Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.518.14 № 1081, 2013, с.4–9

Об одном свойстве функции $\|x-y\|^{2-m}$

Нгуен Ван Куинь

Харьковский национальный университета имени В.Н. Каразина,
пл. Свободы, 4, 61022, Харьков, Украина
quynhsonla1988@gmail.com, quynh_sonla032@yahoo.com

Ядро $h_m(x-y) = \|x-y\|^{2-m}$ играет важную роль в теории субгармонических в пространстве $\mathbb{R}^m (m \geq 3)$ функций. Мы рассматриваем ядро $h_m(x-y)$ при любом $y \in \mathbb{R}^m$ как элемент пространства $L_p(\gamma, \mathbb{R}^m)$. В статье приводится достаточное условие на меру γ для того, чтобы функция $h_m(x-y) \in L_p(\gamma, \mathbb{R}^m)$ была равномерно непрерывной по параметру y в $\mathbb{R}^m$. Приводятся примеры конкретных мер γ, которые удовлетворяют приведенному условию.
Ключевые слова: $(m-1)$-мерная мера Хаусдорфа, равномерная непрерывность.

Нгуєн Ван Куінь, **Про одну властивість функції $\|x-y\|^{2-m}$.** Ядро $h_m(x-y) = \|x-y\|^{2-m}$ відіграє важливу роль в теорії субгармонічних у просторі $\mathbb{R}^m (m \geq 3)$ функцій. Ми розглядаємо ядро $h_m(x-y)$ для будь-якого $y \in \mathbb{R}^m$ як елемент простору $L_p(\gamma, \mathbb{R}^m)$. У статті наводиться достатня умова на міру γ для того, щоб функція $h_m(x-y) \in L_p(\gamma, \mathbb{R}^m)$ була равномірно неперервною за переметром y у $\mathbb{R}^m$. Наводяться приклади конкретних мір γ, які задовольняють наведену умову.
Ключові слова: $(m-1)$-мірна міра Хаусдорфа, рівномірна неперервність.

Nguyen Van Quynh, **About one property of the function $\|x-y\|^{2-m}$.** The kernel $h_m(x-y) = \|x-y\|^{2-m}$ is important in the theory of subharmonic functions in the space $\mathbb{R}^m (m \geq 3)$. For any $y \in \mathbb{R}^m$ we consider the kernel $h_m(x-y)$ as an element of the spaces $L_p(\gamma, \mathbb{R}^m)$. In this article we give a sufficient condition on a measure γ the function $h_m(x-y) \in L_p(\gamma, \mathbb{R}^m)$ to be uniformly continious in the parameter y in $\mathbb{R}^m$. We give examples of measures γ, which satisfy this condition.
Keywords: $(m-1)$-dimensional Haysdorff measure, uniform continuity.

2000 Mathematics Subject Classification 31B10, 46E27.

В статье рассматривается функция $h_m(x-y) = (\sum_{i=1}^m (x_i - y_i)^2)^{(2-m)/2}$ как отображение из пространства $\mathbb{R}_y^m$ в пространство $L_p(\mathbb{R}^m, d\gamma(x))$, где γ – некоторая положительная мера в пространстве $\mathbb{R}_x^m$.

Теорема. *Пусть $p \geq 1$ – произвольное фиксированное число. Пусть γ – положительная конечная борелевская мера такая, что*

$$\sup \left\{ \int\limits_{B(y,\delta)} |h_m(x-y)|^p d\gamma(x) : y \in \mathbb{R}^m \right\} \to 0 \quad (\delta \to 0). \tag{1}$$

Тогда функция $h_m(x-y) : \mathbb{R}^m \to L_p(\gamma)$ является равномерно непрерывной по переменной y в $\mathbb{R}^m$.

Доказательство.

1. Обозначим

$$\psi(y_1, y_2) = \left(\int |h_m(x-y_1) - h_m(x-y_2)|^p d\gamma(x) \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$F(y) = \left(\int |h_m(x-y)|^p d\gamma(x) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Так как ядро $h_m(x-y)$ как функция из $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}$ не ограничена, то нужно доказать сходимость введенных интегралов. Из неравенства Минковского следует, что

$$F(y) \leq \left(\int\limits_{B(y,\delta)} |h_m(x-y)|^p d\gamma(x) \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_{CB(y,\delta)} |h_m(x-y)|^p d\gamma(x) \right)^{\frac{1}{p}} = J_1 + J_2,$$

где $CB(y,\delta) = \mathbb{R}^m \setminus B(y,\delta)$. При $x \in CB(y,\delta)$ выполняется неравенство

$$|h_m(x-y)| \leq \delta^{2-m}.$$

Из этого неравенства следует, что $J_2 \leq \delta^{2-m}(\gamma(\mathbb{R}^m))^{\frac{1}{p}}$. По условию теоремы $J_1 \leq 1$ при достаточно малых δ. Отсюда получаем конечность $F(y)$. Доказанное можно формулировать и так: при любом $y \in \mathbb{R}^m$ ядро $h_m(x-y)$ есть элемент пространства $L_p(\gamma)$. Из неравенства $\psi(y_1, y_2) \leq F(y_1) + F(y_2)$ следует конечность $\psi(y_1, y_2)$.

2. Докажем, что при $\|x-y\| \geq \delta$, выполняется неравенство

$$\| \nabla_y h_m(x-y) \| \leq \frac{m-2}{\delta^{m-1}}. \tag{2}$$

Имеем

$$(h_m(x-y))'_{y_i} = (m-2)\frac{y_i - x_i}{\|x-y\|^m} \quad (i = 1, 2, ..., m).$$

Из этой формулы легко получается неравенство (2).

3. Теперь докажем, что выполняется соотношение

$$\psi(y, y_0) \to 0 \quad (y \to y_0).$$

Пусть $\delta > 0$ – произвольное число. Будем считать, что выполняется неравенство $\|y - y_0\| \leq \delta$. Последовательное применение неравенства Минковского и включения $B(y_0, 2\delta) \subset B(y, 3\delta)$ даёт

$$\psi(y, y_0) \leq \left(\int\limits_{CB(y_0,2\delta)} |h_m(x-y) - h_m(x-y_0)|^p d\gamma(x) \right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \left(\int\limits_{B(y_0,2\delta)} |h_m(x-y_0)|^p d\gamma(x) \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_{B(y,3\delta)} |h_m(x-y)|^p d\gamma(x) \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= J_1 + J_2 + J_3.$$

Если $x \notin B(y_0, 2\delta), \|y - y_0\| \leq \delta$, то для любого $w \in B(y_0, \|y - y_0\|)$ будут выполняться неравенства $\|x - w\| \geq \delta, \ \|\nabla_y h_m(x - w)\| \leq \dfrac{m-2}{\delta^{m-1}}$. Из оценки градиента следует, что

$$|h_m(x, y) - h_m(x, y_0)| \leq \frac{m-2}{\delta^{m-1}} \|y - y_0\|, \quad J_1 \leq \frac{m-2}{\delta^{m-1}} \left(\gamma(\mathbb{R}^m)\right)^{\frac{1}{p}} \|y - y_0\|.$$

Из условий теоремы получаем: $J_2 \rightrightarrows 0, J_3 \rightrightarrows 0 \quad (\delta \to 0)$, что доказывает требуемое утверждение.

4. Предположим, что утверждение теоремы неверно. Тогда существуют число $\varepsilon > 0$, последовательности y_{2n}, y_{1n} такие, что $y_{2n} - y_{1n} \to 0$ $(n \to \infty)$, $\psi(y_{2n}, y_{1n}) \geq \varepsilon$. Не ограничивая общности, можно считать, что $y_{1n} \to y_0 \in \mathbb{R}^m \cup \{\infty\}$ $(n \to \infty)$.

Так как мера γ конечна, то существует число R такое, что $\gamma(CB(0, R)) < \varepsilon$. Имеем

$$F(y_{1n}) \leq \left(\int\limits_{B(0,R)} |h_m(x-y_{1n})|^p d\gamma(x) \right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \left(\int\limits_{B(y_{1n},\delta)} |h_m(x-y_{1n})|^p d\gamma(x) \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_{E} |h_m(x-y_{1n})|^p d\gamma(x) \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= J_1 + J_2 + J_3,$$

где $E = CB(0, R) \setminus B(y_{1n}, \delta)$. При $x \in E$ выполняется неравенство

$$h_m(x - y) \leq \delta^{2-m}.$$

Из этого неравенства следует, что $J_3 \leq \delta^{(2-m)p}\gamma(CB(0,R)) < \delta^{(2-m)p}\varepsilon$. По условию теоремы $J_2 < \varepsilon$ при достаточно малых δ. Имеется очевидное соотношение $J_1 < \varepsilon$ при достаточно больших $\|y_{1n}\|$. Отсюда получаем, что $F(y_{1n}) \to 0$ $(y_{1n} \to \infty$ $(n \to \infty))$. Аналогично $F(y_{2n}) \to 0$ $(y_{2n} \to \infty$ $(n \to \infty))$. Из неравенства $\psi(y_{2n}, y_{1n}) \leq F(y_{1n}) + F(y_{2n})$ следует, что $\psi(y_{2n}, y_{1n}) \to 0$ $(y_{2n} - y_{1n} \to 0, y_{1n} \to \infty, (n \to \infty))$. Это противоречит принятому предположению $\psi(y_{2n}, y_{1n}) \geq \varepsilon$ и, тем самым, $y_0 \neq \infty$.

Из неравенства Минковского следует, что

$$\psi(y_{2n}, y_{1n}) \leq \psi(y_{2n}, y_0) + \psi(y_{1n}, y_0).$$

Набор полученных нами утверждений в совокупности противоречив. Тем самым теорема доказана.

Отметим, что случай $m = 2$, изучался в работе [1].

Далее приведем примеры конкретных мер γ, для которых справедливо условие (1).

Пример 1. Пусть λ – мера Лебега в пространстве $\mathbb{R}^m$. Мы будем использовать стандартное обозначение $d\lambda = dx$. Рассматриваем интеграл, входящий в условие (1) и, сделав параллельный перенос, получаем равенство:

$$J_1 = \int\limits_{B(y,\delta)} \|x - y\|^{p(2-m)} dx = \int\limits_{B(0,\delta)} \|x\|^{p(2-m)} dx.$$

Введём полярные координаты:

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\varphi_1, \\ x_2 = r\sin\varphi_1\cos\varphi_2, \\ \qquad\qquad \ldots, \\ x_{m-1} = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{m-2}\cos\varphi_{m-1}, \\ x_m = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{m-2}\sin\varphi_{m-1}. \end{cases} \tag{3}$$

Получаем равенство

$$\int\limits_{B(0,\delta)} \|x\|^{p(2-m)} dx = \sigma_{m-1} \int\limits_0^\delta r^{(m-1)+p(2-m)} dr,$$

где σ_{m-1} – площадь единичной сферы в пространстве $\mathbb{R}^m$. Из этого следует, что при $p \in [1, \frac{m}{m-2})$ интеграл J_1 стремится к нулю при $\delta \to 0$ равномерно относительно $y \in \mathbb{R}^m$.

Пример 2. Пусть γ – ограничение $(m-1)$-мерной меры Хаусдорфа на сферу $S(0,R) = \{x : \|x\| = R\}$. Имеем

$$J_2 = J_2(y,\delta) = \int\limits_{B(y,\delta)} \|x - y\|^{p(2-m)} d\gamma(x) = \int\limits_{B(y,\delta)\cap S(0,R)} \|x - y\|^{p(2-m)} dS(x).$$

Обозначим $R_1 = \|y\|$, $y_0 = (R_1, 0, ..., 0)$, $\tilde{x} = (x_2, ..., x_m)$, $\sigma = B(y_0, \delta) \cap S(0, R)$. Функция $J_2(y, \delta)$ является радиально симметрической функцией по переменной y. Поэтому

$$J_2 = \int\limits_\sigma \|x - y_0\|^{p(2-m)} dS(x) = \\ = \int\limits_\sigma \frac{1}{((x_1 - R_1)^2 + \|\tilde{x}\|^2)^{\frac{p(m-2)}{2}}} dS(x) \le \int\limits_\sigma \frac{dS(x)}{\|\tilde{x}\|^{p(m-2)}}. \tag{4}$$

Если $|R_1 - R| \ge \delta$, то $J_2 = 0$. Поэтому в дальнейшем можно считать, что $R_1 \in (R - \delta, R + \delta)$. Введём на сфере $S(0, R)$ полярные координаты (3) с $r = R$. Выполняется равенство

$$dS(x) = R^{m-1} \sin^{m-2} \varphi_1 ... \sin \varphi_{m-2} d\varphi_1 ... d\varphi_{m-1}. \tag{5}$$

Кроме того,

$$\|\tilde{x}\|^2 = R^2 - x_1^2 = R^2 - R^2 \cos^2 \varphi_1 = R^2 \sin^2 \varphi_1. \tag{6}$$

Если $x \in \sigma$, то выполняются неравенства $R - 2\delta < R_1 - \delta \le x_1 \le R$. Поэтому

$$R - 2\delta \le R \cos \varphi_1 \le R, \quad \left(\frac{R - 2\delta}{R}\right)^2 \le \cos^2 \varphi_1 \le 1, \\ 0 \le \sin^2 \varphi_1 \le \frac{4\delta(R - \delta)}{R^2} \le \frac{4\delta}{R}, \quad 0 \le \varphi_1 \le \arcsin 2\sqrt{\frac{\delta}{R}}. \tag{7}$$

Из соотношений (4) – (7) следует неравенство

$$J_2 \le 2R^{m-1-p(m-2)} \pi^{m-1} \int\limits_0^{\arcsin 2\sqrt{\frac{\delta}{R}}} \frac{\sin^{m-2} \varphi_1}{\sin^{p(m-2)} \varphi_1} d\varphi_1.$$

Из этого неравенства, в свою очередь, следует, что при $p \in [1, \frac{m-1}{m-2})$ величина $J_2(y, \delta)$ равномерно относительно $y \in \mathbb{R}^m$ стремится к нулю при $\delta \to 0$.

Пример 3. Пусть γ – ограничение $(m-1)$-мерной меры Хаусдорфа на гиперплоскость $L = \{x : x_m = 0\}$. Рассматриваем следующую величину

$$J_3 = J_3(y, \delta) = \int\limits_{B(y,\delta)} \|x - y\|^{p(2-m)} d\gamma(x) = \int\limits_{B(y,\delta) \cap L} \|x - y\|^{p(2-m)} dS(x).$$

Пусть $y = (y_1, y_2, ..., y_m)$. Заметим, что если $|y_m| \ge \delta$, то $J_3 = 0$. Поэтому мы будем считать, что $y_m \in (-\delta, \delta)$. Имеем

$$J_3 = \int\limits_{B(y,\delta) \cap L} \frac{1}{\left(\sum\limits_{i=1}^{m-1} (x_i - y_i)^2 + y_m^2\right)^{\frac{p(m-2)}{2}}} dS(x),$$

$$J_3 \le \int\limits_{B(y,\delta)\cap L} \frac{1}{\left(\sum\limits_{i=1}^{m-1}(x_i - y_i)^2\right)^{\frac{p(m-2)}{2}}}\, dS(x). \tag{8}$$

Введём на L новые координаты $x = (\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_{m-1}, 0)$. Тогда

$$dS(x) = d\tilde{x}_1 ... d\tilde{x}_{m-1}. \tag{9}$$

Более того имеем

$$\begin{gathered} B(y,\delta)\cap L = \left\{(\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_{m-1}, 0) : \sum_{i=1}^{m-1}(\tilde{x}_i - y_i)^2 \le \delta^2 - y_m^2\right\} \subset \\ \subset \left\{(\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_{m-1}, 0) : \sum_{i=1}^{m-1}(\tilde{x}_i - y_i)^2 \le \delta^2\right\} = B^{m-1}(y,\delta). \end{gathered} \tag{10}$$

Из соотношений (8) $-$ (10) следует неравенство

$$J_3 \le \int\limits_{B^{m-1}(y,\delta)} \frac{1}{\left(\sum\limits_{i=1}^{m-1}(\tilde{x}_i - y_i)^2\right)^{\frac{p(m-2)}{2}}}\, d\tilde{x}_1 ... d\tilde{x}_{m-1}.$$

Заметим, что последний интеграл можно рассмотреть, как и в примере 1, но теперь в случае пространства $\mathbb{R}^{m-1}$. Отсюда следует, что при $p \in [1, \frac{m-1}{m-2})$ величина $J_3(y,\delta)$ стремится к нулю при $\delta \to 0$ равномерно относительно $y \in \mathbb{R}^m$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гришин А.Ф., Шуиги А. Различные виды сходимости последовательностей δ-субгармонических функций. // Матем. сб., – 2008. – 199:6. – С. 27-48.

Статья получена: 9.09.2013; окончательный вариант: 2.10.2013; принята: 3.10.2013.