sufficient conditions for the Hurwitz and Schur stability of interval matrices / IEEE Trans. on Automatic Control, 1994. — Vol. 39. — No. 6. — P. 1251-1255.

Статья получена: 10.04.2014; окончательный вариант: 10.11.2014; принята: 11.11.2014.