Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.977.24 № 1120, 2014, с.29–63

Построение множеств инерционных управлений, решающих задачи синтеза и стабилизации для некоторого класса линейных неавтономных неоднородных систем

В. А. Скорик

Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина,
пл. Свободы, 4, 61022, Харьков, Украина
v.skoryk@karazin.ua

Для некоторого класса линейных неавтономных неоднородных систем без использования фундаментальной матрицы неавтономной системы построены множества управлений, решающие, соответственно, задачу синтеза и задачу стабилизации и удовлетворяющие вместе с производными до заданного порядка заданным ограничениям.
Ключевые слова: линейная неавтономная неоднородная система, задача синтеза, инерционные управления.

Скорик В. О., **Побудова множин інерційних керувань, які вирішують задачі синтезу і стабілізації для деякого класу лінійних неавтономних неоднорідних систем.** Для деякого класу лінійних неавтономних неоднорідних систем без використання фундаментальної матриці неавтономної системи побудовано множини керувань, які вирішують, відповідно, задачу синтеза і задачу стабілізації та задовольняють разом із похідними до заданого порядку задані обмеження.
Ключові слова: лінійна неавтономна неоднорідна система, задача синтезу, інерційні керування.

V. A. Skoryk, **Construction of sets of inertial controls, which solve the synthesis and stabilization problems for some class of linear non-autonomous inhomogeneous systems.** For a some class of linear non-autonomous inhomogeneous systems without using of fundamental matrix of non-autonomous systems the sets of controls solving respectively the synthesis problem and the problem of stabilization are constructed. The controls and under given order its derivatives satisfy the preassigned constraints.
Keywords: linear non-autonomous inhomogeneous control system, synthesis problem, inertial controls.
2000 Mathematics Subject Classification 37N35, 93B50, 93B52.

1. Введение

Данная работа посвящена построению множеств позиционных управлений, решающих для некоторого класса линейных неавтономных неоднородных систем, соответственно, задачу допустимого синтеза инерционных управлений и задачу стабилизации, без использования фундаментальной матрицы неавтономной системы.

Задачей допустимого синтеза инерционных управлений для системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + g(t), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^r,\ t \in [t_0, t_1], \tag{1}$$

где $A(t)$ — $(n\times n)$-матрица, $B(t)$ — $(n\times r)$-матрица, $g(t)$ — n-мерная вектор-функция, называется задача нахождения управления $u = u(t, x)$ такого, что:

1) для любой точки $x_0 \in Q(t_0)$ некоторой области $Q(t)$, являющейся для каждого $t \in [t_0, t_1]$ окрестностью начала координат, существует начинающаяся в момент времени t_0 в точке x_0 и оканчивающаяся в начале координат через некоторое конечное время $T = T(t_0, x_0) \in (0, t_1 - t_0]$ траектория $x(t)$ системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t, x) + g(t), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t \in [t_0, t_1], \tag{2}$$

то есть $\lim\limits_{t\to t_0+T} x(t) = 0$, такая, что $x(t) \in Q(t)$ для всех $t \in [t_0, t_0 + T]$;

2) управление $u(t, x)$ и до заданного порядка $l \geq 1$ его производные $u^{(1)}(t, x)$, …, $u^{(l)}(t, x)$ в силу системы (2) удовлетворяют ограничениям

$$\|u^{(k)}(t, x)\| \leq d_k, \quad k = 0, 1, \dots, l, \quad t \in [t_0, t_0 + T],\ x \in Q(t), \tag{3}$$

где d_0, …, d_l — заданные положительные числа.

Управления с ограничениями вида (3) рассматривались в [1, стр. 292] и были названы инерционными.

Для линейных неавтономных однородных систем исследованию задачи допустимого синтеза ограниченных позиционных управлений посвящено множество работ (см., например, [2, 3, 4, 6]). Тем не менее, для линейных неавтономных неоднородных систем исследование этой задачи, задачи допустимого синтеза инерционных управлений и задачи стабилизации инерционными управлениями не проводилось.

Данная работа является развитием результатов работ [2, 4, 5, 6]. В отличие от результатов работ [2, 4], рассматривается решение задачи синтеза инерционных управлений и для линейных неавтономных неоднородных систем. Развитие результатов работы [5] состоит в решении задачи позиционного синтеза инерционных управлений, при построении которых не используется фундаментальная матрица $\Phi(t)$. В отличие от результатов работы [6], в данной работе рассматриваются неоднородные системы и приводится построение множества инерционных управлений, которые порождаются не одной функцией, а каждым набором $f \in \mathcal{F}$ из r функций. Это существенно расширяет классы управлений, решающих задачу синтеза инерционных управлений и задачу стабилизации.

Данная работа состоит из введения (раздел 1), разделов 2 и 3. В разделе 2, на основе метода функции управляемости [2, 3], приведено конструктивное решение задачи допустимого синтеза инерционных управлений для класса линейных неавтономных неоднородных систем (1) с матрицами $A(t) \in C^{(2n-2+l)}[t_0,t_1]$, $B(t) \in C^{(2n-1+l)}$ и вектор-функцией $g(t) \in C^{(l)}[t_0,t_1]$, удовлетворяющих некоторым условиям. Используя каноническую форму линейных неавтономных неоднородных систем, построено множество позиционных управлений, решающих данную задачу. А именно, показано, что каждый набор $f \in \mathcal{F}$ из неотрицательных, невозрастающих на полуоси $[0,+\infty)$ функций $f_1(s), \ldots, f_r(s)$ полиномиального роста, каждая из которых имеет некоторое число точек убывания, порождает семейство функций управляемости $\{\Theta_{f,\alpha}(t,x)\}_{\alpha\geq 1}$ и соответствующее семейство управлений $\{u_{f,\alpha}(t,x)\}_{\alpha\geq 1}$, каждое из которых при $2l+1 \leq \alpha < +\infty$ решает задачу допустимого синтеза инерционных управлений в области $Q_{f,\alpha}(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : \Theta_{f,\alpha}(t,x) \leq c_{f,\alpha}\}$, $t \in [t_0,t_1]$, где $c_{f,\alpha}$ — некоторая положительная постоянная. При этом даются точные оценки снизу и сверху на время $T_{f,\alpha}(t_0,x_0)$ движения из произвольной начальной точки $x_0 \in Q_{f,\alpha}(t_0)$ в начало координат. Указан также случай набора f, для которого вычисляется время движения. Полученные результаты проиллюстрированы модельными примерами.

В разделе 3 приведено конструктивное решение задачи стабилизации некоторого подкласса указанного ранее класса линейных неавтономных неоднородных систем, определенных на интервале времени $[t_0,+\infty)$. Построено множество инерционных управлений, решающих задачу стабилизации. А именно, показано, что каждый набор $f \in \mathcal{F}$ порождает управление $u_f(t,x)$, которое в некоторой области $Q_f(t)$, $t \in [t_0,+\infty)$ решает задачу стабилизации и вместе с производными до заданного порядка l в силу замкнутой системы удовлетворяет ограничениям вида (3) при $t \in [t_, +\infty)$. Результаты проиллюстрированы модельным примером.

2. Решение задачи синтеза инерционных управлений

Приведем построение множества инерционных управлений для системы (1) на основе метода функции управляемости без использования фундаментальной матрицы системы $\dot{x} = A(t)x$. Рассмотрим систему (1) с матрицами $A(t) \in C^{(2n-2+l)}[t_0,t_1]$, $B(t) \in C^{(2n-1+l)}$ и вектор-функцией $g(t) \in C^{(l)}[t_0,t_1]$. Всюду далее, если не оговорено иное, подразумевается, что $t \in [t_0,t_1]$.

Следуя работе [4], предположим, что $\operatorname{rang} B(t) = r$ для любого $t \in [t_0,t_1]$;

$$\operatorname{rang} Q(t) = \operatorname{rang} K(t) = n, \quad t \in [t_0,t_1], \tag{4}$$

здесь

$$Q(t) = (b_1(t),\ldots,b_r(t),\Delta b_1(t),\ldots,\Delta b_r(t),\ldots,\Delta^{n-1}b_1(t),\ldots,\Delta^{n-1}b_r(t)),$$

$$K(t) = \big(b_1(t),\Delta b_1(t),\ldots,\Delta^{n_1-1}b_1(t),\ldots,b_r(t),\Delta b_r(t),...,\Delta^{n_r-1}b_r(t)\big),$$

где Δ — оператор вида $\Delta = A(t) - Ed/dt$ (E — единичная $(n{\times}n)$-матрица), $n_1 + \ldots + n_r = n, \quad n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_r$;

имеют место равенства

$$\Delta^{n_i} b_i(t) = \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=0}^{n_j-1} \gamma^i_{jk}(t) \Delta^k b_j(t), \quad i = 1, \ldots, r, \tag{5}$$

где $\gamma^i_{jk}(t) \in C^{(n)}[t_0, t_1]: \ \gamma^i_{jk}(t) = 0$ для $j < i, \ k > \min\{n_i, n_j{-}1\}$, или $j \geq i, \ k > \min\{n_i{-}1, n_j{-}1\}$.

Положим $s_0 = 0$, $s_i = n_1 + \ldots + n_i$, $i = 1, \ldots, r$. Определим n-мерные вектор-функции $c_1(t), \ldots, c_r(t)$ равенствами

$$c_i(t) = \left(K^*(t)\right)^{-1} e_{s_i} \in C^{(n+l)}[t_0, t_1], \quad i = 1, \ldots, r, \tag{6}$$

где e_{s_i} — s_i-й столбец матрицы E. Рассмотрим невырожденную матрицу $L(t) \in C^{(l+1)}[t_0, t_1]$ и матрицу $\widehat{L}(t)$, которые имеют вид

$$L(t) = \begin{pmatrix} c_1^*(t) \\ (\Delta_* c_1(t))^* \\ \ldots \\ \left(\Delta_*^{n_1-1} c_1(t)\right)^* \\ \ldots \\ c_r^*(t) \\ (\Delta_* c_r(t))^* \\ \ldots \\ \left(\Delta_*^{n_r-1} c_r(t)\right)^* \end{pmatrix}, \quad \widehat{L}(t) = \begin{pmatrix} c_1^*(t) \\ (\Delta_* c_1(t))^* \\ \ldots \\ \left(\Delta_*^{n_1-2} c_1(t)\right)^* \\ \ldots \\ c_r^*(t) \\ (\Delta_* c_r(t))^* \\ \ldots \\ \left(\Delta_*^{n_r-2} c_r(t)\right)^* \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где $\Delta_* = A^*(t) + Ed/dt$.

Следуя работе [7], далее будем предполагать, что вектор-функция $g(t)$ удовлетворяет условию

$$\widehat{L}(t) g(t) = 0. \tag{8}$$

Пусть $f_1(s), \ldots, f_r(s)$ — произвольные неотрицательные невозрастающие функции на полуоси $[0, +\infty)$ с не менее, чем $n_1, \ldots, n_r$ точками убывания, соответственно, удовлетворяющие условиям

$$\int\limits_0^\infty s^{2n_i-1} f_i(s) ds < \infty, \quad i = 1, \ldots, r. \tag{9}$$

Обозначим через $\mathcal{F}$ множество наборов f из таких функций $f_1(s), \ldots, f_r(s)$. Для набора $f \in \mathcal{F}$ определим $(n{\times}n)$-матрицу $F(s) = \operatorname{diag}\Big(f_i(s) E_i\Big)_{i=1}^r$, где E_i — единичная $(n_i{\times}n_i)$-матрица, и рассмотрим семейство $\Big\{F^{-1}_{f,\alpha}(\Theta)\Big\}_{\substack{\alpha \geq 1 \\ \Theta > 0}}$ положительно определенных матриц $F^{-1}_{f,\alpha}(\Theta) = \int\limits_0^\infty F\left(t/\Theta^{\frac{1}{\alpha}}\right) e^{-A_0 t} B_0 B_0^* e^{-A_0^* t} dt$, где $(n{\times}n)$-матрица $A_0 = \operatorname{diag}(A_{01}, \ldots, A_{0r})$ (A_{0i} – $(n_i{\times}n_i)$-матрица, элементы первой наддиагонали которой — единицы, а все остальные элементы — нули, $i = 1, \ldots, r$), $B_0 = (e_{s_1}, \ldots, e_{s_r})$ — $(n{\times}r)$-матрица.

Матрица $F^{-1}_{f,\alpha}(\Theta)$ и обратная к ней матрица $F_{f,\alpha}(\Theta)$ представимы в виде

$$F^{-1}_{f,\alpha}(\Theta) = D^{-1}_{\alpha}(\Theta) F^{-1}_f D^{-1}_{\alpha}(\Theta), \quad F_{f,\alpha}(\Theta) = D_{\alpha}(\Theta) F_f D_{\alpha}(\Theta), \tag{10}$$

где $D_{\alpha}(\Theta) = \operatorname{diag}(D_{\alpha,1}(\Theta), \ldots, D_{\alpha,r}(\Theta))$, $D_{\alpha,i}(\Theta) = \operatorname{diag}\left(\Theta^{-\frac{2n_i-2k+1}{2\alpha}}\right)_{k=1}^{n_i}$, $i = 1, \ldots, r$, — $(n_i{\times}n_i)$-матрицы, $F^{-1}_f = \int\limits_0^{\infty} F(s) e^{-A_0 s} B_0 B_0^* e^{-A_0^* s} ds$.

2.1. Построение множества функций управляемости и множества управлений

Пусть a_0 — положительное число, которое будет определено далее. Для фиксированного набора f и конечного числа $\alpha \geq 1$ рассмотрим функцию

$$\Phi_{f,\alpha}(\Theta, t, x) = 2a_0\Theta - (F_{f,\alpha}(\Theta) L(t) x, L(t) x), \quad \Theta > 0,\ x \neq 0.$$

Выберем число $\overline{\Theta} > 0$. Положим $R_{f,\alpha} = \delta\sqrt{2a_0\overline{\Theta}/(L^2_{\max}\|F_{f,\alpha}(\overline{\Theta})\|)}$, $\delta \in (0,1)$, где $L_{\max} = \max\limits_{t_0 \leq t \leq t_1} \|L(t)\|$, и рассмотрим область $\mathrm{Q}^1_{f,\alpha} = \{x :\ \|x\| \leq R_{f,\alpha}\}$. Тогда

$$\Phi_{f,\alpha}(\overline{\Theta}, t, x) > 0 \text{ для всех } x \in \mathrm{Q}^1_{f,\alpha} \setminus \{0\}. \tag{11}$$

Лемма 1. *Для каждого набора $f \in \mathcal{F}$ и каждого конечного числа $\alpha \geq 1$ уравнение*

$$\Phi_{f,\alpha}(\Theta, t, x) = 0, \quad x \in \mathrm{Q}^1_{f,\alpha} \setminus \{0\}, \tag{12}$$

определяет единственную положительную, непрерывно дифференцируемую функцию $\Theta = \Theta_{f,\alpha}(t, x)$, которая при условии

$$\Theta_{f,\alpha}(t, 0) = 0. \tag{13}$$

является непрерывной в нуле.

Доказательство. Так как

$$\partial\Phi_{f,\alpha}(\Theta, t, x)/\partial\Theta \geq 2a_0 > 0, \quad x \in \mathrm{Q}^1_{f,\alpha} \setminus \{0\}, \tag{14}$$

то $\Phi_{f,\alpha}(\Theta, t, x)$ — возрастающая по Θ функция. На основании неравенства

$$(L^*(t) F_{f,\alpha}(\Theta) L(t) x, x) \geq \|x\|^2/(L_1^2\|F^{-1}_{f,\alpha}(\Theta)\|), \tag{15}$$

где $L_1 = \max\limits_{t_0 \leq t \leq t_1} \|L^{-1}(t)\|$, в силу представления (10), получаем

$$\lim_{\Theta \to +0} \Phi_{f,\alpha}(\Theta, t, x) = -\infty, \quad x \in \mathrm{Q}^1_{f,\alpha} \setminus \{0\}. \tag{16}$$

Из соотношений (11), (14), (16) следует, что в области $Q^1_{f,\alpha} \setminus \{0\}$ уравнение (12) имеет единственное положительное решение $\Theta = \Theta_{f,\alpha}(t,x)$, которое, в силу теоремы о неявной функции, является непрерывно дифференцируемой функцией при $x \in Q^1_{f,\alpha} \setminus \{0\}$.

Установим непрерывность функции $\Theta_{f,\alpha}(t,x)$ при $x = 0$. Из равенства (12), на основании представления (10), следует, что при малых значениях функции $\Theta_{f,\alpha}(t,x)$ справедливо неравенство

$$\Theta_{f,\alpha}(t,x) \leq \left(L^2_{\max}\|F_f\|\|x\|^2/2a_0\right)^{\alpha/(\alpha+2n_1-1)}. \tag{17}$$

Для произвольного числа $\varepsilon > 0$ выберем число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, удовлетворяющее неравенству $\delta \leq \sqrt{2a_0\varepsilon^{(\alpha+2n_1-1)/\alpha} / (\|F_f\|L^2_{\max})}$. Тогда из неравенства (17) получаем, что $\Theta_{f,\alpha}(t,x) < \varepsilon$ для всех x таких, что $\|x\| < \delta$. $\square$

Используя множество функций управляемости $\Theta_{f,\alpha}(t,x)$, построим множество позиционных управлений

$$\begin{aligned} u_{f,\alpha}(t,x) = -M^{-1}(t)B_0^*\Big(\frac{1}{2}F(0)F_{f,\alpha}(\Theta_{f,\alpha}(t,x))L(t)x + \big(\dot{L}(t)+ \\ +L(t)A(t)\big)x + L(t)g(t)\Big), \quad x \in Q^1_{f,\alpha}(t) \setminus \{0\}, \ f \in \mathcal{F}, \ \alpha \geq 1, \end{aligned} \tag{18}$$

где $M(t) = B_0^*L(t)B(t)$ — верхнетреугольная $(r{\times}r)$-матрица с элементами $m_{ii}(t) = 1$, $m_{ij}(t) = \left(\Delta_*^{n_i-1}c_i(t)\right)^* b_j(t)$ при $i < j \leq r$, $i = 1,\ldots,r$. Любое из этих управлений удовлетворяет условию Липшица по x в каждом множестве $K_t(\rho_1,\rho_2) = \{(t,x) : t_0 \leq t \leq t_1, \ 0 < \rho_1 \leq \|x\| \leq \rho_2 \leq R_{f,\alpha}\}$ с постоянной Липшица $L_u(\varepsilon,\rho_2) \to +\infty$ при $\varepsilon \to 0$ $(0 < \varepsilon < \rho_2)$. Далее будет установлено, что при $\alpha \geq 2l+1$ управление и его производные в силу замкнутой системы удовлетворяют заданным ограничениям.

2.2. Получение оценок для производной функции управляемости и построение области разрешимости задачи

Рассмотрим матрицы

$$P_f = -\frac{1}{2}B_0^*F(0)F_f, \quad A_f = A_0 + B_0P_f, \tag{19}$$

$$W_f = -(F_fA_f + A_f^*F_f), \quad F_f^\alpha = F_f - H^\alpha F_f - F_fH^\alpha, \tag{20}$$

где $H^\alpha = \mathrm{diag}(H_1^\alpha,\ldots,H_r^\alpha)$ — $(n{\times}n)$-матрица, $H_i^\alpha = \mathrm{diag}\left(-\frac{2n_i-2k+1}{2\alpha}\right)_{k=1}^{n_i}$ — $(n_i{\times}n_i)$-матрицы, $i = 1,\ldots,r$. Матрицы W_f, F_f^α являются положительно определенными [7].

В следующей лемме определяется производная функции управляемости в силу замкнутой системы и устанавливаются для нее точные оценки снизу и сверху.

Лемма 2. *Для каждого набора $f \in \mathcal{F}$ и каждого конечного числа $\alpha \geq 1$ производная $\dot{\Theta}_{f,\alpha}(t,x)$ функции управляемости $\Theta_{f,\alpha}(t,x)$ в силу системы*

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u_{f,\alpha}(t,x) + g(t), \quad x \in Q^1_{f,\alpha}\backslash\{0\}, \tag{21}$$

определяется равенством

$$\dot{\Theta}_{f,\alpha}(t,x) = -\frac{(W_f y(\Theta_{f,\alpha},t,x), y(\Theta_{f,\alpha},t,x))}{\Big(F^{\alpha}_f y(\Theta_{f,\alpha},t,x), y(\Theta_{f,\alpha},t,x)\Big)}\, \Theta^{1-\frac{1}{\alpha}}_{f,\alpha}(t,x), \;\; x \in Q^1_{f,\alpha}\backslash\{0\}, \tag{22}$$

где W_f, F^{α}_f — матрицы вида (20), $y(\Theta_{f,\alpha},t,x) = D_{\alpha}(\Theta_{f,\alpha}(t,x))L(t)x$, и удовлетворяет неравенствам

$$-\Lambda_{f,\alpha}\Theta^{1-\frac{1}{\alpha}}_{f,\alpha}(t,x) \leq \dot{\Theta}_{f,\alpha}(t,x) \leq -\lambda_{f,\alpha}\Theta^{1-\frac{1}{\alpha}}_{f,\alpha}(t,x), \; x \in \mathrm{Q}^1_{f,\alpha}\backslash\{0\}, \tag{23}$$

где $\Lambda_{f,\alpha} > 0$, $\lambda_{f,\alpha} > 0$ — наибольшее и наименьшее собственные значения матрицы $(F^{\alpha}_f)^{-1}W_f$.

Доказательство. Перепишем равенство (12) при $\Theta = \Theta_{f,\alpha}(t,x)$ и управление $u_{f,\alpha}(t,x)$ из (18) в виде

$$2a_0\Theta_{f,\alpha}(t,x) - (F_f\, y(\Theta_{f,\alpha}(t,x),t,x),\, y(\Theta_{f,\alpha}(t,x),t,x)) = 0. \tag{24}$$

$$u_{f,\alpha}(t,x) = M^{-1}(t)\left(\Theta^{-\frac{1}{2\alpha}}_{f,\alpha}(t,x)P_f y - B^*_0\widetilde{A}(t)L(t)x + B^*_0 L(t)g(t)\right), \tag{25}$$

где

$$\widetilde{A}(t) = \Big(\dot{L}(t) + L(t)A(t)\Big)\, L^{-1}(t). \tag{26}$$

Вычислим производную $y(\Theta_{f,\alpha}(t,x),t,x)$ в силу системы (21) с управлением $u_{f,\alpha}(t,x)$ вида (25). В силу выбора вектор-функций $c_1(t), \ldots, c_r(t)$, имеем равенства $L(t)B(t) = B_0M(t)$, $(E - B_0B^*_0)\widetilde{A}(t) = A_0$, а, в силу условия (8), имеем равенство $L(t)g(t) = B_0B^*_0L(t)g(t)$. Используя эти равенства, получаем

$$\frac{d}{dt}(L(t)x)\Big|_{(21)} = A_0L(t)x + \Theta^{-\frac{1}{2\alpha}}_{f,\alpha}(t,x)B_0P_f y(\Theta_{f,\alpha}(t,x),t,x). \tag{27}$$

Тогда, используя равенства $D_{\alpha}(\Theta)\left(A_0D^{-1}_{\alpha}(\Theta) + B_0P_f\Theta^{-\frac{1}{2\alpha}}\right) = A_f\Theta^{-\frac{1}{\alpha}}$, (27), получаем, что производная $y(\Theta_{f,\alpha}(t,x),t,x)$ в силу системы (21) имеет вид

$$\dot{y}(\Theta_{f,\alpha}(t,x),t,x) = \left(\frac{\dot{\Theta}_{f,\alpha}(t,x)}{\Theta_{f,\alpha}(t,x)}H^{\alpha} + A_f\Theta^{-\frac{1}{\alpha}}_{f,\alpha}(t,x)\right) y(\Theta_{f,\alpha}(t,x),t,x). \tag{28}$$

Из равенства (24), в силу равенства $2a_0 = (F_f y(\Theta_{f,\alpha},t,x), y(\Theta_{f,\alpha},t,x))\,/\Theta_{f,\alpha}$ и равенства (28), получаем, что производная функции управляемости $\Theta_{f,\alpha}(t,x)$ в силу системы (21) имеет вид (22). Из равенства (22), в силу неравенств

$$\lambda_{f,\alpha} \leq (W_f y, y)/(F^{\alpha}_f y, y) \leq \Lambda_{f,\alpha}, \tag{29}$$

где $\lambda_{f,\alpha} > 0$ $\Lambda_{f,\alpha} > 0$ — наименьшее и наибольшее собственные значения матрицы $\left(F_f^\alpha\right)^{-1}W_f$, получаем точные оценки (23) для $\dot{\Theta}_{f,\alpha}(t,x)$ в области $Q^1_{f,\alpha}\setminus\{0\}$. □

В следующей лемме строится область $Q_{f,\alpha}(t)$ разрешимости задачи синтеза инерционных управлений и приводятся оценки на время движения из любой точки x_0 области $Q_{f,\alpha}(t_0)$ в начало координат.

Лемма 3. *Для каждого набора $f\in\mathcal{F}$ и каждого конечного числа $\alpha\geq 1$ при выборе числа $c_{f,\alpha}$ из условия*

$$0 < c_{f,\alpha} \leq \min\left\{\frac{\sigma\delta^2\widehat{\Theta}}{L^2_{\max}L_1^2\|F_{f,\alpha}(\overline{\Theta})\|\|F^{-1}_{f,\alpha}(\overline{\Theta})\|},\ \frac{(\lambda_{f,\alpha}(t_1-t_0))^\alpha}{\alpha^\alpha}\right\},\ \sigma\in(0,1), \tag{30}$$

множество $Q_{f,\alpha}(t)=\{x : \Theta_{f,\alpha}(t,x)\leq c_{f,\alpha}\}$ ограничено и $Q_{f,\alpha}(t)\subset \operatorname{int} Q^1_{f,\alpha}$ при $t\in[t_0,t_1]$.

Из любой точки $x_0 \in Q_{f,\alpha}(t_0)$ в начало координат время движения $T_{f,\alpha}(t_0,x_0)$ по траектории $x(t)$ системы (21), начинающейся в момент времени t_0 в точке x_0, удовлетворяет оценкам

$$\frac{\alpha}{\Lambda_{f,\alpha}}\,\Theta^{\frac{1}{\alpha}}_{f,\alpha}(t_0,x_0)\leq T_{f,\alpha}(t_0,x_0)\leq \frac{\alpha}{\lambda_{f,\alpha}}\,\Theta^{\frac{1}{\alpha}}_{f,\alpha}(t_0,x_0). \tag{31}$$

Доказательство. Поскольку

$$Q^1_{f,\alpha}=\left\{x\in\mathbb{R}^n : \frac{\|x\|^2}{2a_0L_1^2\|F^{-1}_{f,\alpha}(\overline{\Theta})\|}\leq\frac{\delta^2\overline{\Theta}}{L^2_{\max}L_1^2\|F_{f,\alpha}(\overline{\Theta})\|\|F^{-1}_{f,\alpha}(\overline{\Theta})\|}\right\},$$

то отсюда, в силу неравенства (15) при $\Theta=\overline{\Theta}$, получаем

$$Q^1_{f,\alpha}\supset\left\{x : \frac{1}{2a_0}(L^*(t)F_{f,\alpha}(\overline{\Theta})L(t)x,x)\leq\frac{\delta^2\overline{\Theta}}{L^2_{\max}L_1^2\|F_{f,\alpha}(\overline{\Theta})\|\|F^{-1}_{f,\alpha}(\overline{\Theta})\|}\right\}.$$

Поскольку $(L^*(t)F_{f,\alpha}(\Theta)L(t)x,x)$ является невозрастающей по Θ функцией и $\Theta_{f,\alpha}(t,x)<\overline{\Theta}$ при $t\in[t_0,t_1]$, $x\in Q^1_{f,\alpha}$, то получаем включение

$$Q^1_{f,\alpha}\supset\left\{x\in\mathbb{R}^n : \Theta_{f,\alpha}(t,x)\leq\frac{\delta^2\overline{\Theta}}{L^2_{\max}L_1^2\|F_{f,\alpha}(\overline{\Theta})\|\|F^{-1}_{f,\alpha}(\overline{\Theta})\|}\right\},\ t\in[t_0,t_1].$$

Отсюда следует, что для удовлетворяющего условию (30) числа $c_{f,\alpha}$ справедливо включение $Q_{f,\alpha}(t)\subset\operatorname{int}Q^1_{f,\alpha}$ при $t\in[t_0,t_1]$.

Из неравенств (23), используя теорему 1.3 [3, стр. 21], получаем, что время движения $T_{f,\alpha}(t_0,x_0)$ из любой точки $x_0\in Q_{f,\alpha}(t_0)\setminus\{0\}$ в начало координат по начинающейся в точке x_0 в момент времени t_0 траектории $x(t)$ системы (21) удовлетворяет оценкам (31). □

2.3. Вычисление производных управления

Вычислим производную k-го порядка ($1 \le k \le l$) в силу системы (21) управления $u_{f,\alpha}(t,x)$ вида (25). Обозначим

$$\beta_{f,\alpha}(y) = \frac{(W_f y, y)}{(F_f^\alpha y, y)}, \quad P_i(\alpha, y) = \left(\frac{2i-1}{2\alpha}E - H^\alpha\right)\beta_{f,\alpha}(y) + A_f, \quad i = 1, \ldots, l.$$

Тогда имеем

$$\beta^{(k)}_{f,\alpha}(y) = \sum_{i=0}^{k} C_k^i (W_f y, y)^{(k-i)} \Big(\frac{1}{(F_f^\alpha y, y)}\Big)^{(i)}, \quad k = 0, 1, \ldots, l, \tag{32}$$

$$P_i^{(k)}(\alpha, y) = \left(\frac{2i-1}{2\alpha}E - H^\alpha\right)\beta^{(k)}_{f,\alpha}(y) + \delta_{0k}A_f, \quad k = 0, 1, \ldots, l, \tag{33}$$

где δ_{0k} — символ Кронекера. Здесь и далее C_k^i — биномиальные числа. В силу обозначений, из (22) имеем равенство $\dot\Theta_{f,\alpha}(t,x) = -\beta_{f,\alpha}(y)\Theta_{f,\alpha}^{1-\frac{1}{\alpha}}(t,x)$, а, следовательно, равенство (28) принимает вид $\dot y = \left(A_f - H^\alpha\beta_{f,\alpha}(y)\right)\Theta_{f,\alpha}^{-\frac{1}{\alpha}}(t,x)y$. Используя последние два равенства, получаем, что производная в силу системы (21) квадратичной формы (Vy, y) имеет вид

$$(Vy, y)^{\boldsymbol{\cdot}} = \big((V_a y, y) + (V_h y, y)\beta_{f,\alpha}(y)\big)\,\Theta_{f,\alpha}^{-\frac{1}{\alpha}}(t,x), \tag{34}$$

где $V_a = VA_f + A_f^* V$, $V_h = -(VH^\alpha + H^\alpha V)$. Следовательно, производная p-го порядка в силу системы (21) этой квадратичной формы определяется равенством

$$\begin{aligned}(Vy, y)^{(p)} = \sum_{s=0}^{p-1} C_{p-1}^s \Big((V_a y, y)^{(p-1-s)} + \\ + \sum_{l=0}^{p-1-s} C_{p-1-s}^l (V_h y, y)^{(p-1-s-l)}\beta^{(l)}_{f,\alpha}(y)\Big)\Big(\Theta_{f,\alpha}^{-\frac{1}{\alpha}}\Big)^{(s)}.\end{aligned} \tag{35}$$

Методом индукции устанавливается:
— справедливость равенства

$$\Big(\frac{1}{(F_f^\alpha y, y)}\Big)^{(i)} = \frac{1}{(F_f^\alpha y, y)} \sum_{j=1}^{i} (-1)^j \sum_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_j = i - j} \gamma^{(i)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_j} \prod_{l=1}^{j} \frac{(F_f^\alpha y, y)^{(\alpha_l + 1)}}{(F_f^\alpha y, y)}, \tag{36}$$

где $\gamma^{(i)}_{\alpha_1\ldots\alpha_j}$ — положительные числа, определяемые рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned}&\gamma_0^{(1)} = 1, \quad \gamma^{(i)}_{\alpha_1\ldots\alpha_j} = \gamma'^{(i)}_{\alpha_1\ldots\alpha_j}, && \alpha_1 + \ldots + \alpha_j = i - j,\\ &\gamma^{(i)}_{\alpha_1\ldots\alpha_{j-1}0} = j\,\gamma^{(i-1)}_{\alpha_1\ldots\alpha_{j-1}} + \gamma'^{(i)}_{\alpha_1\ldots\alpha_{j-1}0}, && j = 1, \ldots, i, \quad i = 2, \ldots, l,\end{aligned}$$

здесь ${\gamma'}^{(i)}_{\alpha_1\ldots\alpha_j}=\gamma^{(i-1)}_{\alpha_1-1\alpha_2\ldots\alpha_j}+\ldots+\gamma^{(i-1)}_{\alpha_1\ldots\alpha_{j-1}\alpha_j-1}$, а слагаемое с отрицательным числом в индексе равно нулю;

— используя равенство $\left(\Theta_{f,\alpha}^{-\frac{m+1}{\alpha}}\right)^{\boldsymbol{\cdot}}=\frac{m+1}{\alpha}\beta_{f,\alpha}(y)\Theta_{f,\alpha}^{-\frac{m+2}{\alpha}}$, справедливость равенства

$$\left(\Theta_{f,\alpha}^{-\frac{1}{\alpha}}\right)^{(s)}=\Theta_{f,\alpha}^{-\frac{1}{\alpha}}\sum_{m=1}^{s}\frac{m!}{\alpha^m}\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_m=s-m}\zeta^{(s)}_{\alpha_1\ldots\alpha_m}\beta^{(\alpha_1)}_{f,\alpha}\ldots\beta^{(\alpha_m)}_{f,\alpha}\Theta_{f,\alpha}^{-\frac{m}{\alpha}};$$

— используя равенство $\left(\Theta_{f,\alpha}^{-\frac{2i+1}{2\alpha}}y\right)^{\boldsymbol{\cdot}}=P_{i+1}\Theta_{f,\alpha}^{-\frac{2i+3}{2\alpha}}y$, справедливость равенства

$$\left(\Theta_{f,\alpha}^{-\frac{1}{2\alpha}}y\right)^{(k)}=\Theta_{f,\alpha}^{-\frac{1}{2\alpha}}\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_i=k-i}\zeta^{(k)}_{\alpha_1\ldots\alpha_i}P_1^{(\alpha_1)}\ldots P_i^{(\alpha_i)}\Theta_{f,\alpha}^{-\frac{i}{\alpha}}\right)y, \tag{37}$$

где $\zeta^{(k)}_{\alpha_1\ldots\alpha_i}$ — положительные числа, определяемые рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned}&\zeta^{(1)}_0=1,\quad \zeta^{(k)}_{\alpha_1\ldots\alpha_i}={\zeta'}^{(k)}_{\alpha_1\ldots\alpha_i}, && \alpha_1+\ldots+\alpha_i=k-i,\\ &\zeta^{(k)}_{\alpha_1\ldots\alpha_{i-1}0}=\zeta^{(k-1)}_{\alpha_1\ldots\alpha_{i-1}}+{\zeta'}^{(k)}_{\alpha_1\ldots\alpha_{i-1}0}, && i=1,\ldots,k,\quad k=2,\ldots,l,\end{aligned}$$

здесь ${\zeta'}^{(k)}_{\alpha_1\ldots\alpha_i}=\zeta^{(k-1)}_{\alpha_1-1\alpha_2\ldots\alpha_i}+\ldots+\zeta^{(k-1)}_{\alpha_1\ldots\alpha_{i-1}\alpha_i-1}$, а слагаемое с отрицательным числом в индексе равно нулю;

— в силу равенств (27), $A_0^{n_1}=0$, справедливость равенства

$$(L(t)x)^{(k)}=\delta_kA_0^kL(t)x+\sum_{j=0}^{m_k-1}A_0^{m_k-1-j}B_0P_f\big(\Theta_{f,\alpha}^{-\frac{1}{2\alpha}}y\big)^{(j+(1-\delta_k)(k-n_1))}, \tag{38}$$

где $m_k=\min\{k,n_1\}$, $\delta_k=1$ для $k<n_1$ и $\delta_k=0$ для $n_1\le k\le l$.

Таким образом, производная k-го порядка ($1\le k\le l$) в силу системы (21) управления $u_{f,\alpha}(t,x)$ определяется равенством

$$\begin{gathered}u^{(k)}_{f,\alpha}(t,x)=\sum_{i=0}^{k}C_k^i\left(M^{-1}(t)\right)^{(k-i)}\left[P_f\left(\Theta_{f,\alpha}^{-\frac{1}{2\alpha}}y(\Theta_{f,\alpha},t,x)\right)^{(i)}-\right.\\ \left.-B_0^*\sum_{j=0}^{i}C_i^j\widetilde{A}^{(i-j)}(t)(L(t)x)^{(j)}-B_0^*\left(L(t)g(t)\right)^{(i)}\right],\end{gathered} \tag{39}$$

где $\left(\Theta_{f,\alpha}^{-\frac{1}{2\alpha}}y(\Theta_{f,\alpha},t,x)\right)^{(i)}$, $(L(t)x)^{(j)}$ определяются равенствами (37), (38) соответственно.

2.3. Ограниченность управления и его производных

Обозначим $\widehat{T}_{f,\alpha} = \alpha c_{f,\alpha}^{\frac{1}{\alpha}}/\lambda_{f,\alpha}$,

$$\widetilde{d}_k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \max_{t\in[t_0,t_0+\widehat{T}_{f,\alpha}]} \| \left(M^{-1}(t)\right)^{(k-i)} B_0^* \left(L(t)g(t)\right)^{(i)} \|, \quad k=0,\ldots,l.$$

Лемма 4. *Пусть числа $d_k > \widetilde{d}_k$ для $k = 0, 1, \ldots, l$. Тогда для каждого набора $f \in \mathcal{F}$ и каждого конечного числа $\alpha \geq 1$ число a_0 в уравнении (12) может быть выбрано таким, что управление $u_{f,\alpha}(t,x)$ и его производные в силу системы (21) $u^{(1)}_{f,\alpha}(t,x)$, …, $u^{(l)}_{f,\alpha}(t,x)$ удовлетворяют ограничениям*

$$\|u^{(k)}_{f,\alpha}(t,x)\| \leq d_k, \quad k=0,1,\ldots,l,\ t\in[t_0,t_0+T_{f,\alpha}],\ x\in Q_{f,\alpha}(t). \tag{40}$$

Доказательство. Вначале методом индукции установим справедливость неравенств

$$\left|\beta^{(k)}_{f,\alpha}\left(y(\Theta_{f,\alpha},t,x)\right)\right| \leq \overline{\beta}_k(\alpha)\Theta_{f,\alpha}^{-\frac{k}{\alpha}},\ k=0,1,\ldots,l, t\in[t_0,t_0+\widehat{T}_{f,\alpha}], x\in Q_{f,\alpha}(t), \tag{41}$$

где $\overline{\beta}_0(\alpha)$, …, $\overline{\beta}_l(\alpha)$ — положительные числа, вид которых будет установлен в ходе доказательства. Из (32), в силу (36), имеем

$$\begin{aligned}\beta^{(k)}_{f,\alpha}(y) = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \frac{(W_f y,y)^{(k-i)}}{(F_f^\alpha y,y)} \sum_{j=1}^{i}(-1)^j \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_j=i-j} \gamma^{(i)}_{\alpha_1\ldots\alpha_j}\times\\ \times\prod_{l=1}^{j}\frac{(F_f^\alpha y,y)^{(\alpha_l+1)}}{(F_f^\alpha y,y)}, \quad k=0,1,\ldots,l.\end{aligned} \tag{42}$$

Отметим, что при $k=0$ неравенство (41), очевидно, справедливо, поскольку, учитывая (29), $\beta_{f,\alpha}(y) \leq \overline{\beta_0}(\alpha)$, где $\overline{\beta_0}(\alpha) = \Lambda_{f,\alpha}$. Установим справедливость неравенства (41) при $k=1$. Из (42) при $k=1$ имеем

$$\dot{\beta}_\alpha(y) = (W_f y,y)^{\cdot}/(F_f^\alpha y,y) - \beta_{f,\alpha}(y)(F_f^\alpha y,y)^{\cdot}/(F_f^\alpha y,y)\ .$$

Отсюда, в силу неравенства (34), получаем, что

$$|\dot{\beta}_{f,\alpha}(y)| \leq \overline{\beta}_1(\alpha)\Theta_{f,\alpha}^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad \overline{\beta}_1(\alpha) = \omega_1(\alpha) + \Lambda_{f,\alpha}\varphi_1(\alpha),$$

$$\omega_1(\alpha) = \max\left\{|\lambda_{\min}^{(W_f)_a}|, |\lambda_{\max}^{(W_f)_a}|\right\} + \Lambda_{f,\alpha}\max\left\{|\lambda_{\min}^{(W_f)_h}|, |\lambda_{\max}^{(W_f)_h}|\right\},$$

$$\varphi_1(\alpha) = \max\left\{|\lambda_{\min}^{(F_f^\alpha)_a}|, |\lambda_{\max}^{(F_f^\alpha)_a}|\right\} + \Lambda_{f,\alpha}\max\left\{|\lambda_{\min}^{(F_f^\alpha)_h}|, |\lambda_{\max}^{(F_f^\alpha)_h}|\right\},$$

где $\lambda_{\min}^{(W_f)_a}$, $\lambda_{\max}^{(W_f)_a}$, $\lambda_{\min}^{(W_f)_h}$, $\lambda_{\max}^{(W_f)_h}$, $\lambda_{\min}^{(F_f^\alpha)_a}$, $\lambda_{\max}^{(F_f^\alpha)_a}$, $\lambda_{\min}^{(F_f^\alpha)_h}$, $\lambda_{\max}^{(F_f^\alpha)_h}$ — наименьшие и наибольшие собственные значения матриц $(F_f^\alpha)^{-1}(W_f)_a$, $(F_f^\alpha)^{-1}(W_f)_h$,

$(F_f^\alpha)^{-1}(F_f^\alpha)_a$, $(F_f^\alpha)^{-1}(F_f^\alpha)_h$, соответственно, т.е. неравенство (41) при $k=1$ справедливо. Предположим, что справедливы неравенства

$$\left|\beta_{f,\alpha}^{(\nu)}\left(y(\Theta_{f,\alpha},t,x)\right)\right| \le \overline{\beta}_\nu(\alpha)\Theta_{f,\alpha}^{-\frac{\nu}{\alpha}},\ \nu=0,1,\ldots,k-1,\quad t\in[t_0,t_0+\widehat{T}_{f,\alpha}],\ x\in Q_{f,\alpha}(t). \tag{43}$$

Это означает, что выполнены неравенства

$$\left|\frac{(Vy,y)^{(\nu)}}{(F_f^\alpha y,y)}\right| \le v_\nu(\alpha)\Theta_{f,\alpha}^{-\frac{\nu}{\alpha}},\quad \nu=0,\ldots,k-1, \tag{44}$$

при $V=W_f$, $V=F_f^\alpha$, $V=(W_f)_a$ и $V=(W_f)_h$, $V=(F_f^\alpha)_a\equiv F_f^\alpha A_1+A_1^*F_f^\alpha$, $V=(F_f^\alpha)_h\equiv-(F_f^\alpha H^\alpha+H^\alpha F_f^\alpha)$ с числом v_ν, которое равно, соответственно, ω_ν, φ_ν, ω_ν^a, ω_ν^h, φ_ν^a, φ_ν^h. Поэтому, в силу равенства (35), имеем

$$\left|\frac{(W_f y,y)^{(k)}}{(F_f^\alpha y,y)}\right| \le \omega_k(\alpha)\Theta_{f,\alpha}^{-\frac{k}{\alpha}},\qquad \left|\frac{(F_f^\alpha y,y)^{(k)}}{(F_f^\alpha y,y)}\right| \le \varphi_k(\alpha)\Theta_{f,\alpha}^{-\frac{k}{\alpha}}, \tag{45}$$

где

$$\omega_k(\alpha)=\sum_{s=0}^{k-1}C_{k-1}^s\Big(\omega_{k-1-s}^a+\sum_{l=0}^{k-1-s}C_{k-1-s}^l\omega_{k-1-s-l}^h\overline{\beta}_l\Big)\times \times\sum_{m=1}^{s}\frac{m!}{\alpha^m}\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_m=s-m}\zeta_{\alpha_1\ldots\alpha_m}^{(s)}\overline{\beta}_{\alpha_1}\ldots\overline{\beta}_{\alpha_m},$$

$$\varphi_k(\alpha)=\sum_{s=0}^{k-1}C_{k-1}^s\Big(\varphi_{k-1-s}^a+\sum_{l=0}^{k-1-s}C_{k-1-s}^l\varphi_{k-1-s-l}^h\overline{\beta}_l\Big)\times \times\sum_{m=1}^{s}\frac{m!}{\alpha^m}\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_m=s-m}\zeta_{\alpha_1\ldots\alpha_m}^{(s)}\overline{\beta}_{\alpha_1}\ldots\overline{\beta}_{\alpha_m}.$$

Тогда из (42), в силу неравенств (43), (44), (45), следует неравенство (41), где

$$\overline{\beta}_k(\alpha)=\sum_{i=0}^{k}C_k^i\omega_{k-i}(\alpha)\sum_{j=1}^{i}\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_j=i-j}\gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_j}^{(i)}\varphi_{\alpha_1+1}(\alpha)\ldots\varphi_{\alpha_j+1}(\alpha),$$

чем и завершается доказательство его справедливости.

Из равенства (33), в силу неравенства (41), получаем

$$\|P_i^{(k)}(\alpha,y(\Theta_{f,\alpha},t,x))\| \le \left(\frac{n_1+i-1}{\alpha}\overline{\beta}_k(\alpha)+\delta_{0k}\|A_f\|\right)\Theta_{f,\alpha}^{-\frac{k}{\alpha}},\quad i=1,\ldots,l,\ k=0,1,\ldots,l, t\in[t_0,t_0+\widehat{T}_{f,\alpha}],\ x\in Q_{f,\alpha}(t),$$

где δ_{0k} — символ Кронекера. Следовательно,

$$\Big\|\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_i=k-i}\zeta_{\alpha_1\ldots\alpha_i}P_1^{(\alpha_1)}\ldots P_i^{(\alpha_i)}\Big\| \le \sigma_{k,i}(\alpha)\Theta_{f,\alpha}^{-\frac{k-i}{\alpha}},$$

где

$$\sigma_{k,i}(\alpha) = \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_i=k-i} \zeta^{(k)}_{\alpha_1\ldots\alpha_i} \prod_{j=1}^{i} \left(\frac{n_1+j-1}{\alpha}\, \overline{\beta}_{\alpha_j}(\alpha) + \delta_{0\alpha_j}\|A_f\| \right).$$

Тогда из равенства (37) получаем

$$\begin{gathered} \|\Big(\Theta_{f,\alpha}^{-\frac{1}{\alpha}} y(\Theta_{f,\alpha},t,x)\Big)^{(i)}\| \le \sigma_i(\alpha)\Theta_{f,\alpha}^{-\frac{2i+1}{2\alpha}}\|y(\Theta_{f,\alpha},t,x)\|, \;\; i=0,1,\ldots,l, \\ t\in[t_0,t_0+\widehat{T}_{f,\alpha}],\; x\in Q_{f,\alpha}(t), \end{gathered} \tag{46}$$

где $\sigma_0=1$, $\sigma_i(\alpha)=\sum\limits_{j=1}^{i}\sigma_{i,j}(\alpha)$. Из (38), учитывая неравенство (46), получаем

$$\begin{gathered} \|\big(L(t)x\big)^{(j)}\| \le \Big(\sum_{s=0}^{m_j-1} \|A_0^{m_j-1-s}B_0P_f\|\sigma_{s+(1-\delta_j)(j-n_1)}\Theta_{f,\alpha}^{\frac{k-s-(1-\delta_j)(j-n_1)}{\alpha}} + \\ +\delta_j\|A_0^jD_\alpha^{-1}(\Theta_{f,\alpha})\|\Theta_{f,\alpha}^{\frac{2k+1}{2\alpha}}\Big)\Theta_{f,\alpha}^{-\frac{2k+1}{2\alpha}}\|y(\Theta_{f,\alpha},t,x)\|. \end{gathered} \tag{47}$$

Поскольку

$$\|A_0^jD_\alpha^{-1}(\Theta)\|\Theta^{\frac{2k+1}{2\alpha}} = \max\left\{\Theta^{\frac{n_1+k-j}{\alpha}}, \Theta^{\frac{k+1}{\alpha}}\right\},$$

$$k-s-(1-\delta_j)(j-n_1) \ge k-m_k+1-(1-\delta_k)(k-n_1)=1,$$

то из (47) получаем неравенство

$$\begin{gathered} \|\big(L(t)x\big)^{(j)}\| \le \ell_j^{(k)}(\alpha)\Theta_{f,\alpha}^{-\frac{2k+1}{2\alpha}}(t,x)\|y(\Theta_{f,\alpha}(t,x),t,x)\|, \\ j=0,1,\ldots,l,\; j\le k\le l,\; t\in[t_0,t_0+\widehat{T}_{f,\alpha}],\; x\in Q_{f,\alpha}(t), \end{gathered} \tag{48}$$

где

$$\begin{gathered} \ell_j^{(k)}(\alpha) = \sum_{s=0}^{m_j-1} \|A_0^{m_j-1-s}B_0P_f\|\sigma_{s+(1-\delta_j)(j-n_1)}(\alpha)c_{f,\alpha}^{\frac{k-s-(1-\delta_j)(j-n_1)}{\alpha}} + \\ +\delta_j\max\left\{c_{f,\alpha}^{\frac{n_1+k-j}{\alpha}},\; c_{f,\alpha}^{\frac{k+1}{\alpha}}\right\}. \end{gathered} \tag{49}$$

Из (39), в силу неравенств (46), (48), получаем

$$\begin{gathered} \|u_{f,\alpha}^{(k)}(t,x)\| \le \eta_k(\alpha)\Theta_{f,\alpha}^{-\frac{2k+1}{2\alpha}}(t,x)\|y(\Theta_{f,\alpha}(t,x),t,x)\| + \widetilde{d}_k, \\ k=0,1,\ldots,l,\; t\in[t_0,t_0+T_{f,\alpha}], x\in Q_{f,\alpha}(t), \end{gathered} \tag{50}$$

где

$$\begin{gathered} \eta_k(\alpha) = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \Big(\max_{t\in[t_0,t_0+\widehat{T}_{f,\alpha}]} \|\left(M^{-1}(t)\right)^{(k-i)}P_f\|\sigma_i(\alpha)c_{f,\alpha}^{\frac{k-i}{\alpha}} + \\ +\sum_{j=0}^{i} C_i^j \max_{t\in[t_0,t_0+\widehat{T}_{f,\alpha}]} \|\left(M^{-1}(t)\right)^{(k-i)}B_0^*\widetilde{A}^{(i-j)}(t)\|\ell_j^{(k)}(\alpha)\Big). \end{gathered} \tag{51}$$

Из равенства (24) следует неравенство $\|y\|^2 \leq 2a_0\Theta_{f,\alpha}(t,x)\|F_f^{-1}\|$, в силу которого из неравенства (50) для $\alpha \geq (2l{+}1)$ получаем

$$\begin{gathered} \|u_{f,\alpha}^{(k)}(t,x)\| \leq \eta_k(\alpha)\sqrt{2a_0\|F_f^{-1}\|}\, c_{f,\alpha}^{\frac{1}{2}-\frac{2k+1}{2\alpha}} + \widetilde{d}_k, \\ k = 0,1,\ldots,l,\ t \in [t_0, t_0 + T_{f,\alpha}],\ x \in Q_{f,\alpha}(t). \end{gathered} \tag{52}$$

Для конечного числа $\alpha \geq 2l+1$ выберем число a_0 из условия

$$0 < a_0 \leq \frac{1}{2\|F_f^{-1}\|} \min_{0\leq k\leq l} \frac{(d_k - \widetilde{d}_k)^2}{\eta_k^2(\alpha) c_{f,\alpha}^{1-\frac{2k+1}{\alpha}}}. \tag{53}$$

Тогда из неравенств (52) следует справедливость неравенств (40). □

Решение задачи допустимого синтеза инерционных управлений для некоторого класса систем (1) дает следующая теорема.

Теорема 1. *Рассмотрим с матрицами* $A(t) \in C^{(2n-2+l)}[t_0,t_1]$, $B(t) \in C^{(2n-1+l)}[t_0,t_1]$ *(*$\operatorname{rang} B(t) = r$*) и удовлетворяющей условию (8) вектор-функцией* $g(t) \in C^{(l)}[t_0,t_1]$ *систему (1), для которой выполнено условие (4) и имеют место равенства (5), с ограничениями на управление и его производные до заданного порядка* l *вида (3), где* $d_k > \widetilde{d}_k$, $k = 0,1,\ldots,l$.

Пусть выполнены следующие условия:

1) $f \in \mathcal{F}$ *— набор произвольных неотрицательных невозрастающих функций* $f_1(s), \ldots, f_r(s)$ *на полуоси* $[0,+\infty)$, *соответственно, с не менее, чем* $n_1, \ldots, n_r$ *числом точек убывания, которые удовлетворяют условиям (9);*
2) *для конечного числа* $\alpha \geq 2l+1$ *постоянная* $c_{f,\alpha}$ *удовлетворяет условию (30) и число* a_0 *удовлетворяет условию (53);*
3) *функция управляемости* $\Theta_{f,\alpha}(t,x)$ *при* $x \neq 0$ *и* $t \in [t_0,t_1]$ *определяется как положительное решение уравнения (12) и равенством (13);*
4) *область* $\mathrm{Q}_{f,\alpha}(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : \Theta_{f,\alpha}(t,x) \leq c_{f,\alpha}\}$, $t \in [t_0, t_0 + \widehat{T}_{f,\alpha}]$.

Тогда управление $u_{f,\alpha}(t,x)$ *вида (18) решает задачу синтеза инерционных управлений в области* $\mathrm{Q}_{f,\alpha}(t)$, *причем из любой точки* $x_0 \in Q_{f,\alpha}(t_0)$ *в начало координат время движения* $T_{f,\alpha}(t_0,x_0)$ *по траектории* $x(t)$ *системы (21), начинающейся в момент времени* t_0 *в точке* x_0, *удовлетворяет оценкам (31).*

Доказательство. Следуя методу функции управляемости для неавтономных систем [2, теорема 1], [3, теорема 1.1, стр. 14], установлено, что для каждого набора $f \in \mathcal{F}$ и каждого конечного числа $\alpha \geq 1$ уравнение (12) определяет единственную положительную непрерывно дифференцируемую функцию $\Theta_{f,\alpha}(t,x)$ при $t \in [t_0,t_1]$, $x \in Q_{f,\alpha}^1 \setminus \{0\}$, которая, при условии (13), является непрерывной при $x = 0$ (лемма 1); используя функцию управляемости, построено управление $u_{f,\alpha}(t,x)$ вида (18), которое удовлетворяет условию Липшица в каждом множестве $K_t(\rho_1,\rho_2) = \{x : 0 < \rho_1 \le \|x\| \le \rho_2 \le R_{f,\alpha}\}$ при $t \in [t_0,t_1]$ с постоянной $L_u(\varepsilon,\rho_2) \to +\infty$ при $\varepsilon \to 0$; показано, что производная функции управляемости $\Theta_{f,\alpha}(t,x)$ в силу системы (21) удовлетворяет неравенствам (23) (лемма 2); показано, что для постоянной $c_{f,\alpha}$, удовлетворяющей условию (30), область $Q_{f,\alpha}(t)$ является ограниченной, $Q_{f,\alpha}(t) \subset \operatorname{int} Q^1_{f,\alpha}$ при $t \in [t_0,t_1]$ и время движения $T_{f,\alpha}(t_0,x_0)$ из любой точки $x_0 \in Q_{f,\alpha}(t_0) \setminus \{0\}$ по траектории системы (21) в начало координат удовлетворяет оценкам (31) (лемма 3); и, наконец, установлено, что для числа a_0, выбранного из условия (53), управление и его производные в силу системы (21) удовлетворяют ограничениям (40) (лемма 4). Тогда по теореме 1 из [2] или по теореме 1.1 [3] получаем утверждение данной теоремы. □

Следствие 1. *Пусть в условиях теоремы 1 функции $f_1(s), \ldots, f_r(s)$ имеют вид*

$$f_1(s) = \ldots = f_r(s) = f^\alpha(s) = \begin{cases} (1 - s/\alpha)^\alpha & \text{при} \quad s \in [0,\alpha), \\ 0 & \text{при} \quad s \ge \alpha. \end{cases} \qquad (54)$$

Тогда управление $u_{f,\alpha}(t,x)$ вида (18) решает задачу допустимого синтеза инерционных управлений в области $\mathrm{Q}_{f,\alpha}(t)$ и из любой точки $x_0 \in Q_{f,\alpha}(t_0)$ в начало координат время движения $T_{f,\alpha}(t_0,x_0)$ по траектории $x(t)$ системы (21), начинающейся в момент времени t_0 в точке x_0, равно $\alpha\Theta^{\frac{1}{\alpha}}_{f,\alpha}(t_0,x_0)$.

Доказательство. Для набора $f \in \mathcal{F}$ функций $f_1(s), \ldots, f_r(s)$ вида (54) справедливо равенство $W_f = F_f - H^\alpha F_f - F_f H^\alpha = F^\alpha_f$ [7]. Тогда из (22) получаем равенство

$$\dot{\Theta}_{f,\alpha}(t,x) = -\Theta^{1-\frac{1}{\alpha}}_{f,\alpha}(t,x), \quad t \in [t_0,t_1],\ x \in Q^1_{f,\alpha}(t) \setminus \{0\}. \qquad (55)$$

Из этого равенства следует, что из любой точки $x_0 \in Q_{f,\alpha}(t_0)$ в начало координат время движения $T_{f,\alpha}(t_0,x_0)$ по траектории $x(t)$ системы (21), начинающейся в момент времени t_0 в точке x_0, определяется равенством $T_{f,\alpha}(t_0,x_0) = \alpha\Theta^{\frac{1}{\alpha}}_{f,\alpha}(t_0,x_0)$. □

Отметим, что в случае набора f из функций $f_1(s), \ldots, f_r(s)$ вида (54), производные управления $u_{f,\alpha}(t,x)$ и числа $\eta_0(\alpha), \ldots, \eta_l(\alpha)$ в условии выбора числа a_0 имеют более простой вид. Приведем их выражения. Учитывая (55), равенство (28) принимает вид $\dot{y} = (A_f - H^\alpha)\,\Theta^{-\frac{1}{\alpha}}_{f,\alpha}(t,x)\,y$. Тогда

$$v^{(i)}_{f,\alpha}(t,x) = \Theta^{-\frac{2i+1}{2\alpha}}_{f,\alpha} P_i\, y(\Theta_{f,\alpha},t,x), \quad i = 0,1,\ldots,l,$$

$$\big(L(t)x\big)^{(j)} = \sum_{s=0}^{m_j-1} A_0^{m_j-1-s} B_0 v^{(s)}_{f,\alpha}(t,x) + \delta_j A_0^j L(t)x =$$

$$= \sum_{s=0}^{m_j-1} \Theta_{f,\alpha}^{-\frac{2s-1}{2\alpha}} A_0^{m_j-1-s} B_0 P_s y(\Theta_{f,\alpha}, t, x) + \delta_j A_0^j L(t) x, \quad j = 0, 1, \dots, l,$$

где $P_0 = P_f = -\frac{1}{2} B_0^* F_f$, $P_i = P_{i-1}\left(\frac{2i-1}{2\alpha} E - H^\alpha + A_f\right)$, $i = 1, \dots, l$. Поэтому из (39) получаем, что производная k-го порядка в силу системы (21) управления $u_{f,\alpha}(t,x)$ определяется равенством

$$u_{f,\alpha}^{(k)}(t,x) = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \left(M^{-1}(t)\right)^{(k-i)} \Bigg[\Theta_{f,\alpha}^{-\frac{2i+1}{2\alpha}} P_i y(\Theta_{f,\alpha}, t, x) - B_0^* \left(L(t) g(t)\right)^{(i)} -$$
$$-B_0^* \sum_{j=0}^{i} C_i^j \widetilde{A}^{(i-j)}(t) \Bigg(\sum_{s=0}^{m_j-1} \Theta_{f,\alpha}^{-\frac{2s+1}{2\alpha}} A_0^{m_j-1-s} B_0 P_s y(\Theta_{f,\alpha}, t, x) +$$
$$+\delta_j A_0^j L(t) x \Bigg)\Bigg], \quad k = 0, 1, \dots, l, x \in Q_{f,\alpha}^1 \setminus \{0\}.$$

Для конечного числа $\alpha \geq 2l+1$ и числа a_0, удовлетворяющего условию (53) при

$$\eta_k(\alpha) = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \Bigg[\max_{t \in [t_0, t_0 + \widehat{T}_{f,\alpha}]} \| \left(M^{-1}(t)\right)^{(k-i)} P_i \| c_{f,\alpha}^{\frac{k-i}{\alpha}} +$$
$$+ \sum_{j=0}^{i} C_i^j \max_{t \in [t_0, t_0 + \widehat{T}_{f,\alpha}]} \| \left(M^{-1}(t)\right)^{(k-i)} B_0^* \widetilde{A}^{(i-j)}(t) \| \times \tag{56}$$
$$\times \Bigg(\sum_{s=0}^{m_j-1} c_{f,\alpha}^{\frac{k-s}{\alpha}} \| A_0^{m_j-1-s} B_0 P_s \| + \delta_j \max\left\{ c_{f,\alpha}^{\frac{n_1+k-j}{\alpha}},\ c_{f,\alpha}^{\frac{k+1}{\alpha}} \right\} \Bigg) \Bigg],$$

где $\widehat{T}_{f,\alpha} = \alpha c_{f,\alpha}^{1/\alpha}$, управление $u_{f,\alpha}(t,x)$ вида (18) и его производные удовлетворяют ограничениям (40).

Нахождение траектории $x(t)$ системы (21), которая начинается в любой точке $x_0 \in Q_{f,\alpha}(t_0)$ в момент времени t_0 и оканчивается в начале координат, приведено в работе [7].

Пример 1. Рассмотрим задачу синтеза инерционных управлений для системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{10}{10+t} x_1 + \dfrac{10}{(10+t)^2} x_2 + \dfrac{10}{10+t} u + \dfrac{5 \sin t}{10+t}, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - \dfrac{20}{10+t} x_2 + 2u + \sin t, \quad t \in [0, 5], \end{cases} \tag{57}$$

с ограничениями на управление вида (3) при $l = 2$, где $d_0 = 8$, $d_1 = 16$, $d_2 = 21$.

Эта система имеет вид (1), где

$$A(t) = \begin{pmatrix} \frac{10}{10+t} & \frac{10}{(10+t)^2} \\ 2 & -\frac{20}{10+t} \end{pmatrix}, \ B(t) = \begin{pmatrix} \frac{10}{10+t} \\ 2 \end{pmatrix}, \ g(t) = \begin{pmatrix} \frac{5 \sin t}{t+10} \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Система (57) является полностью управляемой без ограничений на управление, поскольку

$$Q(t)=(B(t),\Delta B(t))=\begin{pmatrix}\dfrac{10}{10+t} & \dfrac{130}{(10+t)^2}\\ 2 & -\dfrac{20}{10+t}\end{pmatrix},\quad \det Q(t)=-\frac{460}{(10+t)^2}.$$

В силу одномерности управления, $K(t)=Q(t)$. Определим вектор-функцию

$$c(t)=(K^*(t))^{-1}B_0=\begin{pmatrix}\dfrac{10+t}{23} & \dfrac{(10+t)^2}{230}\\ \dfrac{13}{46} & -\dfrac{10+t}{46}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{(10+t)^2}{230}\\ -\dfrac{10+t}{46}\end{pmatrix},$$

а, следовательно, и матрицу

$$L(t)=\begin{pmatrix}c^*(t)\\ (\Delta_*c(t))^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{(10+t)^2}{230} & -\dfrac{10+t}{46}\\ \dfrac{10+t}{115} & \dfrac{21}{46}\end{pmatrix},\ \det L(t)=\frac{(10+t)^2}{460}.$$

Функция $g(t)$ удовлетворяет условию (8), так как $c^*(t)g(t)=0$.

Поскольку $M^{-1}(t)B_0^*L(t)g(t)=\dfrac{1}{2}\sin t$, $\dfrac{d}{dt}\big(M^{-1}(t)B_0^*L(t)g(t)\big)=\dfrac{1}{2}\cos t$, $\dfrac{d^2}{dt^2}\big(M^{-1}(t)B_0^*L(t)g(t)\big)=-\dfrac{1}{2}\sin t$, то $\widetilde{d}_0=\widetilde{d}_1=\widetilde{d}_2=1/2$.

Выберем функцию $f_1(s)$ в виде (54). Тогда матрицы $F^{-1}_{f,\alpha}(\Theta)$, $F_{f,\alpha}(\Theta)$ имеют, соответственно, вид

$$\begin{pmatrix}\dfrac{2\alpha^3\Theta^{3/\alpha}}{(1+\alpha)(2+\alpha)(3+\alpha)} & -\dfrac{\alpha^2\Theta^{2/\alpha}}{(1+\alpha)(2+\alpha)}\\ -\dfrac{\alpha^2\Theta^{2/\alpha}}{(1+\alpha)(2+\alpha)} & \dfrac{\alpha\Theta^{1/\alpha}}{1+\alpha}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\dfrac{(2+\alpha)^2(3+\alpha)}{\alpha^3\Theta^{3/\alpha}} & \dfrac{(2+\alpha)(3+\alpha)}{\alpha^2\Theta^{2/\alpha}}\\ \dfrac{(2+\alpha)(3+\alpha)}{\alpha^2\Theta^{2/\alpha}} & \dfrac{2(2+\alpha)}{\alpha\Theta^{1/\alpha}}\end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$\|F^{-1}_{f,\alpha}(\overline{\Theta})\|=\frac{\alpha\overline{\Theta}^{1/\alpha}}{2(1+\alpha)(2+\alpha)(3+\alpha)}\Big((2+\alpha)(3+\alpha)+2\alpha^2\overline{\Theta}^{2/\alpha}+ \\ +\sqrt{(6+5\alpha+\alpha^2)^2+4\alpha^2(3+\alpha)\overline{\Theta}^{2/\alpha}+4\alpha^4\overline{\Theta}^{4/\alpha}}\,\Big),$$

$$\|F_{f,\alpha}(\overline{\Theta})\|=\frac{2+\alpha}{2\alpha^3\overline{\Theta}^{3/\alpha}}\Big((2+\alpha)(3+\alpha)+2\alpha^2\overline{\Theta}^{2/\alpha}+ \\ +\sqrt{(6+5\alpha+\alpha^2)^2+4\alpha^2(3+\alpha)\overline{\Theta}^{2/\alpha}+4\alpha^4\overline{\Theta}^{4/\alpha}}\,\Big),$$

$$\max_{t\in[0,5]}\|L(t)\|=\frac{3}{46}\sqrt{(303+\sqrt{38909})/2},\ \max_{t\in[0,5]}\|L^{-1}(t)\|=\frac{1}{10}\sqrt{(957+\sqrt{69449})/2},$$

то условие (30) выбора $c_{f,\alpha}$ принимает вид

$$0 < c_{f,\alpha} \le \frac{3385600\sigma\alpha^2(1+\alpha)(3+\alpha)\overline{\Theta}^{\,1+2/\alpha}}{9(303+\sqrt{38909})(957+\sqrt{69449})} \Big/ \Big((2+\alpha)(3+\alpha)+2\alpha^2\overline{\Theta}^{\,2/\alpha}+ \\ +\sqrt{(6+5\alpha+\alpha^2)^2+4\alpha^2(3+\alpha)\overline{\Theta}^{\,2/\alpha}+4\alpha^4\overline{\Theta}^{\,4/\alpha}}\,\Big)^2, \quad \sigma\in(0,1).$$

Положим $\alpha = 5$. Тогда из этого условия при $\overline{\Theta} = 110$ и значениях $\delta, \sigma \in (0.99, 1)$ выберем $c_{f,5} = 1$. Поскольку, согласно (56),

$$\eta_0 = \frac{7\sqrt{41}+2\sqrt{1061}}{25}, \quad \eta_1 = \frac{2(7\sqrt{43501}+5(35\sqrt{5}+\sqrt{986}+5\sqrt{1061}))}{625},$$
$$\eta_2 = \frac{70\sqrt{629}+100\sqrt{986}+140\sqrt{5305}+5\sqrt{8749}+28\sqrt{40426}+70\sqrt{43501}}{3125},$$

и $\|F_f^{-1}\| = 5\sqrt{(2209+53\sqrt{1609})/2}\Big/168$, то условие (53) принимает вид

$$0 < a_0 \le \frac{7875(53-\sqrt{1609})}{8(6253+28\sqrt{43501})} = 1.049...\,,$$

из которого выберем число $a_0 = 1$.

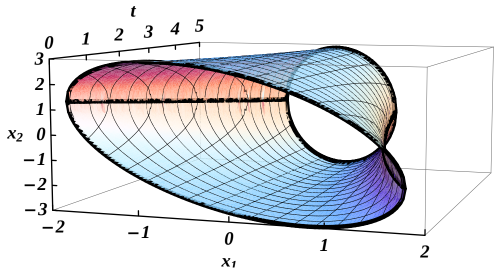

Рис. 1: Область $Q_{f,5}(t)$, $t \in [0, 5]$.

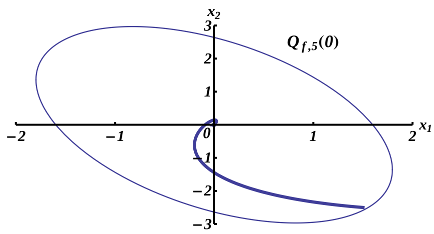

Рис. 2: Область $Q_{f,5}(0)$ и фазовая траектория.

Определим функцию $\Theta_{f,5}(t, x)$ при $t \in [0, 5]$, $x \ne 0$ из уравнения (12), которое принимает вид

$$2a_0\Theta - \frac{392z_1^2(t,x)}{125\Theta^{3/5}} - \frac{112z_1(t,x)z_2(t,x)}{25\Theta^{2/5}} - \frac{14z_2^2(t,x)}{5\Theta^{1/5}} = 0, \tag{58}$$

где $z_1(t,x) = \dfrac{1}{230}(10+t)((10+t)x_1 - 5x_2)$, $z_2(t,x) = \dfrac{1}{115}(10+t)x_1 + \dfrac{21}{46}x_2$, и положим $\Theta_{f,5}(t, 0) = 0$ при $t \in [0, 5]$.

Рассмотрим область $Q_{f,5}(t) = \{x : \Theta_{f,5}(t,x) \le 1\}$, $t \in [0, 5]$, граница которой изображена на рис. 1.

Управление $u_{f,5}(t,x)$, которое имеет вид

$$u_{f,5}(t,x)=-\left(\frac{28}{25\Theta_{f,5}^{2/5}}+\frac{248}{(10+t)^2}\right)z_1(t,x)+\left(\frac{8}{10+t}-\frac{7}{5\Theta_{f,5}^{1/5}}\right)z_2(t,x)-\frac{\sin t}{2}, \tag{59}$$

переводит любую точку x_0 изображенной на рис. 2 области $Q_{f,5}(0) = \left\{x\in\mathbb{R}^2 : 7(592x_1^2+328x_1x_2+217x_2^2)\le 10580\right\}$ в начало координат за время $T_{f,5}(t_0,x_0)=5\left(\Theta_{f,5}^0\right)^{1/5}$, где $\Theta_{f,\alpha}^0$ — единственный положительный корень уравнения (58) при $t=0$, $x_1=x_{10}$, $x_2=x_{20}$, и вместе с производными

$$\begin{aligned}\dot u_{f,5}(t,x) &= \left(\frac{496}{(10+t)^3}+\frac{28}{25\Theta_{f,5}^{3/5}}-\frac{224}{25(10+t)\Theta_{f,5}^{1/5}}\right)z_1(t,x)+\\ &+\left(\frac{14}{25\Theta_{f,5}^{2/5}}-\frac{256}{(10+t)^2}-\frac{56}{5(10+t)}\right)z_2(t,x)-\frac{1}{2}\cos t,\\ \ddot u_{f,5}(t,x) &= \left(\frac{28}{625\Theta_{f,5}^{4/5}}+\frac{224}{25(10+t)\Theta_{f,5}^{2/5}}+\frac{7392}{25(10+t)^2\Theta_{f,5}^{1/5}}-\frac{1488}{(10+t)^4}\right)z_1(t,x)+\\ &+\left(\frac{14}{25\Theta_{f,5}^{3/5}}+\frac{112}{25(10+t)\Theta_{f,5}^{1/5}}+\frac{1008}{(10+t)^3}+\frac{1848}{5(10+t)^2}\right)z_2(t,x)+\frac{1}{2}\sin t,\end{aligned}$$

удовлетворяет в области $Q_{f,5}(t)$ при $t\in[0,T_{f,5}]$ заданным ограничениям.

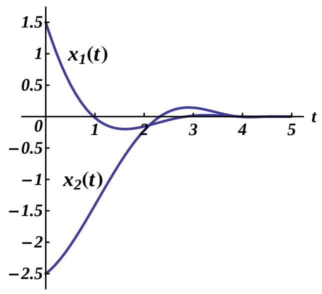

Рис. 3: Компоненты траектории $x(t)$ на отрезке времени $[0,T_{f,5}]$.

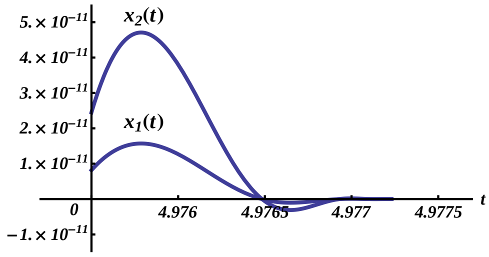

Рис. 4: Компоненты траектории $x(t)$ на отрезке времени $[4.975,T_{f,5}]$.

Траектория $x(t)$, по которой управление $u_{f,5}(t,x)$ за время $T_{f,5}(0,x_0)$ переводит точку $x_0=(x_{10},x_{20})^*\in Q_{f,5}(0)$ в начало координат, определяется равенством $x(t)=\left(\frac{210}{(10+t)^2}z_1(t)+\frac{10}{10+t}z_2(t),\quad -\frac{4}{10+t}z_1(t)+2z_2(t)\right)^*$, где

$$z(t)=\begin{pmatrix}z_1(t)\\ z_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(T_{f,5}-t)^4\Big(k_1\cos\mu\ln(T_{f,5}-t)+k_2\sin\mu\ln(T_{f,5}-t)\Big)\\ (T_{f,5}-t)^3\Big(k_3\cos\mu\ln(T_{f,5}-t)+k_4\sin\mu\ln(T_{f,5}-t)\Big)\end{pmatrix},$$

здесь

$$
\begin{aligned}
k_1 &= \frac{1}{2\mu}T_{f,5}^{-4}\Big((2\mu\cos\mu\tau_0{+}8\sin\mu\tau_0)\,z_{10}{+}2T_{f,5}z_{20}\sin\mu\tau_0\Big),\\
k_2 &= \frac{1}{2\mu}T_{f,5}^{-4}\Big((2\mu\sin\mu\tau_0{-}8\cos\mu\tau_0)\,z_{10}{-}2T_{f,5}z_{20}\cos\mu\tau_0\Big),\\
k_3 &= -4k_1-2\sqrt{3}k_2,\ k_4=2\sqrt{3}k_1-4k_2,\ \mu=2\sqrt{3},\ \tau_0=\ln T_{f,5}.
\end{aligned}
$$

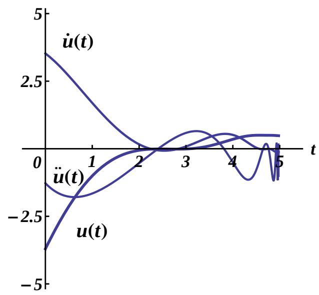

Рис. 5: Графики управления, его первой и второй производных на траектории.

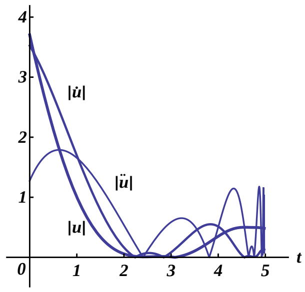

Рис. 6: Графики норм управления, его первой и второй производных на траектории.

Графики компонент траектории $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^*$, по которой точка $x_0 = (1.5, -2.5)^* \in Q_{f,5}(0)$ переводится управлением $u_{f,5}(t,x)$ вида (59) в начало координат за время $T_{f,5} = 4.977230917331149$, и графики управления, его первой и второй производных на этой траектории изображены, соответственно, на рис. 3, 4, 5, а на рис. 2 изображена фазовая траектория. На рис. 6 изображены графики норм управления и его первой и второй производных на траектории, которые, очевидно, удовлетворяют заданным ограничениям.

Пример 2. Рассмотрим задачу синтеза инерционных управлений для линейной неавтономной неоднородной системы вида

$$
\begin{cases}
\dot x_1 = \dfrac{3{+}3t{+}t^2}{2{+}3t{+}t^2}\,x_1{+}x_2{-}\dfrac{2{+}t}{1{+}t}\,x_4{-}\dfrac{3{+}3t{+}t^2}{(2{+}t)^2}\,x_5{+}\dfrac{1{+}t}{2{+}t}\,u_1{+}\sin t,\\
\dot x_2 = \dfrac{2{+}t}{1{+}t}\,x_1 - x_5,\\
\dot x_3 = -\dfrac{2{+}t}{1{+}t}\,x_2{-}\dfrac{x_3}{2{+}3t{+}t^2}{-}\dfrac{x_4}{(1{+}t)^2}+\dfrac{(1{+}t)^2}{(2{+}t)^2}\,x_5{-}u_2{+}\dfrac{\cos t}{100{-}t},\\
\dot x_4 = \dfrac{1}{2{+}3t{+}t^2}\,x_4-\dfrac{(1{+}t)^3}{(2{+}t)^3}\,x_5+\dfrac{1{+}t}{2{+}t}\,u_2-\dfrac{(1{+}t)\cos t}{(2{+}t)(100{-}t)},\\
\dot x_5 = -\dfrac{(2{+}t)^2}{(1{+}t)^2}\,x_4-\dfrac{1}{2{+}3t{+}t^2}\,x_5, \qquad\qquad t\in[0,90],
\end{cases}
\tag{60}
$$

с ограничениями на управление вида (3) при $l = 2$ с $d_0 = 10$, $d_1 = 30$, $d_2 = 100$.

Матрицы $A(t)$, $B(t)$ и вектор-функция $g(t)$ системы (60) имеют вид

$$A(t) = \begin{pmatrix} \frac{3+3t+t^2}{2+3t+t^2} & 1 & 0 & -\frac{2+t}{1+t} & -\frac{3+3t+t^2}{(2+t)^2} \\ \frac{2+t}{1+t} & 0 & 0 & 0 & -1, \\ 0 & -\frac{2+t}{1+t} & -\frac{1}{2+3t+t^2} & -\frac{1}{(1+t)^2} & \frac{(1+t)^2}{(2+t)^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2+3t+t^2} & -\frac{(1+t)^3}{(2+t)^3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{(2+t)^2}{(1+t)^2} & -\frac{1}{2+3t+t^2} \end{pmatrix},$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} \frac{1+t}{2+t} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & \frac{1+t}{2+t} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \\ \frac{\cos t}{100-t} \\ -\frac{(1+t)\cos t}{(2+t)(100-t)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

и удовлетворяют условиям теоремы 1. Для этой системы выполнено условие (4), где $n_1 = 3$, $n_2 = 2$,

$$K(t) = \begin{pmatrix} \frac{1+t}{2+t} & \frac{1+t}{2+t} & \frac{3+2t}{2+t} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2+t}{1+t} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1+t}{2+t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2+t}{1+t} \end{pmatrix}, \quad \det K(t) = 1,\ t \in [0,90].$$

Отметим, что поскольку $\mathrm{rang}(b_1(t), \Delta b_1(t), \Delta^2 b_1(t), \Delta^3 b_1(t), \Delta^4 b_1(t)) = 3$, $\mathrm{rang}(b_2(t), \Delta b_2(t), \Delta^2 b_2(t), \Delta^3 b_2(t), \Delta^4 b_2(t)) = 2$, $t \in [0,90]$, то система (60) не является полностью управляемой только u_1 или u_2.

Определим вектор-функции $c_1(t)$, $c_2(t)$ равенствами (6), которые принимают вид $c_1(t) = \left(0,\, 0,\, -\frac{1+t}{2+t},\, -1,\, 0\right)^*$, $c_2(t) = \left(0,\, 0,\, 0,\, 0,\, -\frac{1+t}{2+t}\right)^*$. Тогда невырожденная матрица $L(t)$ из (7) и обратная к ней матрица $L^{-1}(t)$ имеют вид

$$L(t)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1+t}{2+t} & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ \frac{2+t}{1+t} & 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1+t}{2+t}\\ 0 & 0 & 0 & \frac{2+t}{1+t} & 0 \end{pmatrix},\ L^{-1}(t)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1+t}{2+t} & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -\frac{2+t}{1+t} & 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1+t}{2+t}\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2+t}{1+t} & 0 \end{pmatrix}$$

($\det L(t)=1,\ \det L^{-1}(t)=1$). Система (60) заменой переменных $z=L(t)x$, которая имеет вид

$$\begin{aligned} &z_1=-\frac{1+t}{2+t}\,x_3-x_4, \quad z_2=x_2, \quad z_3=\frac{2+t}{1+t}\,x_1-x_5,\\ &z_4=-\frac{1+t}{2+t}\,x_5, \quad z_5=\frac{2+t}{1+t}\,x_4, \end{aligned} \tag{61}$$

отображается на систему

$$\begin{cases} \dot z_1=z_2,\\ \dot z_2=z_3,\\ \dot z_3=\dfrac{2+t}{1+t}\,z_2+z_3+u_1+\dfrac{(2+t)\sin t}{1+t},\\ \dot z_4=z_5,\\ \dot z_5=\dfrac{1+t}{2+t}\,z_4+u_2+\dfrac{\cos t}{t-100}. \end{cases}$$

Вектор-функция $g(t)$ удовлетворяет условию (8), причем

$$\widetilde{d}_0=\frac{4+\pi}{2+\pi}=1.3...,\ \widetilde{d}_1=\frac{\sqrt{400000001}}{10000}=2.0...,\ \widetilde{d}_2=\frac{\sqrt{1000024990001}}{500000}=2.0... .$$

Таким образом, система (60) удовлетворяет условиям теоремы 1.

Выберем $\alpha=5$ и построим управление $u_{f,5}(t,x)$, переводящее заданную точку $x_0=(x_{10},x_{20},x_{30},x_{40},x_{50})^*$ окрестности $Q_{f,5}(0)$ начала координат в начало координат за свободное время и вместе со своими производными первого и второго порядков удовлетворяющее заданным ограничениям, в виде (18). Для этого выберем набор f из функций $f_1(s)$, $f_2(s)$ вида

$$f_1(s)=\begin{cases} 4 & \text{при } s\in[0,1],\\ 2 & \text{при } s\in(1,2],\\ 1 & \text{при } s\in(2,4],\\ 0 & \text{при } s>4, \end{cases} \qquad f_2(s)=\begin{cases} 2 & \text{при } s\in[0,2],\\ 1 & \text{при } s\in(2,4],\\ 0 & \text{при } s>4. \end{cases} \tag{62}$$

Тогда матрицы $F_{f,5}^{-1}(\Theta)$, $F_{f,5}(\Theta)$ имеют вид

$$F_{f,5}^{-1}(\Theta)=\begin{pmatrix} \frac{529\Theta}{10} & -\frac{137\Theta^{4/5}}{4} & \frac{37\Theta^{3/5}}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{137\Theta^{4/5}}{4} & \frac{74\Theta^{3/5}}{3} & -11\Theta^{2/5} & 0 & 0 \\ \frac{37\Theta^{3/5}}{3} & -11\Theta^{2/5} & 8\Theta^{1/5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24\Theta^{3/5} & -10\Theta^{2/5} \\ 0 & 0 & 0 & -10\Theta^{2/5} & 6\Theta^{1/5} \end{pmatrix}, \qquad (63)$$

$$F_{f,5}(\Theta)=\begin{pmatrix} \frac{20610}{525549\Theta} & \frac{37350}{525549\Theta^{4/5}} & \frac{5595}{15014\Theta^{3/5}} & 0 & 0 \\ \frac{37350}{525549\Theta^{4/5}} & \frac{73194}{525549\Theta^{3/5}} & \frac{12303}{15014\Theta^{2/5}} & 0 & 0 \\ \frac{5595}{15014\Theta^{3/5}} & \frac{12303}{15014\Theta^{2/5}} & \frac{40671}{60056\Theta^{1/5}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{22\Theta^{3/5}} & \frac{5}{22\Theta^{2/5}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{22\Theta^{2/5}} & \frac{6}{11\Theta^{1/5}} \end{pmatrix}. \qquad (64)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} &\|F_f\|=2.2695..., \quad L_{\max}=\max_{t\in[0,90]}\|L(t)\|=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(21+\sqrt{377})}, \\ &\|F_f^{-1}\|=79.575..., \quad L_1=\max_{t\in[0,90]}\|L^{-1}(t)\|=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(21+\sqrt{377})}, \\ &\|D_5(\Theta)\|^2\|D_5^{-1}(\Theta)\|^2=\max\left\{\Theta^{-4/5},\,\Theta^{4/5}\right\}, \quad \lambda_{f,5}=0.0774..., \\ &(90\lambda_{f,5})^5/3125=5.2589..., \end{aligned}$$

то из условия (30) при $\sigma\in[0.95,1)$, $\delta\in[0.99,1)$, $\overline{\Theta}=3\cdot10^{18}$ можно выбрать постоянную $c_{f,5}=1$. Тогда $\widehat{T}_{f,5}=64.57466464025185...$.

Найдем условие выбора числа a_0. Поскольку $\|A_f\|=\sqrt{207718858}/7507$, $\overline{\beta_0}=0.80689...$, $\overline{\beta_1}=6.15245...$, то $\sigma_0=1$, $\sigma_1=2.4040064320216015...$, $\sigma_2=9.858675706536474...$. Поскольку

$$\|B_0P_f\|=\|A_0B_0P_f\|=\|A_0^2B_0P_f\|=3\sqrt{508535065}/30028,$$

то из равенств (49) находим $\ell_0^{(0)}=\ell_0^{(1)}=\ell_0^{(2)}=1$, $\ell_1^{(1)}=\ell_1^{(2)}=3.2529...$, $\ell_2^{(2)}=8.6691...$. Поскольку

$$\begin{aligned} &\max_{t\in[0,\widehat{T}_{f,5}]}\|M^{-1}(t)P_f\|=3\sqrt{508535065}/30028, \\ &\max_{t\in[0,\widehat{T}_{f,5}]}\|\left(M^{-1}(t)\right)^{(1)}P_f\|=\max_{t\in[0,\widehat{T}_{f,5}]}\|\left(M^{-1}(t)\right)^{(2)}P_f\|=0, \end{aligned}$$

то, согласно (51), имеем $\eta_0=4.4890...$, $\eta_1=13.6993...$, $\eta_2=50.1019...$. Следовательно, условие (53) выбора числа a_0 имеет вид $0<a_0\le0.0231...$. Выберем $a_0=23/1000$.

Из уравнения (12), которое принимает вид

$$
\begin{gathered}
\frac{23}{500}\Theta^2-\Big(\frac{6(2+t)^2}{11(1+t)^2}x_4^2+\frac{40671}{60056}\left(\frac{2+t}{1+t}\,x_1-x_5\right)^2\Big)\Theta^{4/5}+\\
+\Big(-\frac{12303}{7507}\,x_2\left(\frac{2+t}{1+t}\,x_1-x_5\right)+\frac{5}{11}\,x_4x_5\Big)\Theta^{3/5}-\Big(\frac{73194}{52549}\,x_2^2-\\
-\frac{5595}{7507}\left(\frac{1+t}{2+t}\,x_3+x_4\right)\left(\frac{2+t}{1+t}\,x_1-x_5\right)+\frac{3(1+t)^2}{22(2+t)^2}\,x_5^2\Big)\Theta^{2/5}+\\
+\frac{74700}{52549}x_2\left(\frac{1+t}{2+t}\,x_3+x_4\right)\Theta^{1/5}-\frac{20610}{52549}\left(\frac{1+t}{2+t}\,x_3+x_4\right)^2=0,
\end{gathered}
\tag{65}
$$

при $x \neq 0$ определим единственное положительное решение $\Theta = \Theta_{f,5}(t,x)$ — функцию управляемости и рассмотрим область $Q_{f,\alpha}(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : \Theta_{f,5}(t,x) \leq 1\}$, $t \in [0,90]$.

Управление $u_{f,5}(t,x)$ из (25), которое имеет вид

$$
u(t,x)=\begin{pmatrix}
-\frac{5595z_1}{7507\Theta^{3/5}}-\frac{(2+t)z_2}{1+t}-\frac{12303z_2}{7507\Theta^{2/5}}-z_3-\frac{40671z_3}{30028\Theta^{1/5}}-\frac{(2+t)\sin t}{1+t}\\
\frac{\cos t}{100-t}-\frac{(1+t)z_4}{2+t}-\frac{5z_4}{22\Theta^{2/5}}-\frac{6z_5}{11\Theta^{1/5}}
\end{pmatrix},
$$

решает задачу синтеза инерционных управлений для системы (60) в области $Q_{f,5}(t)$, $t \in [0,90]$, и вместе с производными

$$
\begin{gathered}
\dot u_{1_{f,5}}(t,x)=-\frac{(2+t)\cos t}{1+t}+\frac{z_2}{(1+t)^2}-\frac{1119(3\beta z_1+5\Theta^{1/5}z_2)}{7507\Theta^{4/5}}-\frac{(2+t)z_3}{1+t}-\\
-\frac{12303(2\beta z_2+5\Theta^{1/5}z_3)}{37535\Theta^{3/5}}+\frac{3(7460z_1+16404\Theta^{1/5}z_2+13557\Theta^{2/5}z_3)}{30028\Theta^{3/5}}+\\
+\frac{40671(111900z_1+246060\Theta^{1/5}z_2+(203355-30028\beta\Theta^{2/5}z_3}{4508403920\Theta^{4/5}}+\frac{\sin t}{(1+t)^2},
\end{gathered}
$$

$$
\dot u_{2_{f,5}}(t,x)=\frac{\cos t+(t-100)\sin t}{(t-100)^2}+\left(\frac{15-11\beta}{121\Theta^{3/5}}-\frac{1}{(2+t)^2}\right)z_4+\left(\frac{\frac{17}{242}-\frac{6\beta}{55}}{\Theta^{2/5}}-\frac{1+t}{2+t}\right)z_5,
$$

$$
\begin{gathered}
\ddot u_{1_{f,5}}(t,x)=\frac{2z_3+2\cos t}{(1+t)^2}+\frac{t(5+t(4+t))\sin t-2z_2}{(1+t)^3}+\frac{3(2+t)}{30028(1+t)\Theta^{3/5}}\times\\
\times\Big(7460z_1+16404\Theta^{1/5}z_2+13557\Theta^{2/5}z_3\Big)-\frac{1119}{37535\Theta+f,5}\Big(3(4\beta^2+5\dot\beta\Theta^{1/5}z_1+\\
+5\Theta^{1/5}(6\beta z_2+5\Theta^{1/5}z_3)\Big)+\frac{12303}{5635504900\Theta}\Big(559500z_1+\Theta^{1/5}(-4(-307575+
\end{gathered}
$$

$$+45042\beta^2+75070\dot\beta\Theta^{1/5})z_2+5(203355-120112\beta\Theta^{1/5}z_3)\Big)+\frac{3}{4508403920\Theta^{4/5}}\times$$
$$\times\Big(22380(30028\beta-67785)z_1+\Theta^{1/5}(4(246289656\beta-553947755)z_2+$$
$$+3(135696532\beta\Theta^{1/5}z_3-97995725)\Big)-\frac{40671}{676891764548800\Theta}\Big(559500(40671-$$
$$-30028\beta)z_1+\Theta^{1/5}(60(553947755-492579312\beta)z_2+(4409807625-$$
$$-18319031820\beta+1803361568\beta^2+4508403920\dot\beta\Theta^{1/5})\Theta^{1/5}z_3)\Big),$$

$$\ddot u_{2_{f,5}}(t,x)=\frac{(9998+t(t-200))\cos t+2(100-t)\sin t}{(t-100)^3}+\Bigg(\frac{2}{(2+t)^3}+$$
$$+\frac{6050(1+t)}{26620(2+t)\Theta^{2/5}}+\frac{-425+132(20-11\beta)\beta-2420\dot\beta\Theta^{1/5}}{26620\Theta^{4/5}}\Bigg)z_4-$$
$$-\Bigg(\frac{2}{(2+t)^2}+\frac{2(11\beta-15)(95+66\beta)}{33275\Theta^{3/5}}+\frac{6\dot\beta}{55\Theta^{2/5}}-\frac{6(1+t)}{11(2+t)\Theta^{1/5}}\Bigg)z_5,$$

где $z_1=z_1(t,x)$, $\ldots$, $z_5=z_5(t,x)$ имеют вид (61), $\Theta=\Theta_{f,5}(t,x)$ — положительное решение уравнения (65),

$$\beta=\Big(5(424232146800z_1^2+43560z_1(290780020\Theta^{1/5}z_2+10474087\Theta^{2/5}z_3)+$$
$$+\Theta^{2/5}(965626005168z_2^2+6937989466632\Theta^{1/5}z_2z_3+7(21343468905\Theta^{2/5}\times$$
$$\times z_3^2+450840392(25z_4^2+54\Theta^{1/5}z_4z_5+34\Theta^{2/5}z_5^2))))\Big)\Big/\Big(330308(9068400\times$$
$$\times z_1^2+2640z_1(11205\Theta^{1/5}z_2+5222\Theta^{2/5}z_3)+\Theta^{2/5}(25764288z_2^2+26525268\times$$
$$\times\Theta^{1/5}z_2z_3+9395001\Theta^{2/5}z_3^2+210196(12z_4^2+35\Theta^{1/5}z_4z_5+36\Theta^{2/5}z_5^2)))\Big),$$

$$\dot\beta=\Big(47916000(1330618347422\beta+1181638931654\beta^2-410217617355)z_1^2+$$
$$+239580(10(63061988673320\beta+81386264897409\beta^2-10045683074000)\times$$
$$\times z_2^2+(102775081289300+115385812004400\beta+386880794948813\beta^2)z_3\times$$
$$\times\Theta^{1/5})\Theta^{1/5}z_1+\Theta^{2/5}(95832(78167242241900+902953397665200\beta+\beta^2\times$$
$$\times1718820472482947)z_2^2+23958(2311597598091600+893755121913080\times$$
$$\times\beta+6401409236121827\beta^2)\Theta^{1/5}z_2z_3+7(11979(199278044898350-$$
$$-28375502557220\beta+409014268923807\beta^2)\Theta^{2/5}z_3^2-47382423518416\times$$
$$\times((6750-27500\beta+987\beta^2)z_4^2-5(560+7920\beta+1269\beta^2)\Theta^{1/5}z_4z_5-$$
$$-(9300+14080\beta+8253\beta^2)\Theta^{2/5}z_5^2)))\Big)\Big/\Big(38186181202400\Theta^{1/5}(9068400\times$$
$$\times z_1^2+2640z_1(11205\Theta^{1/5}z_2+5222\Theta^{2/5}z_3)+\Theta^{2/5}(25764288z_2^2+26525268\times$$
$$\times\Theta^{1/5}z_2z_3+9395001\Theta^{2/5}z_3^2+210196(12z_4^2+35\Theta^{1/5}z_4z_5+36\Theta^{2/5}z_5^2)))\Big),$$

удовлетворяет заданным ограничениям $\|u_{f,5}(t,x)\| \leq 10$, $\|\dot{u}_{f.5}(t,x)\| \leq 30$, $\|\ddot{u}_{f,5}(t,x)\| \leq 100$.

Найдем единственное положительное решение $\Theta^0_{f,\alpha}$ уравнения (65) при $t = 0$ и $x_1 = x_{10}$, $x_2 = x_{20}$, $x_3 = x_{30}$, $x_4 = x_{40}$, $x_5 = x_{50}$. Найдем решение $z(t) = (z_1(t), z_2(t), z_3(t), z_4(t), z_5(t))^*$, $\theta(t)$ задачи Коши

$$\left\{\begin{aligned}
&\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = z_3, \quad \dot{z}_3 = -\frac{5595z_1}{75507\theta^{3/5}_{f,5}} - \frac{12303z_2}{75507\theta^{2/5}_{f,5}} - \frac{40671z_3}{300028\theta^{1/5}_{f,5}},\\
&\dot{z}_4 = z_5, \quad \dot{z}_5 = -\frac{5z_4}{22\theta^{2/5}_{f,5}} - \frac{6z_5}{11\theta^{1/5}_{f,5}},\\
&\dot{\theta} = -\theta^{4/5}_{f,5}\Bigg(\frac{31304025z_1^2}{563550490\theta_{f,5}} + \frac{654255450z_1z_2}{3944853430\theta^{4/5}} + \frac{498773763z_2^2}{3944853430\theta^{3/5}_{f,5}} +\\
&\quad + \frac{471333915z_1z_3}{7889706860\theta^{3/5}_{f,5}} + \frac{716734449z_2z_3}{7889706860\theta^{2/5}_{f,5}} + \frac{176392305z_3^2}{9016807840\theta^{1/5}_{f,5}} + \frac{25z_4^2}{2420\theta^{3/5}_{f,5}} +\\
&\quad + \frac{27z_4z_5}{1210\theta^{2/5}_{f,5}} + \frac{17z_5^2}{1210\theta^{1/5}_{f,5}}\Bigg)\Bigg/\Bigg(\frac{41220z_1^2}{525490\theta_{f,5}} + \frac{134460z_1z_2}{525490\theta^{4/5}_{f,5}} + \frac{585552z_2^2}{2627450\theta^{3/5}_{f,5}} +\\
&\quad + \frac{8952z_1z_3}{75070\theta^{3/5}_{f,5}} + \frac{86121z_2z_3}{375350\theta^{2/5}_{f,5}} + \frac{122013z_3^2}{1501400\theta^{1/5}_{f,5}} + \frac{12z_4^2}{550\theta^{3/5}_{f,5}} + \frac{7z_4z_5}{110\theta^{2/5}_{f,5}} + \frac{36z_5^2}{550\theta^{1/5}_{f,5}}\Bigg),\\
&z_1(0) = z_{10},\ z_2(0) = z_{20},\ z_3(0) = z_{30},\ z_4(0) = z_{40},\ z_5(0) = z_{50},\\
&\theta_{f,5}(0) = \Theta^0_{f,5},
\end{aligned}\right. \tag{66}$$

где $z_0 = (z_{10}, z_{20}, z_{30}, z_{40}, z_{50})^* = L(0)x_0$.

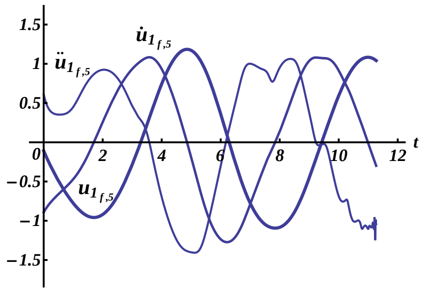

Рис. 7: Графики первых компонент управления и его производных на траектории.

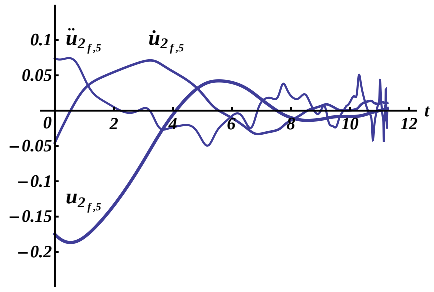

Рис. 8: Графики вторых компонент управления и его производных на траектории.

Тогда управление $u_{f,5}(t,x)$, которое переводит заданную точку $x_0 = (x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{40}, x_{50})^*$ области $Q_{f,5}(0)$ в начало координат за время $T_{f,5}(0,x_0)$ по траектории $x(t) = L^{-1}(t)z(t)$, имеющей вид

$$x(t) = \left(\frac{1+t}{2+t}\, z_3(t) - z_4(t), z_2(t), -\frac{2+t}{1+t}\, z_1(t) - z_5(t), \frac{1+t}{2+t}\, z_5(t), -\frac{2+t}{1+t}\, z_4(t)\right)^*,$$

и удовлетворяет заданным ограничениям, на траектории $x(t)$ имеет вид

$$u_{f,5}(t,x(t)) = \begin{pmatrix} -\dfrac{5595z_1(t)}{7507\theta_{f,5}^{3/5}(t)} - \dfrac{(2+t)z_2(t)}{1+t} - \dfrac{12303z_2}{7507\theta_{f,5}^{2/5}(t)} - z_3(t) - \\ -\dfrac{40671z_3(t)}{30028\theta_{f,5}^{1/5}(t)} - \dfrac{(2+t)\sin t}{1+t} \\ \dfrac{\cos t}{100-t} - \dfrac{(1+t)z_4(t)}{2+t} - \dfrac{5z_4(t)}{22\theta_{f,5}^{2/5}(t)} - \dfrac{6z_5(t)}{11\theta_{f,5}^{1/5}(t)} \end{pmatrix},$$

где $z(t)$, $\theta_{f,5}(t)$ — решение задачи Коши (66).

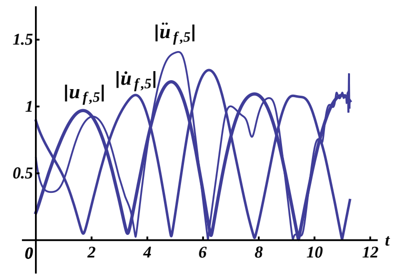

Рис. 9: Графики норм управления, его первой и второй производных на траектории.

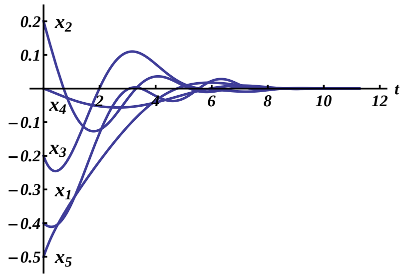

Рис. 10: Графики компонент траектории $x(t)$ на отрезке времени $[0, T_{f,5}]$.

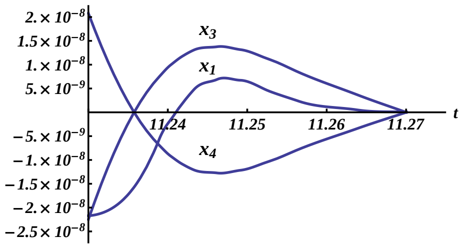

Рис. 11: Графики $x_1(t)$, $x_3(t)$, $x_4(t)$ на отрезке времени $[11.23, T_{f,5}]$.

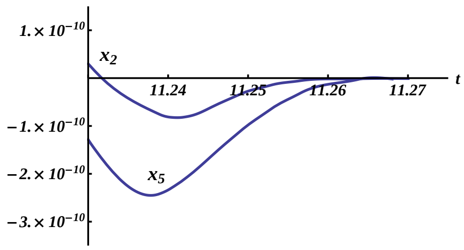

Рис. 12: Графики $x_2(t)$, $x_5(t)$ на отрезке времени $[11.23, T_{f,5}]$.

Графики компонент управления $u_{f,5}(x(t),t)$, которое переводит точку $x_0 = (-0.4, 0.2, -0.2, 0, -0.5)^*$ в начало координат за время $T_{f,5} = 11.270037...$, его первой и второй производных изображены на рис. 7, 8. При этом оценки (31) на время движения имеют вид $6.0352... \le T_{f,5} \le 62.893...$. Графики норм управления $u_{f,5}(x(t),t)$, его первой и второй производных на траектории изображены на рис. 9. Очевидно, что управление и его производные удовлетворяют заданным ограничениям. Графики компонент траектории $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), x_5(t))^*$ на отрезке времени $[0, T_{f,5}]$ изображены на рис. 10, а на отрезке времени $[11.23, T_{f,5}]$ — изображены на рис. 11, 12.

3. Стабилизация систем инерционными управлениями

Рассмотрим задачу стабилизации инерционными управлениями системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + g(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^r, t \in [t_0, +\infty), \tag{67}$$

с матрицами $A(t) \in C^{(2n-2+l)}[t_0, +\infty)$, $B(t) \in C^{(2n-1+l)}[t_0, +\infty)$ и удовлетворяющей условию (8) при $t \in [t_0, +\infty)$ вектор-функцией $g(t) \in C^{(l)}[t_0, +\infty)$, для которых выполнены условия

$$\begin{aligned} &\sup_{t\in[t_0,\infty)} \|A^{(k)}(t)\| < \infty \quad \text{для} \quad k = 0, 1, \ldots, 2n-2+l, \\ &\sup_{t\in[t_0,\infty)} \|B^{(k)}(t)\| < \infty \quad \text{для} \quad k = 0, 1, \ldots, 2n-1+l, \\ &\sup_{t\in[t_0,\infty)} \|g^{(k)}(t)\| < \infty \quad \text{для} \quad k = 0, 1, \ldots, l, \end{aligned} \tag{68}$$

где $l \geq 1$ — заданное натуральное число.

Задачей стабилизации инерционными управлениями системы (67) в некоторой области $Q_f(t)$, являющейся для каждого $t \in [t_0, +\infty)$ окрестностью начала координат, называется задача построения управления $u = u(t, x)$ такого, что:

1) для любой точки $x_0 \in Q_f(t_0)$ существует начинающаяся в момент времени t_0 в точке x_0 траектория $x(t)$ системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t, x) + g(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \ t \in [t_0, +\infty), \tag{69}$$

такая, что $x(t) \in Q_f(t)$ при $t \in [t_0, +\infty)$, $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$;

2) управление $u(t, x)$ и до заданного порядка l его производные $u^{(1)}(t, x)$, …, $u^{(l)}(t, x)$ в силу системы (69) удовлетворяют ограничениям

$$\|u^{(k)}(t, x)\| \leq d_k, \quad k = 0, 1, \ldots, l, \ t \in [t_0, +\infty), \ x \in Q_f(t), \tag{70}$$

где d_0, …, d_l — заданные положительные числа.

3.1. Решение задачи стабилизации

Решение этой задачи дает следующая теорема.

Теорема 2. *Рассмотрим систему (67), для которой* $\operatorname{rang} B(t) = r$ *при* $t \in [t_0, +\infty)$, *выполнено условие (4) и имеют место равенства (5) при* $t \in [t_0, \infty)$, *с ограничениями на управление и его производные до заданного порядка* l *вида (70).*

Пусть:

1) *вектор-функция* $g(t)$ *удовлетворяет условию (8) при* $t \in [t_0, +\infty)$ *и справедливы соотношения (68);*

2) в ограничениях на управление (70) числа

$$d_k > \widetilde{d}_k = \sup_{t\in[t_0,+\infty)} \Big\| \sum_{i=0}^{k} C_k^i \left(M^{-1}(t)\right)^{(k-i)} B_0^* \big(L(t)g(t)\big)^{(i)} \Big\|, \ k = 0,1,\dots,l;$$

3) $f \in \mathcal{F}$ — набор произвольных неотрицательных невозрастающих функций $f_1(s), \dots, f_r(s)$ на полуоси $[0,+\infty)$, соответственно, с не менее, чем $n_1, \dots, n_r$ числом точек убывания и удовлетворяющих условиям (9);

4) число c_f удовлетворяет условию

$$0 < c_f \le \frac{1}{\|F_f^{-1}\|} \min_{0\le k\le l} \frac{\big(d_k - \widetilde{d}_k\big)^2}{(S_k + M_k)^2}, \tag{71}$$

где числа

$$S_k = \sup_{t\in[t_0,+\infty)} \Big\| \sum_{i=0}^{k} C_k^i \left(M^{-1}(t)\right)^{(k-i)} B_0^* \sum_{j=0}^{i} C_i^j \widetilde{A}^{(i-j)}(t) A_f^j \Big\|,$$

$$M_k = \sup_{t\in[t_0,+\infty)} \Big\| \sum_{i=0}^{k} C_k^i \left(M^{-1}(t)\right)^{(k-i)} P_f A_f^i \Big\|, \quad k = 0,1,\dots,l.$$

Тогда управление

$$u_f(t,x) = -M^{-1}(t) B_0^* \bigg(\frac{1}{2} F(0) F_f L(t)x + \Big(\dot{L}(t) + L(t)A(t)\Big)x + L(t)g(t) \bigg) \tag{72}$$

в области $\mathrm{Q}_f(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : (F_f L(t)x, L(t)x) \le c_f\}$ при $t \in [t_0,+\infty)$ решает задачу стабилизации и удовлетворяет в ней ограничениям (70).

Доказательство. Определим неотрицательную функцию $\Theta_f(t,x)$ равенством

$$\Theta_f(t,x) = (F_f L(t)x, L(t)x), \quad t \in [t_0,+\infty), \ x \in \mathbb{R}^n. \tag{73}$$

Покажем, что $\Theta_f(t,x)$ является функцией Ляпунова для системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u_f(t,x) + g(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \ u \in \mathbb{R}^r, \ t \in [t_0,+\infty). \tag{74}$$

Для этого перепишем управление (72) в виде

$$u_f(t,x) = M^{-1}(t) \Big(P_f L(t)x - B_0^* \widetilde{A}(t) L(t)x - B_0^* L(t)g(t) \Big), \tag{75}$$

где матрицы P_f, $\widetilde{A}(t)$ имеют, соответственно, вид (19), (26). Вычислим производную функции $L(t)x$ в силу системы (74) с управлением $u_f(t,x)$ вида (75). В силу равенств $L(t)B(t) = B_0 M(t)$, $(E - B_0 B_0^*)\widetilde{A}(t) = A_0$, (8), имеем

$$\frac{d}{dt}(L(t)x)\Big|_{(74)} = A_f L(t)x, \tag{76}$$

где матрица A_f из (19). Тогда из равенства (73), в силу равенства (76), получаем равенство

$$\dot{\Theta}_f(t,x) = -(W_f L(t)x, L(t)x), \quad t \in [t_0, +\infty),\ x \in \mathbb{R}^n,$$

где матрица W_f из (20). Из этого равенства, используя равенство (73), получаем

$$\dot{\Theta}_f(t,x) = -\frac{(W_f L(t)x, L(t)x)}{(F_f L(t)x, L(t)x)}\,\Theta_f(t,x), \quad x \neq 0, \quad \dot{\Theta}_f(t,0) = 0,\ t \in [t_0, +\infty).$$

Отсюда, в силу (29), получаем неравенство

$$\dot{\Theta}_f(t,x) \le -\lambda_f \Theta_f(t,x),\ x \neq 0, \quad \dot{\Theta}_f(t,0) = 0, \quad t \in [t_0, +\infty), \tag{77}$$

где $\lambda_f > 0$ — наименьшее собственное значение матрицы $F_f^{-1} W_f$. Следовательно, функция $\Theta_f(t,x)$ является функцией Ляпунова для системы (74). Из соотношений (77) следует, что для траектории $x(t)$ системы (74), начинающейся в любой точке $x_0 \in Q_f(t_0)$ в момент времени $t = t_0$, справедливо включение $x(t) \in Q_f(t)$ при $t \in [t_0, \infty)$.

Вычислим производные управления $u_f(t,x)$ в силу системы (74) и установим, что управление и его производные удовлетворяют заданным ограничениям. Из равенства (75), используя равенство (76), получаем, что производная k-го порядка в силу системы (74) управления $u_f(t,x)$ определяется равенством

$$\begin{aligned} u_f^{(k)}(t,x) = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \left(M^{-1}(t)\right)^{(k-i)} \Bigg(P_f A_f^i L(t)x - B_0^* \big(L(t)g(t)\big)^{(i)} - \\ - B_0^* \sum_{j=0}^{i} C_i^j \widetilde{A}^{(i-j)}(t) A_f^j L(t)x \Bigg), \quad k = 0, 1, \ldots, l. \end{aligned} \tag{78}$$

Из (73) следует неравенство

$$\|L(t)x\| \le \sqrt{\|F_f^{-1}\| (F_f L(t)x, L(t)x)}, \quad t \in [t_0, \infty),\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда для из (78) получаем

$$\|u_f^{(k)}(t,x)\| \le (M_k + S_k)\sqrt{\|F_f^{-1}\| c_f} + \widetilde{d}_k,\ \ k = 0, 1, \ldots, l,\ t \in [t_0, \infty),\ x \in Q_f(t).$$

Отсюда, учитывая выбор числа c_f из условия (71), получаем

$$\|u_f^{(k)}(t,x)\| \le d_k, \quad k = 0, 1, \ldots, l,\ t \in [t_0, \infty),\ x \in Q_f(t).$$

Таким образом, для системы (67) управление $u_f(t,x)$ вида (72) решает задачу стабилизации инерционными управлениями в области $Q_f(t)$. $\square$

3.2. Нахождение траектории

Рассмотрим нахождение соответствующей управлению $u_f(t,x)$ траектории $x(t)$, начинающейся в момент времени t_0 в произвольной точке $x_0 \in Q_f(t_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : (F_f L(t_0)x, L(t_0)x \le c_f\}$ и стремящейся в начало координат при $t \to +\infty$, системы (67), которая удовлетворяет условиям теоремы 2. Выберем набор f из произвольных неотрицательных невозрастающих функций $f_1(s)$, $\ldots$, $f_r(s)$ на полуоси $[0,+\infty)$, соответственно, с не менее, чем n_1, $\ldots$, n_r точками убывания, которые удовлетворяют условиям (9). Определим число c_f из условия (71). Выберем точку $x_0 \in Q_f(t_0)$ и рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u_f(t,x) + g(t), \quad t \in [t_0,+\infty), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{79}$$

В силу равенства (76), заменой переменных $z = L(t)x$ эта задача Коши сводится к задаче Коши $\dot{z} = A_f z$, $z(t_0) = L(t_0)x_0$, решение $z(t)$ которой определяется равенством $z(t) = e^{A_f(t-t_0)}L(t_0)x_0$. Тогда траектория $x(t)$, которая начинается в точке $x_0 \in Q_f(t_0)$ в момент времени t_0 и стремится в начало координат при $t \to +\infty$, является решением задачи Коши (79) и определяется равенствами $x(t) = L^{-1}(t)z(t) = L(t)e^{A_f(t-t_0)}L(t_0)x_0$ при $t \in [t_0,+\infty)$.

Пример 3. Рассмотрим задачу стабилизации инерционными управлениями линейной неавтономной неоднородной системы вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - e^{\cos t}x_2 + x_3 + u_1 - 1, \\ \dot{x}_2 = x_1 - (1+e^{-t+\cos t})x_2 + e^{-t}x_3 - x_4 + e^{-t}u_1 - e^{-t}, \\ \dot{x}_3 = (1 - e^{\cos t} - e^{-t+2\cos t})x_2 + e^{-t+\cos t}x_3 - e^{\cos t}x_4 + \\ \qquad +(1+e^{\cos t}\sin t)x_5 + e^{-t+\cos t}u_1 - e^{-t+\cos t}, \\ \dot{x}_4 = (-1+e^{-t}\sin t)x_1 + e^{-t+\cos t}x_2 - e^{-t}x_3 + x_5\sin t - e^{-t}u_1 + u_2 + \sin t, \\ \dot{x}_5 = (1+e^{-t+\cos t})x_2 - e^{-t}x_3 + x_4 - e^{-t}u_1 + e^{-t}, \quad t \in [0,+\infty), \end{cases} \tag{80}$$

с ограничениями на управление вида (70) при $l = 2$ с $d_0 = 25$, $d_1 = 30$, $d_2 = 50$.

Матрицы $A(t)$, $B(t)$ и вектор-функция $g(t)$ системы (80) имеют вид

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & -e^{\cos t} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1-e^{-t+\cos t} & e^{-t} & -1 & 0 \\ 0 & 1-e^{\cos t}-e^{-t+2\cos t} & e^{-t+\cos t} & -e^{\cos t} & 1+e^{\cos t}\sin t \\ -1+e^{-t}\sin t & e^{-t+\cos t} & -e^{-t} & 0 & \sin t \\ 0 & 1+e^{-t+\cos t} & -e^{-t} & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{-t} & 0 \\ e^{-t+\cos t} & 0 \\ -e^{-t} & 1 \\ -e^{-t} & 0 \end{pmatrix} \ (\operatorname{rang} B(t) = 2, t \in [t_0,+\infty)), \ g(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -e^{-t} \\ -e^{-t+\cos t} \\ \sin t \\ e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Для этой системы выполнено условие (4), где $n_1 = 3$, $n_2 = 2$,

$$K(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 - e^{\cos t} & 0 & 0 \\ e^{-t} & 1 + e^{-t} & e^{-t}(1 + e^{t} - e^{\cos t}) & 0 & -1 \\ e^{-t+\cos t} & e^{-t+\cos t} & e^{-t}(e^{t} + e^{\cos t} - e^{2\cos t}) & 0 & -e^{\cos t} \\ -e^{-t} & -1 - e^{-t} & e^{-t}(-1 - e^{t} + e^{\cos t}) & 1 & 0 \\ -e^{-t} & -e^{-t} & e^{-t}(-1 + e^{\cos t}) & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\det K(t) = 1$ для всех $t \in [0, +\infty)$.

Определим вектор-функции $c_1(t)$, $c_2(t)$ равенствами (6), которые принимают вид $c_1(t) = \big(0,\, 0,\, 1,\, 0,\, e^{\cos t}\big)^*$, $c_2(t) = \big(e^{-t},\, 0,\, 0,\, 0,\, 1\big)^*$. Тогда невырожденная матрица $L(t)$ ($\det L(t) = 1$) из (7) и обратная к ней матрица $L^{-1}(t)$ имеют вид

$$L(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & e^{\cos t} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{-t} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & e^{-t} & -1 & 0 \\ 1 & 0 & e^{-t+\cos t} & -e^{\cos t} & 0 \\ 0 & -1 & -e^{-t} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -e^{-t} & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Система (80) заменой переменных $z = L(t)x$, которая принимает вид

$$z_1 = x_3 + e^{\cos t}x_5, \quad z_2 = x_2 + x_5, \quad z_3 = x_1, \quad z_4 = e^{-t}x_1 + x_5, \quad z_5 = x_2 + x_4, \qquad (81)$$

отображается на систему

$$\begin{cases} \dot z_1 = z_2, \\ \dot z_2 = z_3, \\ \dot z_3 = z_1 - e^{\cos t}z_2 + z_3 + u_1 - 1, \\ \dot z_4 = z_5, \\ \dot z_5 = z_4 \sin t - z_5 + u_2 - \cosh t + \sin t + \sinh t. \end{cases}$$

Вектор-функция $g(t)$ удовлетворяет условию (8) и

$$\widetilde d_0 = \sqrt{1 + (1 + e^{-3\pi/2})^2} = 1.4..., \quad \widetilde d_1 = 2, \quad \widetilde d_2 = 1 + \cosh\frac{\pi}{2} - \sinh\frac{\pi}{2} = 1.2... \,.$$

Таким образом, система (80) удовлетворяет условия теоремы 2.

Будем строить управление $u_f(t,x)$, которое вместе с производными первого и второго порядков удовлетворяет заданным ограничениям, в виде (72). Для этого выберем набор f из функций $f_1(s)$, $f_2(s)$ вида (62). Тогда матрицы $F_f^{-1} = F_{f,\alpha}^{-1}(1)$, $F_f = F_{f,\alpha}(1)$, где матрицы $F_{f,\alpha}^{-1}(\Theta)$, $F_{f,\alpha}(\Theta)$, соответственно, имеют вид (63), (64).

Так как

$$M_0 = \frac{3\sqrt{508535065}}{30028} = 2.25..., \quad M_1 = \frac{3\sqrt{291901326655120441}}{901680784} = 1.79...,$$

$$M_2 = \frac{3\sqrt{1595389890989868055928615 29}}{27075670581952} = 1.39...,\ S_0 = \sqrt{2+e^2} = 3.08...,$$

$$S_2 = 10.61...,\ S_1 = \frac{\sqrt{2523020497 + 2442537576e + 901680784e^2}}{30028} = 4.18...,$$

$\|F_f^{-1}\| = 79.57...$, то условие (71) выбора постоянной c_f принимает вид $0 < c_f \le 0.20728...$. Выберем $c_f = 0.2$ и рассмотрим область

$$Q_f(t) = \{x \in \mathbb{R}^5 : (F_f L(t)x, L(t)x) \le c_f\} = \Big\{x \in \mathbb{R}^5 :\ e^{-2t}(21(30028+ \\ +149127e^{2t})x_1^2 + 56e^t x_1((37535+135333e^t)x_2 + 61545e^t x_3 + 37535x_4+ \\ +22521x_5 + 135333e^t x_5 + 61545e^{t+\cos t}x_5) + 4e^{2t}(2240856x_2^2 + 453420x_3^2+ \\ +630588x_4^2 + 3960(415 + 229e^{\cos t})x_3x_5 + 525490x_4x_5 + 1767915x_5^2+ \\ +1643400e^{\cos t}x_5^2 + 453420e^{2\cos t}x_5^2 + 2x_2(821700x_3 + 630588x_4+ \\ +(1873013 + 821700e^{\cos t}x_5))) \le 924862\Big\},\quad t \in [0, +\infty).$$

Управление $u_f(t, x)$ вида (72), которое определяется равенством

$$u(t,x) = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{3102z_1}{7507} - \left(\dfrac{12303}{7507} - e^{\cos t}\right)z_2 - \dfrac{70699z_3}{30028} \\ e^{-t} - \sin t - \left(\dfrac{5}{22} + \sin t\right)z_4 + \dfrac{5z_5}{11} \end{pmatrix},$$

решает задачу стабилизации для системы (80) в области $Q_f(t)$, $t \in [0, +\infty)$, и вместе с производными

$$\dot u_f(t,x) = \begin{pmatrix} \dfrac{395560905z_1}{225420196} + \left(\dfrac{476382941}{225420196} - e^{\cos t}\sin t\right)z_2 + \dfrac{1397661093z_3}{901680784} + e^{\cos t}z_3 \\ -\cos t - \cosh t + \sinh t - \left(\dfrac{25}{242} + \cos t\right)z_4 - \left(\dfrac{115}{242} + \sin t\right)z_5 \end{pmatrix},$$

$$\ddot u_f(t,x) = \begin{pmatrix} -\dfrac{5595(1397661093 + 901680784e^{\cos t})z_1}{6768917645488} - \Big(\dfrac{5317521571839}{6768917645488} + \\ + \dfrac{12303e^{\cos t}}{7507} + e^{\cos t}\cos t - e^{\cos t}\sin^2 t\Big)z_2 + \dfrac{375033495989z_3}{27075670581952} - \\ -\dfrac{40671e^{\cos t}z_3}{30028} - 2z_3e^{\cos t}\sin t \\ \\ \dfrac{(575 + 6534\sin t)z_4}{5324} + \left(\dfrac{415}{2662} - 2\cos t + \dfrac{6\sin t}{11}\right)z_5 + \\ + \cosh t + \sin t - \sinh t \end{pmatrix},$$

где $z_1 = z_1(t, x)$, $\ldots$, $z_5 = z_5(t, x)$ имеют вид (81), удовлетворяет в ней заданным ограничениям $\|u_f(t, x)\| \le 25$, $\|\dot u_f(t, x)| \le 30$, $\|\ddot u_f(t, x)\| \le 50$.

Траектория $x(t)$, начинающаяся в произвольной точке $x_0 \in Q_f(0)$, где

$$Q_f(0) = \{x \in \mathbb{R}^5 : 3762255x_1^2 + 48(186738x_2^2 + 37785x_3^2 + 52549x_4^2 + \\ +2x_2(68475x_3 + 52549x_4)) + 8((1873013 + 821700e)x_2 + 1980(415 + \\ +229e)x_3 + 262745x_4)x_5 + 180(39287 + 44e(830 + 229e))x_5^2 + 56x_1 \times \\ \times(172868x_2 + 61545x_3 + 37535x_4 + 3(52618 + 20515e)x_5) \leq 924862\},$$

и стремящаяся к нулю при $t \to +\infty$, имеет вид

$$x(t) = \begin{pmatrix} z_3(t) \\ z_2(t) + e^{-t}z_3(t) - z_4(t) \\ z_1(t) + e^{-t+\cos t}(z_3(t) - e^t z_4(t)) \\ -z_2(t) - e^{-t}z_3(t) + z_4(t) + z_5(t) \\ -e^{-t}z_3(t) + z_4(t) \end{pmatrix},$$

где $z(t) = (z_1(t), z_2(t), z_3(t), z_4(t), z_5(t))^* = e^{A_f t}L(0)x_0$, а матрица A_f имеет вид

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{5595}{7507} & -\dfrac{12303}{7507} & -\dfrac{40671}{30028} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{5}{22} & -\dfrac{6}{11} \end{pmatrix}.$$

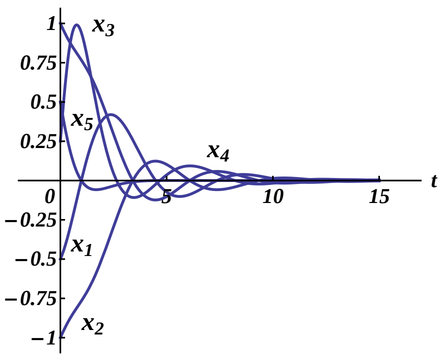

Рис. 13: Графики компонент траектории $x(t)$ на отрезке времени $[0, 15]$.

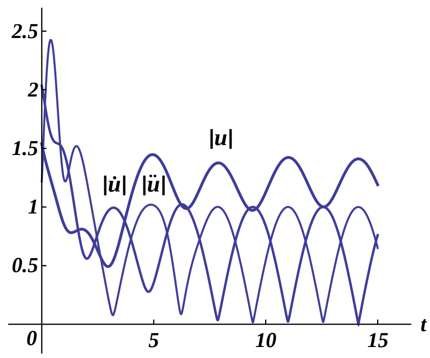

Рис. 14: Графики норм управления, его первой и второй производных на траектории на отрезке времени $[0, 15]$.

Графики компонент траектории $x(t)$, начинающейся в момент времени $t = 0$ в точке $x_0 = (-0.5, -1, 0.25, 1, 0.5)^*$ и стремящейся в начало координат при $t \to +\infty$, на отрезке времени $[0,15]$ изображены на рис. 13, при этом $\|x(15)\| = 0.005...$, $\|x(30)\| = 0.00002...$, $\|x(50)\| = 1.5... \times 10^{-8}$, $\|x(75)\| = 1.9... \times 10^{-12}$, $\|x(100)\| = 2.3... \times 10^{-16}$. Графики норм управления $u_f(t, x(t))$, его первой и второй производных на этой траектории изображены на рис. 14 на отрезке времени $[0,15]$.

Список литературы

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1961. – 391 с.
2. Бессонов Г. А., Коробов В. И., Скляр Г. М. Задача устойчивого синтеза ограниченных управлений для некоторого класса нестационарных систем // Прикладная математика и механика, 1988. – Т. 52. – Вып. 1. – С. 9–15.
3. Коробов В. И. Метод функции управляемости. – М.-Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Институт компьютерных исследований, 2007. – 576 с.
4. Бессонов Г. А., Коробов В. И. Каноническая форма линейных нестационарных управляемых систем и задача синтеза // Динамические процессы и их устойчивость. — 1987. – С. 26–39.
5. Зубов В. И. Лекции по теории управления. – М.: Наука, 1975. – 391 с.
6. Коробов В. И., Скорик В.А. Синтез инерционных управлений для нестационарных систем // Прикладная математика и механика, 2003. – Т. 67. – Вып. 5. – С. 739–751.
7. Скорик В.А. Построение множества программных управлений, решающих задачу управляемости для некоторого класса линейных неавтономных неоднородных систем // Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія “Математика, прикладна математика і механіка”, 2013. – № 1061. – Вып. 67. – С. 53–84.

Статья получена: 12.05.2014; принята: 15.06.2014.