Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.9 № 1120, 2014, с.85–94

О решении матричных уравнений Ляпунова

С. М. Чуйко

Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ
chujko-slav@inbox.ru

Матричные уравнения Ляпунова широко используются в теории устойчивости движения, а также при решении дифференциальных уравнений Риккати. Если структура общего решения однородной части уравнения Ляпунова хорошо изучена, то решение неоднородного уравнения Ляпунова достаточно громоздко. В статье предложена формула построения частного решения неоднородного уравнения Ляпунова.
Ключевые слова: матричные уравнения Ляпунова, матричное уравнение Риккати, псевдообращение оператора.

Чуйко С. М., **Про розв'язання матричних рівнянь Ляпунова.** Матричні рівняння Ляпунова широко використовуються в теорії стійкості руху, а також при розв'язанні диференціальних рівнянь Ріккаті. Якщо структура загального розв'язку однорідної частини рівняння Ляпунова добре вивчена, то розв'язання неоднорідного рівняння Ляпунова досить громіздке. У статті запропонована формула побудови частинного розв'язку неоднорідного рівняння Ляпунова.
Ключові слова: матричне рівняння Ляпунова, рівняння Ріккаті, псевдообернення оператора.

S. M. Chuiko,**The solution of the Lyapunov matrix equations.** Lyapunov matrix equations widely used in the theory of stability of motion, as well as the solution of differential Riccati equations. If the structure of the general solution of the homogeneous part of the Lyapunov equation is well studied, the solution of the inhomogeneous Lyapunov equation is quite cumbersome. We have proposed a formula for constructing a particular solution of the nonhomogeneous Lyapunov equation.
Keywords: Lyapunov matrix equation, Riccati matrix equation, pseudoinverse operator.

2000 Mathematics Subject Classification 34B15.

Постановка задачи

Исследуем задачу о построении решения $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ матричного уравнения Ляпунова [1, 2, 3, 4, 6]

$$QC = CR + B \ , \tag{1}$$

где $Q,\ R,\ B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — данные $(n\times n)-$матрицы. Матричные уравнения Ляпунова широко используются в теории устойчивости движения [3, 4, 5], а также при решении дифференциальных уравнений Риккати [7, 8]. Если структура общего решения однородной части уравнения (1) хорошо изучена [1, 6], то решение неоднородного уравнения Ляпунова (1) достаточно громоздко. В статье [7] предложены условия разрешимости, а также схема построения частного решения неоднородного уравнения (1) на основе псевдообращения оператора L, соответствующего однородной части уравнения (1). Как известно, общее решение уравнения Ляпунова (1) является суммой

$$C = \Phi[Q, R] + \Psi[B]$$

общего решения $\Phi[Q, R]$ однородного уравнения

$$QC = CR \tag{2}$$

и произвольного частного решения $\Psi[B]$ уравнения (1). Для построения общего решения $\Phi[Q, R]$ однородной части (2) матричного уравнения (1) приведем матрицы Q и R неособенными $(\det S_Q \neq 0)$ и $(\det S_R \neq 0)$ преобразованиями подобия к нормальным жордановым формам:

$$Q = S_Q \cdot J_Q \cdot S_Q^{-1}, \quad R = S_R \cdot J_R \cdot S_R^{-1}.$$

Задача о построении общего решения $\Phi[Q, R]$ однородного уравнения (2) заменой переменной $\tilde{C} = S_Q^{-1} \cdot C \cdot S_R$ приводится к уравнению [1]

$$J_Q\tilde{C} = \tilde{C}J_R.$$

Обозначим элементарные делители матрицы Q :

$$(\lambda - \lambda_1)^{p_1}, \quad (\lambda - \lambda_2)^{p_2}, \ \dots \ (\lambda - \lambda_u)^{p_u}, \ \ \lambda_1 + \lambda_2 + \ \dots \ + \lambda_u = n,$$

а также элементарные делители матрицы R :

$$(\lambda - \mu_1)^{q_1}, \quad (\lambda - \mu_2)^{q_2}, \ \dots \ (\lambda - \mu_v)^{q_v}, \ \ \mu_1 + \mu_2 + \ \dots \ + \mu_v = n.$$

В дальнейшем будем говорить, что матрица $\Theta_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}^{p_\alpha \times q_\beta}$ имеет правильную верхнюю треугольную форму, если при $p_\alpha < q_\beta$:

$$\Theta_{\alpha\beta} = (O \ \ T_{p_\alpha})$$

и при $p_\alpha > q_\beta$:

$$\Theta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} T_{q_\beta} \\ O \end{pmatrix};$$

здесь $T_{p_\alpha} \in \mathbb{R}^{p_\alpha \times p_\alpha}$ — матрица вида

$$T_{p_\alpha} = \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 & ... & \theta_{p_\alpha-1} \\ 0 & \theta_1 & ... & \theta_{p_\alpha-2} \\ ... & ... & ... & .... \\ 0 & 0 & ... & \theta_1 \end{pmatrix},$$

$\theta_1, \theta_2, \ ... \ \theta_{p_\alpha-1} \in \mathbb{R}$ — произвольные константы, а также

$$T_{q_\beta} = \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 & ... & \theta_{q_\beta-1} \\ 0 & \theta_1 & ... & \theta_{q_\beta-2} \\ ... & ... & ... & .... \\ 0 & 0 & ... & \theta_1 \end{pmatrix},$$

$\theta_1, \theta_2, \ ... \ \theta_{q_\beta-1} \in \mathbb{R}$ — произвольные константы. Нормальные жордановы формы J_Q и J_R, а следовательно, и неизвестная матрица

$$\tilde{C} = \left(\tilde{C}_{\alpha\beta}\right), \quad \alpha = 1, 2, \ ... \ u, \quad \beta = 1, 2, \ ... \ v$$

имеют квазидиагональный вид, при этом $\tilde{C}_{\alpha\beta} = \Theta_{\alpha\beta}$ при $\alpha = \beta$ и $\tilde{C}_{\alpha\beta} = O$ при $\alpha \neq \beta$. Таким образом, [1, 6]

$$C = S_Q \cdot \left(\tilde{C}_{\alpha\beta}\right) \cdot S_R^{-1}.$$

Обозначая $\Xi_i, \ i = 1, 2, \ ... \ p$ частные решения однородного уравнения (2), приходим к следующему утверждению [6].

Лемма. *Общее решение однородного уравнения (2) представимо в виде*

$$\Phi[Q, R] = \sum_{i=1}^{p} \theta_i \Xi_i; \tag{3}$$

здесь, $\theta_1, \theta_2, \ ... \ \theta_p \in \mathbb{R}$ — *произвольные константы.*

При условии $\sigma(Q) \cap \sigma(R) \neq \emptyset$ однородная часть (2) матричного уравнения (1) имеет ненулевые решения вида (3), при этом однородное матричное уравнение $Q^*C = CR^*$, сопряженное уравнению (2), имеет ненулевые решения вида

$$\Phi[Q^*, R^*] = S_{Q^*} \cdot \left(\check{C}_{\alpha\beta}\right) \cdot S_{R^*}^{-1}.$$

Задача о построении общего решения матричного уравнения (1) заменой переменной $\tilde{C} = S_Q^{-1} \cdot C \cdot S_R$ приводится к уравнению

$$J_Q \tilde{C} = \tilde{C} J_R + \mathcal{B}; \tag{4}$$

здесь

$$\mathcal{B} := S_Q^{-1} \cdot B \cdot S_R \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Как известно [6], уравнение (4) разрешимо тогда и только тогда, когда

$$P_{L^*}\mathcal{B} = 0. \tag{5}$$

Здесь P_{L^*} — ортопроектор оператора, сопряженного фредгольмовому оператору [6, 9]

$$LC: \ J_Q\tilde{C} - \tilde{C}J_R: \ \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}.$$

По определению ортопроектор P_{L^*} удовлетворяет условиям [9]

$$L^*P_{L^*} = 0, \quad P_{L^*}^2 = P_{L^*}, \quad P_{L^*}^* = P_{L^*}.$$

Предположим условие (5) выполненным, при этом уравнение (4) разрешимо. Обозначим $\Theta_i, \ i = 1, 2, \ \dots \ , \ n^2$ базис области определения оператора L. В силу очевидного равенства $J_Q\tilde{C} - \tilde{C}J_R = \mathcal{B}$ частное решение $\Psi[\mathcal{B}]$ уравнения (4) следует искать в области определения оператора L, следовательно

$$\Psi[\mathcal{B}] = \sum_{i=1}^{n^2} c_i\Theta_i, \quad c_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \ \dots \ n^2.$$

Поскольку часть векторов базиса области определения оператора L принадлежит нуль-пространству $N(L) := \ker L$ оператора L, постольку приходим к уравнению относительно $q := n^2 - \dim\ker L$ неизвестных $c_i \in \mathbb{R}$:

$$L\Psi[\mathcal{B}] := J_Q\sum_{i=1}^{q} c_i\Theta_i - \sum_{i=1}^{q} c_i\Theta_i \ J_R = \mathcal{B}. \tag{6}$$

Здесь $\Theta_i, \ i = 1, 2, \ \dots \ q$ — матрицы из базиса области определения оператора L, для которых $L\Theta_i \neq 0$. Для оператора L имеет место разложение [6, 9]

$$\mathbb{R}^{n\times n} = \mathbb{R}(L^*) \oplus \mathbb{N}(L),$$

следовательно, любой вектор $\Theta_i, \ i = 1, 2, \ \dots \ q$ из базиса области определения оператора L, для которого $L\Theta_i \neq 0$ принадлежит образу $\mathbb{R}(L^*)$. Определим оператор $\mathcal{M}[\mathcal{B}]: \ \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n^2}$, как оператор, который ставит в соответствие матрице $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ вектор-столбец $\mathcal{M}[\mathcal{B}] \in \mathbb{R}^{n^2}$, составленный из n столбцов матрицы $\mathcal{B}$. Обозначим матрицу

$$\mathcal{M}L\Big[\Theta_1, \ \Theta_2 \ \dots \ \Theta_q\Big] := \Big[\ \mathcal{M}[L\Theta_1] \ \ \mathcal{M}[L\Theta_2] \ \dots \ \mathcal{M}[L\Theta_q] \ \Big] \in \mathbb{R}^{n^2\times q}.$$

В новых обозначениях уравнение (6) равносильно следующему

$$\mathcal{M}L\Big[\Theta_1, \Theta_2 \ ... \ \Theta_q\Big]c = \mathcal{M}[\mathcal{B}], \quad c \in \mathbb{R}^q. \tag{7}$$

При условии (5) уравнение (7), а следовательно, и уравнение (6), разрешимы по меньшей мере одним способом [9]

$$\check{c} := \mathcal{M}L^+\Big[\Theta_1, \Theta_2 \ ... \ \Theta_q\Big]\mathcal{M}[\mathcal{B}].$$

Здесь $\mathcal{M}L^+\Big[\Theta_1, \Theta_2 \ ... \ \Theta_q\Big]$ — псевдообратная по Муру—Пенроузу матрица [1, 9]. Итак, находим частное решение уравнения (4):

$$\Psi[\mathcal{B}] = \sum_{i=1}^{q} \check{c}_i \Theta_i, \quad \check{c}_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \ ... \ q,$$

при этом частное решение уравнения (1) имеет вид $\Psi[B] = S_Q \cdot \Psi[\mathcal{B}] \cdot S_R^{-1}$. Таким образом доказано следующее утверждение.

Теорема. *Для разрешимости уравнения (1) необходимо и достаточно выполнения условия (5). При выполнении условия (5) общее решение уравнения (1) является суммой*

$$C = \Phi[Q, R] + \Psi[B]$$

общего решения

$$\Phi[Q, R] = S_Q \cdot \Phi[J_Q, J_R] \cdot S_R^{-1}$$

однородной части (2) матричного уравнения (1) и частного решения

$$\Psi[B] = S_Q \cdot \Psi[\mathcal{B}] \cdot S_R^{-1}, \quad \mathcal{B} := S_Q^{-1} \cdot B \cdot S_R$$

уравнения (1). Здесь S_Q и S_R — невырожденные матрицы, преобразующие матрицы Q и R к нормальным жордановым формам:

$$Q = S_Q \cdot J_Q \cdot S_Q^{-1}, \quad R = S_R \cdot J_R \cdot S_R^{-1},$$

$$\Psi[\mathcal{B}] = \sum_{i=1}^{q} \check{c}_i \Theta_i, \quad \check{c} := \mathcal{M}L^+\Big[\Theta_1, \Theta_2 \ ... \ \Theta_q\Big]\mathcal{M}[\mathcal{B}],$$

$\{\Theta_i\}_{i=1}^q$ — *базис образа $\mathbb{R}(L^*)$ фредгольмового оператора L^*, сопряженного оператору L :*

$$L^*C : \ J_Q^* C - C J_R^* : \ \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Предложенная формула частного решения $\Psi[B]$ уравнения (1) существенно отличается от конструкции частного решения в виде псевдообратного оператора L^+, использованного в статье [6].

Пример 1. *Неоднородное матричное уравнение*

$$QC = CR + B \tag{8}$$

разрешимо при

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Приведем матрицу Q неособенным

$$S_Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_{Q^{-1}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

преобразованием подобия к нормальной жордановой форме

$$J_Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично приведем матрицу R неособенным

$$S_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_{R^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

преобразованием подобия к нормальной жордановой форме

$$J_R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

при этом

$$\Phi[J_Q, J_R] = \Phi[J_Q^*, J_R^*] = \Pi\, c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}^1;$$

здесь

$$\Pi := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для матрицы

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

условие (5) выполнено:

$$P_{L^*}\mathcal{B} = \Pi\mathcal{B}^*\Pi = 0.$$

Базис образа $\mathbb{R}(L^*)$ оператора L^* составляют матрицы

$$\Theta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \dots\ , \ \Theta_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

при этом

$$\mathcal{M}[\mathcal{B}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

следовательно

$$\check{c}^* = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi[\mathcal{B}] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, общее решение уравнения (8) является суммой

$$C = \Phi[Q, R] + \Psi[B],$$

где

$$\Phi[Q, R] = S_Q \cdot \Phi[J_Q, J_R] \cdot S_R^{-1}, \quad \Psi[B] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При условии $\sigma(Q) \cap \sigma(R) = \emptyset$ однородная часть (2) матричного уравнения (1) имеет только нулевое решение. В этом случае частное решение $\Psi[\mathcal{B}]$ уравнения (4) следует искать, как линейную комбинацию матриц из образа

$$\mathbb{R}(L^*) = \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \dim \mathbb{R}(L^*) = n^2$$

оператора L, следовательно

$$\Psi[\mathcal{B}] = \sum_{i=1}^{n^2} c_i \Theta_i, \quad c_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \ \dots\ n^2.$$

Здесь

$$\Xi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \ \dots\ , \quad \Xi_{n^2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим матрицу

$$\mathcal{M}L\Big[\Theta_1, \Theta_2 \ \dots\ \Theta_{n^2}\Big] := \Big[\ \mathcal{M}[L\Theta_1] \ \ \mathcal{M}[L\Theta_2] \ \dots\ \mathcal{M}[L\Theta_{n^2}]\ \Big] \in \mathbb{R}^{n^2\times n^2}.$$

Уравнение (7), а следовательно, и уравнение (6) разрешимы по меньшей мере одним способом [9]

$$\check{c} := \mathcal{M}L^{+}\Big[\Theta_1, \Theta_2\ \dots\ \Theta_{n^2}\Big]\mathcal{M}[\mathcal{B}].$$

Итак, в случае $\sigma(Q) \cap \sigma(R) = \emptyset$, находим частное решение уравнения (4):

$$\Psi[\mathcal{B}] = \sum_{i=1}^{n^2} \check{c}_i \Theta_i, \quad \check{c}_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2,\ \dots\ n^2,$$

при этом частное решение уравнения (1) имеет вид $\Psi[B] = S_Q \cdot \Psi[\mathcal{B}] \cdot S_R^{-1}$. Таким образом доказано следующее утверждение.

Следствие. *В случае $\sigma(Q) \cap \sigma(R) = \emptyset$ уравнение (1) однозначно разрешимо при любой неоднородности $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, при этом решение имеет вид*

$$C = \Psi[B] = S_Q \cdot \Psi[\mathcal{B}] \cdot S_R^{-1}, \quad \mathcal{B} := S_Q^{-1} \cdot B \cdot S_R.$$

уравнения (1). Здесь S_Q и S_R — невырожденные матрицы, преобразующие матрицы Q и R к нормальным жордановым формам:

$$Q = S_Q \cdot J_Q \cdot S_Q^{-1}, \quad R = S_R \cdot J_R \cdot S_R^{-1},$$

$$\Psi[\mathcal{B}] = \sum_{i=1}^{q} \check{c}_i \Theta_i, \quad \check{c} := \mathcal{M}L^{+}\Big[\Theta_1, \Theta_2\ \dots\ \Theta_{n^2}\Big]\mathcal{M}[\mathcal{B}],$$

$\{\Theta_i\}_{i=1}^{n^2}$ *— базис образа $\mathbb{R}(L^*)$ фредгольмового оператора L^* :*

$$L^*C:\ J_Q^*C - CJ_R^*:\ \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Пример 2. *Неоднородное матричное уравнение (1) однозначно разрешимо при*

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приведем матрицу Q неособенным

$$S_Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_{Q^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

преобразованием подобия к нормальной жордановой форме

$$J_Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Аналогично приведем матрицу R_9 неособенным

$$S_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_{R^{-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

преобразованием подобия к нормальной жордановой форме

$$J_R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\sigma(Q) \cap \sigma(R_9) = \emptyset$, постольку уравнение (1) однозначно разрешимо. Положим

$$\Xi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \dots, \ \Xi_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

при этом

$$\mathcal{M}L\Big[\Theta_1, \Theta_2 \dots \Theta_{n^2}\Big] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}^*[\mathcal{B}] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

При этом уравнение (6), а следовательно, и уравнение (7) однозначно разрешимы

$$\check{c} := \mathcal{M}L^{+}\Big[\Theta_1, \Theta_2 \dots \Theta_{n^2}\Big]\mathcal{M}[\mathcal{B}] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2}{5} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\Psi[\mathcal{B}] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \quad \Psi[B] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{3}{10} \end{pmatrix}.$$

Предложенная формула частного решения $\Psi[B]$ уравнения (1) может быть использована в теории устойчивости движения [3, 4, 5], а также при решении дифференциальных уравнений Риккати [7, 8] и матричного уравнения Сильвестра [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — М.: Наука. — 1988. — 552 с.
2. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. — М.: Наука. — 1969. — 367 с.
3. *Ланкастер П.* Теория матриц. — М.: Наука. — 1978. — 280 с.
4. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука. — 1970. — 534 с.
5. *Коробов В.И., Бебия М.О.* Стабилизация одного класса нелинейных систем, неуправляемых по первому приближению // Доп. НАН України. — 2014. — № 2. — С. 20–25.
6. *Boichuk A.A., Krivosheya S.A.* Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type // Ukrainian Mathematical Journal. — 1998. — **50**, № 8. — P. 1162–1169.
7. *Boichuk A.A., Krivosheya S.A.* A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equation // Differential Equations. — 2001. — **37**, №4. — P. 464–471.
8. *Захар-Иткин М.Х.* Матричное дифференциальное уравнение Риккати и полугруппа дробно-линейных преобразований // Успехи мат. наук. — 1973. — **XXVIII**. № 3. — С. 83–120.
9. *Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, — 1995. — 318 с.
10. *Чуйко С.М.* О решении матричного уравнения Сильвестра // Вестник Одесского национального университета. Сер. математика и механика. — 2014, **19**, Вип. 1 (21). — С. 49–57.

Статья получена: 25.06.2014; принята: 11.09.2014.