Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.977.1 № 1081, 2013, с.76–83

О множестве позиционных управлений, решающих задачу глобального синтеза для линейного уравнения в гильбертовых пространствах

В. А. Скорик

Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина,
пл. Свободы, 4, 61022, Харьков, Украина
v.skoryk@karazin.ua

На основе метода функционала управляемости показано, что для линейного уравнения с ограниченным кососамосопряженным оператором в гильбертовых пространствах любая невозрастающая неотрицательная на неотрицательной полуоси функция, имеющая некоторое число точек убывания и на некотором отрезке отрицательную производную, порождает позиционное управление, решающее задачу глобального синтеза.
Ключевые слова: задача глобального синтеза, гильбертово пространство, линейное уравнение.

Скорик В. О., **Про множину позиційних керувань, які вирішують задачу глобального синтезу для лінійного рівняння в гільбертових просторах.** На основі метода функціонала керованості показано, що для лінійного рівняння з обмеженим кососамоспряженим оператором у гільбертових просторах будь-яка незростаюча невід'ємна на невід'ємній півосі функція, яка має деяке число точок спадання та на деякому відрізку від'ємну похідну, породжує позиційне керування, яке вирішує задачу глобального синтезу.
Ключові слова: задача глобального синтезу, гільбертовий простір, лінійне рівняння.

V. A. Skoryk, **On a set of positional controls which solve the global synthesis problem for a linear equation in Hilbert spaces.** On the basis of the method of the controllability functional it is shown that for a linear equation with a bounded skew self-adjoint operator in Hilbert spaces any non-increasing non-negative on the non-negative semiaxis function, which has a certain number of points of decreasing, and one has a negative derivative on some interval, generates a positional control, which solve the problem of the global synthesis.
Keywords: problem of global synthesis, Hilbert space, linear equation.
2000 Mathematics Subject Classification 93B50.

1. Введение

Рассмотрим задачу синтеза ограниченных позиционных управлений для управляемого процесса, описываемого уравнением

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{X}, \quad u \in \Omega \subset \mathbb{U}, \quad 0 \in \text{int}\ \Omega, \tag{1}$$

где $\mathbb{X}$, $\mathbb{U}$ — гильбертовы пространства, оператор A с областью определения $D(A)$ порождает сильно непрерывную группу операторов $\left\{e^{At}\right\}_{-\infty<t<+\infty}$, B — ограниченный оператор, действующий из $\mathbb{U}$ в $\mathbb{X}$.

Задача состоит в построении позиционного управления $u = u(x)$ такого, чтобы $u(x) \in \Omega$ для всех x из некоторой окрестности Q начала координат, и такого, чтобы для произвольной точки $x_0 \in$ Q решение $x(t)$ задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu(x), \quad x(0) = x_0,$$

существовало и удовлетворяло условиям:

1) $\lim\limits_{t\to T(x_0)} x(t) = 0$ для некоторого $T(x_0) < \infty$;

2) $x(t) \in$ Q для всех $t \in [0, T(x_0))$.

Если Q $= \mathbb{X}$, то будем говорить о глобальном синтезе, и о локальном — в противном случае.

Очевидно, что для решения этой задачи необходимо, чтобы уравнение (1) было точно 0-управляемым за свободное время. Поэтому, не ограничивая общности, будем считать, что уравнение (1) является точно 0-управляемым за свободное время.

Исследования задачи проводятся на основе метода функционала управляемости [1, 2].

В работе [1] получено конструктивное решение задачи локального синтеза ограниченного управления для уравнения (1) в случае, когда A является ограниченным оператором и $\Omega = \{u \in \mathbb{U} : \|u\| \leq d\}$. Показано, что решением этой задачи является управление $u(x) = -\frac{1}{2}B^*N^{-1}\left(1/\Theta(x)\right)x$. Здесь $\Theta(x)$ — функционал управляемости, определяемый при $x \neq 0$ как единственное положительное решение уравнения $2a_0\Theta = \left(N^{-1}\left(\frac{1}{\Theta}\right)x, x\right)$ $(a_0 > 0)$, где

$$N(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}e^{-At}BB^*e^{-A^*t}dt, \;\; \lambda > 2\omega_0(-A) \;\left(\omega_0(-A) = \lim_{t\to+\infty}\frac{\ln\|e^{-At}\|}{t}\right).$$

Результаты работы [1] получили дальнейшее развитие. Так, в работе [3] дано описание множества ограниченных позиционных управлений, решающих задачу локального синтеза. Показано, что каждая функция $f \in \mathcal{F}_m(A)$ порождает управление $u_f(x)$, решающее задачу допустимого синтеза ограниченного управления в некоторой области Q_c.

Данная работа является развитием результатов работ [3, 5]. Развитие результатов работы [3] состоит в решении задачи глобального допустимого синтеза управления, а работы [5] — в описании более широкого класса функций, каждая из которых порождает управление, решающее эту задачу.

2. Исходные результаты

Следуя работе [3], для произвольной невозрастающей неотрицательной на полуоси $[0,\infty)$ функции $f(s)$, удовлетворяющей условию

$$\varliminf_{s\to\infty}\left[-\frac{\ln f(s)}{s}\right]=f_0>0 \tag{2}$$

(постоянная f_0 может равняться $+\infty$, например, для финитной функции f), рассмотрим при $\lambda>\lambda_0=\max\left\{0,\ \frac{2\omega_0(-A)}{f_0}\right\}$ положительно определенный оператор

$$N_f(\lambda)x=\int\limits_0^\infty f(\lambda t)e^{-At}BB^*e^{-A^*t}xdt,\quad x\in\mathbb{X}. \tag{3}$$

Выберем положительное число Θ_f, которое не превышает $1/\lambda_0$. Обозначим $R=\delta\sqrt{2a_0\Theta_f/\|N_f^{-1}(\frac{1}{\Theta_f})\|}$ ($\delta\in(0,1)$) и рассмотрим область $\mathrm{Q}_1=\{x\in\mathbb{X}:\|x\|\le R\}$. Определим в области $\mathrm{Q}_1\setminus\{0\}$ функционал управляемости $\Theta(x)$ из уравнения

$$2a_0\Theta=\left(N_f^{-1}\left(\tfrac{1}{\Theta}\right)x,x\right),\quad a_0>0, \tag{4}$$

имеющего единственное положительное непрерывно дифференцируемое решение $\Theta(x)$, которое, при условии $\Theta(0)=0$, является непрерывным при $x=0$.

Рассмотрим управление

$$u_f(x)=-\frac{1}{2}f(0)B^*N_f^{-1}\left(\frac{1}{\Theta(x)}\right)x,\quad x\in\mathrm{Q}_1\setminus\{0\}. \tag{5}$$

Это управление в каждой области $\mathrm{K}(\rho_1,\rho_2)=\{x:0<\rho_1\le\|x\|\le\rho_2<R\}$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной $L(\varepsilon,\rho_2)\to+\infty$ при $\varepsilon\to 0$ $(0<\varepsilon<\rho_2)$.

Для уравнения (1) с ограниченным оператором A, в силу его точной управляемости, на основании теоремы 2 [4], существует некоторое целое число $m\ge 0$ такое, что выполнено соотношение

$$\mathrm{Span}\,\{B\mathbb{U},AB\mathbb{U},\dots,A^mB\mathbb{U}\}=\mathbb{X}. \tag{6}$$

Пусть m — наименьшее число, для которого выполнено соотношение (6). Обозначим через $\mathcal{F}_m(A)$ класс невозрастающих неотрицательных на полуоси $[0,+\infty)$ функций f, имеющих, по крайней мере, $(m{+}1)$ точек убывания и удовлетворяющих условию (2).

В работе [3] установлено, что при выборе в уравнении (4) числа a_0 из условия

$$0 < a_0 \leq a_f = \frac{2l_{\mu_1}d^2}{f^2(0)}, \quad l_{\mu_1} > 0, \tag{7}$$

каждая функция $f \in \mathcal{F}_m(A)$ порождает управление $u_f(x)$ вида (5), которое решает задачу локального синтеза и удовлетворяет ограничению

$$\|u_f(x)\| \leq d, \quad x \in \mathrm{Q}_c = \{x : \Theta(x) \leq c_f\} \subset \mathrm{int}\mathrm{Q}_1. \tag{8}$$

При этом установлена непрерывность функционала $\Psi_f(x_0) = \Phi_t(x_0, 0)$ для любого $x_0 \in \mathrm{Q_c} \setminus \{0\}$, где $\Phi(x_0, t) = \Theta(x(t))$, $x(t)$ — решение задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu_f(x), \quad x(0) = x_0 \in \mathrm{Q_c} \setminus \{0\};$$

показано, что функционал $\Psi_f(x)$ имеет вид

$$\Psi_f(x) = \frac{\Theta(x)\left(\widehat{N}_f\left(\frac{1}{\Theta(x)}\right)\varphi(x), \varphi(x)\right)}{\left(N_f\left(\frac{1}{\Theta(x)}\right)\varphi(x), \varphi(x)\right) + \left(\widetilde{N}_f\left(\frac{1}{\Theta(x)}\right)\varphi(x), \varphi(x)\right)}, \tag{9}$$

где $\varphi(x) = N_f^{-1}\left(\frac{1}{\Theta(x)}\right)x$, операторы $\widehat{N}_f(\lambda)$, $\widetilde{N}_f(\lambda)$ задаются соотношениями $\widehat{N}_f(\lambda)x = \int\limits_0^\infty e^{-At}BB^*e^{-A^*t}xd(-f(\lambda t))$, $\widetilde{N}_f(\lambda)x = \int\limits_0^\infty te^{-At}BB^*e^{-A^*t}xd(-f(\lambda t))$, и удовлетворяет неравенству

$$\Psi_f(x) \leq -\beta_f \quad \text{при} \quad x \in \mathrm{Q_c} \setminus \{0\} \quad (\beta_f > 0). \tag{10}$$

3. Основной результат

Рассмотрим случай, когда оператор A в уравнении (1) является ограниченным кососамосопряженным, т. е. $(Ax_1, x_2) = -(x_1, Ax_2)$. Известно, что всякий кососамосопряженный оператор A порождает сильно непрерывную группу унитарных операторов $\left\{e^{At}\right\}_{-\infty<t<\infty}$ [6, стр. 247], [7, стр. 350]. В этом случае операторы $N_f(\lambda)$, $\widehat{N}_f(\lambda)$, $\widetilde{N}_f(\lambda)$ определены на всей положительной полуоси $\lambda > 0$, уравнение (4) имеет единственное положительное решение $\Theta(x)$ — функционал управляемости, определенное для всех $x \in \mathbb{X} \setminus \{0\}$, поскольку функция $G_1(\Theta) = 2a_0\Theta - \left(N_f^{-1}\left(\frac{1}{\Theta}\right)x, x\right)$ монотонно возрастает на $(0, +\infty)$ и $\lim\limits_{\Theta\to+0} G_1(\Theta) = -\infty$, $\lim\limits_{\Theta\to+\infty} G_1(\Theta) = +\infty$. Управление $u_f(x)$ вида (5) и функционал $\Psi_f(x)$ также определены для всех $x \in \mathbb{X} \setminus \{0\}$. Это означает, что $\mathrm{Q}_c = \mathrm{Q}_1 = \mathbb{X}$.

Приведем условия выбора функции f и числа a_0, при выполнении которых управление $u_f(x)$ вида (5) решает задачу глобального синтеза.

Обозначим через $\mathcal{F}'_m(A)$ подкласс всех функций $f(s)$ из класса функций $\mathcal{F}_m(A)$, для каждой из которых существуют числа $T_f \geq 0$ и $\varepsilon_f > 0$ такие, что на отрезке $[T_f, T_f + \varepsilon_f]$ функция имеет производную $f'(s) < 0$.

Для $\Theta \geq c_f$ выберем натуральное число $n = n(\Theta) \in [\Theta, \Theta + 1]$. Отсюда и из того, что $s/(s{+}1)$ является возрастающей функцией, имеем

$$\varepsilon_f \geq \frac{\Theta}{n}\varepsilon_f \geq \frac{\Theta}{\Theta+1}\varepsilon_f \geq \frac{c_f}{c_f+1}\varepsilon_f. \tag{11}$$

Из точной управляемости уравнения (1) следует, что для любого $T_0 > 0$ оператор N_{T_0}, задаваемый соотношением $N_{T_0}x = \int\limits_0^{T_0} e^{-At}BB^*e^{-A^*t}x dt$, $x \in \mathrm{X}$, является положительно определенным [8], т. е.

$$(N_{T_0}x, x) \geq \delta(T_0)\|x\|^2, \quad \delta(T_0) > 0. \tag{12}$$

Поскольку положительная функция $\delta(T_0)$ может быть выбрана монотонно неубывающей функцией на отрезке $\left[\frac{c_f}{c_f+1}\varepsilon_f, \varepsilon_f\right]$, то, при указанном выборе числа n, для любого $\Theta \geq c_f$ из (11) имеем неравенства

$$\delta\left(\frac{\varepsilon_f\Theta}{n}\right) \geq \delta\left(\frac{\varepsilon_f c_f}{c_f+1}\right) \equiv \delta_f, \quad \frac{n}{\Theta} \geq 1. \tag{13}$$

Пусть число $\varepsilon > 0$ такое, что для функции $f \in \mathcal{F}'_m(A)$ выполнено условие $f(\varepsilon) > 0$. Обозначим

$$a'_f = \frac{2\delta_f f(\varepsilon) d^2}{f^2(0)\|B\|^2}. \tag{14}$$

Теорема. *Предположим, что уравнение (1), где* $\mathbb{X}$, $\mathbb{U}$ *— гильбертовы пространства,* $A \in [\mathbb{X}, \mathbb{X}]$, $B \in [\mathbb{U}, \mathbb{X}]$, $\Omega = \{u \in \mathbb{U} :\ \|u\| \leq d\}$ $(d > 0$ *— любое заданное число), является точно* 0*-управляемым. Пусть оператор* A *является кососамосопряженным, функция* $f \in \mathcal{F}'_m(A)$, *число* a_0 *удовлетворяет условию*

$$0 < a_0 \leq \widehat{a}'_f = \min\{a_f, a'_f\}, \tag{15}$$

функционал $\Theta(x)$ *при* $x \neq 0$ *является положительным решением уравнения (4) и* $\Theta(0) = 0$.

Тогда управление $u_f(x)$ *вида (5) решает задачу глобального синтеза, причем* $T(x_0) \leq \Theta(x_0)/\widehat{\beta}'_f$ $(\widehat{\beta}'_f > 0)$.

Доказательство. В силу предположений теоремы, согласно работе [3], каждая функция $f \in \mathcal{F}'_m(A) \subset \mathcal{F}_m(A)$ порождает управление вида (5), которое решает задачу допустимого локального синтеза в области Q_c и, при выборе числа a_0 из условия (7), удовлетворяет ограничению (8). Покажем, что число $a_0 > 0$ (4) может быть выбрано таким, что это управление решает задачу глобального допустимого синтеза.

Установим при некоторых $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ неравенство

$$\Psi_f(x) \le -\beta\Theta^{1-\frac{1}{\alpha}}(x) \tag{16}$$

в глобальном смысле, т. е. для всех $x \in \mathbb{X} \setminus \{0\}$. В работе [3] показано, что функционал $\Psi_f(x)$ удовлетворяет неравенству (10) в области $\mathrm{Q}_c \setminus \{0\}$. Пусть $\Theta = \Theta(x) \ge c_f$. Имеем

$$\frac{1}{\Theta}\left(\widetilde{N}_f\left(\frac{1}{\Theta}\right)\varphi,\varphi\right) = \int\limits_0^\infty \frac{t}{\Theta}\|B^*e^{-A^*t}\varphi\|^2 d\left(-f\left(\frac{t}{\Theta}\right)\right) \le$$

$$\le \|B^*\|^2\|\varphi\|^2 \int\limits_0^\infty \frac{t}{\Theta} d\left(-f\left(\frac{t}{\Theta}\right)\right) = I_f\|B\|^2\|\varphi\|^2, \tag{17}$$

$$\frac{1}{\Theta}\left(N_f\left(\frac{1}{\Theta}\right)\varphi,\varphi\right) = \frac{1}{\Theta}\int\limits_0^\infty f\left(\frac{t}{\Theta}\right)\|B^*e^{-A^*t}\varphi\|^2 dt \le$$

$$\le \|B^*\|^2\|\varphi\|^2 \int\limits_0^\infty f(\tau)d\tau = I_f\|B\|^2\|\varphi\|^2, \tag{18}$$

где $I_f = \int\limits_0^\infty f(\tau)d\tau < \infty$ — положительная постоянная. Получим оценку снизу для $\left(\widehat{N}_f\left(\frac{1}{\Theta}\right)\varphi,\varphi\right)$. Для выбранной функции $f \in \mathcal{F}'_m(A)$ определим постоянную $f'_{min} = \min\limits_{s\in[T_f,T_f+\varepsilon_f]}(-f'(s)) > 0$. Тогда для любого $\Theta \ge c_f$ имеем

$$\left(\widehat{N}_f\left(\frac{1}{\Theta}\right)\varphi,\varphi\right) = \int\limits_0^\infty \|B^*e^{-A^*t}\varphi\|^2 d\left(-f\left(\frac{t}{\Theta}\right)\right) \ge$$

$$\ge \int\limits_{T_f\Theta}^{(T_f+\varepsilon_f)\Theta} \|B^*e^{-A^*t}\varphi\|^2\left(-f'\left(\frac{t}{\Theta}\right)\right)\frac{dt}{\Theta} \ge f'_{min}\int\limits_0^{\varepsilon_f\Theta}\|B^*e^{-A^*(t+T_f\Theta)}\varphi\|^2\frac{dt}{\Theta}. \tag{19}$$

В силу неравенств (11), (12) и унитарности группы $\left\{e^{-A^*t}\right\}_{-\infty<t<\infty}$, из (19) получаем

$$\left(\widehat{N}_f\left(\frac{1}{\Theta}\right)\varphi,\varphi\right) \ge f'_{min}\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{k\Theta\varepsilon_f/n}^{(k+1)\Theta\varepsilon_f/n}\|B^*e^{-A^*(t+T_f\Theta)}\varphi\|^2\frac{1}{\Theta}dt =$$

$$= f'_{min}\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_0^{\Theta\varepsilon_f/n}\|B^*e^{-A^*(t+T_f\Theta+k\Theta\varepsilon_f/n)}\varphi\|^2\frac{1}{\Theta}dt =$$

$$= f'_{min} \sum_{k=0}^{n-1} \left(N_{\frac{\varepsilon_f \Theta}{n}} e^{-A^*(T_f + k\varepsilon_f/n)\Theta}\varphi, e^{-A^*(T_f + k\varepsilon_f/n)\Theta}\varphi \right) \frac{1}{\Theta} \geq$$

$$\geq f'_{min}\delta\left(\frac{\varepsilon_f \Theta}{n}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \|e^{-A^*(T_f + k\varepsilon_f/n)\Theta}\varphi\|^2 \frac{1}{\Theta} \geq f'_{min}\delta\left(\frac{\varepsilon_f\Theta}{n}\right)\frac{n}{\Theta}\|\varphi\|^2. \qquad (20)$$

В силу неравенства (13), из (20) получаем

$$\left(\widehat{N}_f\left(\frac{1}{\Theta}\right)\varphi, \varphi\right) \geq f'_{min}\delta_f\|\varphi\|^2, \quad \Theta \geq c_f. \qquad (21)$$

Поэтому, на основании (17)–(21), для функционала $\Psi_f(x)$ имеем неравенство

$$\Psi_f(x) \leq -\beta'_f, \quad x \in \{x : \ \Theta(x) \geq c_f\}, \qquad (22)$$

где число $\beta'_f = \delta_f f'_{min}/(2I_f\|B\|^2) > 0$. Следовательно, согласно (10) и (22), окончательно получаем, что функционал $\Psi_f(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\Psi_f(x) \leq -\widehat{\beta}'_f, \quad x \in \mathbb{X} \setminus \{0\},$$

где $\widehat{\beta}'_f = \min\left\{\beta_f, \ \beta'_f\right\}$.

Таким образом, для функционала $\Psi_f(x)$ неравенство (16) при $\alpha = 1$ и $\beta = \widehat{\beta}'_f$ установлено в глобальном смысле.

Установим, что при выборе числа a_0 из условия $0 < a_0 \leq a'_f$ управление (5) удовлетворяет ограничениям $\|u_f(x)\| \leq d$ при $x \in \{x \in \mathbb{X} : \Theta(x) \geq c_f\}$. Получим оценку снизу для $\frac{1}{\Theta}\left(N_f\left(\frac{1}{\Theta}\right)\varphi, \varphi\right)$ при $\Theta \geq c_f$. Поскольку для функции $f \in \mathcal{F}'_m(A)$ выполнено условие $f(\varepsilon) > 0$, то имеем

$$\frac{1}{\Theta}\left(N_f\left(\frac{1}{\Theta}\right)\varphi, \varphi\right) \geq \frac{1}{\Theta}\int_0^{\varepsilon\Theta} f\left(\frac{t}{\Theta}\right)\|B^* e^{-A^* t}\varphi\|^2 dt \geq f(\varepsilon)\frac{1}{\Theta}\int_0^{\varepsilon\Theta}\|B^* e^{-A^* t}\varphi\|^2 dt,$$

откуда, как и для (19)–(21), получаем

$$\frac{1}{\Theta}\left(N_f\left(\frac{1}{\Theta}\right)\varphi, \varphi\right) \geq f(\varepsilon)\delta_f\|\varphi\|^2, \quad \Theta \geq c_f. \qquad (23)$$

Используя равенство (4) и неравенство (23), имеем

$$\|u_f(x)\|^2 = \frac{1}{4}f^2(0)\|B^*\varphi\|^2 = \frac{1}{2}f^2(0)a_0 \ \frac{\|B^*\varphi\|^2}{\frac{1}{\Theta(x)}\left(N_f\left(\frac{1}{\Theta(x)}\right)\varphi, \varphi\right)} \leq$$

$$\leq \frac{f^2(0)\|B^*\|^2\|\varphi\|^2}{2f(\varepsilon)\delta_f\|\varphi\|^2}\ a_0 = \frac{f^2(0)\|B\|^2}{2\delta_f f(\varepsilon)}\ a_0. \qquad (24)$$

Выберем число a_0 из условия $0 < a_0 \le a'_f$, где a'_f определено равенством (14). Тогда из (24) получаем

$$\|u_f(x)\| \le d \quad \text{для} \quad \text{всех} \quad x \in \{x \in \mathbb{X} : \ \Theta(x) \ge c_f\}. \tag{25}$$

Таким образом, на основании (8) и (25), получаем, что при выборе числа a_0 из условия (15) управление $u_f(x)$ удовлетворяет заданным ограничениям

$$\|u_f(x)\| \le d \quad \text{для} \quad \text{всех} \quad x \in \mathbb{X}.$$

Тогда по теореме 1 [1, 2] следует утверждение данной теоремы. □

Список литературы

1. Коробов В.І., Скляр Г.М. Розв'язок задачі синтезу за допомогою функціоналу керованості для систем у нескінченновимірних просторах // Доповіді АН УРСР. – Сер. А, 1983. – № 5. – С. 11–14.

2. Коробов В.И., Скляр Г.М. Синтез управления в уравнениях, содержащих неограниченный оператор // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – 1986.– Вып. 45. – С. 45–63.

3. Скляр Г.М., Скорик В.А. О множестве позиционных управлений, решающих задачу синтеза в гильбертовых пространствах // Вісник Харківського університету. Серія "Математика, прикладна математика і механіка". – 1999. – № 458. – С. 3–14.

4. Коробов В.И., Рабах Р. Точная управляемость в банаховом пространстве // Дифференциальные уравнения. – 1979. – Т. 15, № 12. – С. 2142–2150.

5. Korobov V.I., Sklyar G.M., Skoryk V.A. Solution of the Synthesis Problem in Hilbert Spaces // Proceedings CD of the Forteenth International Symposium of Mathematical Theory of Networks and Systems. – Perpignan, France, 2000. – 10 pages.

6. Лакс П., Филлипс Р. Теория рассеивания: Пер. с англ. – М.: Мир, 1971. – 312 с.

7. Иосида К. Функциональный анализ: Пер. с англ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.

8. Megan M., Hiris V. On the space of linear controllable systems in Hilbert spaces// Glasnik matematicki.– 1975.– Vol. 10, No. 1. – P. 161 – 167.

Статья получена: 18.11.2013; принята: 29.11.2013.