Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.984.3 № 1081, 2013, с.33–44

Симметрически-спектральные операторы в пространствах ℓ_p $(1 \le p < \infty)$ и c_0

В.А. Марченко

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, пл. Свободы, 4, 61022, Харьков, Украина
vitalii.marchenko@karazin.ua

В работе вводится понятие симметрически-спектрального оператора, которое обобщает понятие спектрального по Риссу оператора на случай банаховых пространств с симметричным базисом. Получена теорема об основных свойствах симметрически-спектральных операторов в пространствах ℓ_p $(1 \le p < \infty)$ и c_0.
Ключевые слова: симметрически-спектральный оператор, симметричный базис, C_0-полугруппа.

Марченко В.А., **Симетрично-спектральні оператори у просторах ℓ_p $(1 \le p < \infty)$ та c_0.** В роботі введено поняття симетрично-спектрального оператора, що узагальнює поняття спектрального за Рисом оператора на випадок банахових просторів із симетричним базисом. Отримано теорему про основні властивості симетрично-спектральних операторів у просторах ℓ_p $(1 \le p < \infty)$ та c_0.
Ключові слова: симетрично-спектральний оператор, симетричний базис, C_0-напівгруппа.

V.A. Marchenko, **Symmetrically-spectral operators on ℓ_p $(1 \le p < \infty)$ and c_0 spaces.** We introduce the concept of symmetrically-spectral operator which generalizes the concept of Riesz-spectral operator to the case of Banach spaces with symmetric basis. We obtain the theorem on the main properties of symmetrically-spectral operators on ℓ_p $(1 \le p < \infty)$ and c_0 spaces.
Keywords: symmetrically-spectral operator, symmetric basis, C_0-semigroup.

2000 Mathematics Subject Classification: 47B40, 47A10, 47D06.

1. Введение

Фундаментальной концепцией анализа бесконечномерных линейных динамических систем являются C_0-полугруппы линейных ограниченных операторов [1]–[5]. Множество систем с распределенными параметрами характеризуются абстрактными дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0 \tag{1}$$

в банаховом пространстве, для которых заранее известно, что (1) имеет единственное решение для всякого начального состояния x_0, т.е. оператор A является инфинитезимальным генератором C_0-полугруппы. Во многих приложениях уравнение (1) рассматривается в сепарабельном гильбертовом пространстве H и, более того, собственные векторы оператора A образуют базис Рисса пространства H, т.е. A – спектральный по Риссу оператор. Таким свойством обладают, к примеру, системы гиперболического типа [1], системы с запаздыванием нейтрального типа [2]–[4], регулярные системы Штурма-Лиувилля [5]. Данное свойство оператора является достаточно ценным с точки зрения приложений, поскольку позволяет в значительной мере упростить методы исследования устойчивости, управляемости, наблюдаемости бесконечномерных систем, см., к примеру, [1]–[4]. Больше информации о спектральных по Риссу операторах содержится в [1].

В данной работе затрагивается вопрос о разработке спектрального подхода к системам (1), которые рассматриваются в банаховом пространстве. Поскольку негильбертовы пространства не обладают базисом Рисса, в работе рассматривается две задачи. Во-первых, мы хотим выявить класс банаховых пространств, в которых вообще возможна разработка спектрального подхода, подобного существующему в пространствах Гильберта. И, во-вторых, мы хотим обосновать спектральный подход для исследования систем (1) в некоторых конкретных банаховых пространствах из выявленного класса. Так как всякий базис Рисса гильбертового пространства является симметричным, в работе предлагается рассматривать симметричные спектральные базисы в банаховых пространствах с симметричным базисом. Пространства с симметричным базисом были впервые введены и изучены И. Зингером [6] в связи с одной задачей С. Банаха и вопросом Ч. Бессаги и А. Пелчинского из изоморфной теории банаховых пространств.

Мы вводим понятие симметрически-спектрального оператора, которое можно рассматривать как естественное обобщение понятия спектрального по Риссу оператора на случай банаховых пространств с симметричным базисом. Также мы получаем результаты об основных свойствах симметрически-спектральных операторов в пространствах ℓ_p $(1 \le p < \infty)$ и c_0, которые можно рассматривать в качестве обоснования спектрального подхода для исследования систем (1) в этих пространствах. В частности, получено спектральное представление симметрически-спектрального оператора A, действующего в ℓ_p или c_0, спектральное представление резольвенты

$(A-\lambda I)^{-1}$, критерий порождения оператором C_0-полугруппы и соотношение для логарифмического показателя роста C_0-полугруппы в терминах спектра $\sigma(A)$. Данный результат можно считать естественным обобщением Теоремы 2.3.5 из [1] о свойствах спектральных по Риссу операторов в гильбертовом пространстве.

2. Симметричные базисы

Всюду далее через $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ мы будем обозначать канонический базис пространства ℓ_p, $1 \le p < \infty$, т.е. $e_n = (\delta_i^n)$, $n \in \mathbb{N}$, где δ_i^n – символ Кронекера. Действие функционала $f \in X^*$ на элемент x банахова пространства X будет обозначаться следующим образом: $\langle f, x\rangle$. В данной работе существенную роль играет следующее определение.

Определение 1 [7] *Базис $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ банахова пространства X называется симметричным, если для всякого $x \in X$*

$$\sup_{\sigma\in\Pi}\ \sup_{|\beta_i|\le 1,\, 1\le k<\infty}\left\|\sum_{i=1}^{k}\beta_i\langle\psi_i, x\rangle\phi_{\sigma(i)}\right\| < \infty,$$

где $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*$ – соответствующая базису биортогональная последовательность (последовательность координатных функционалов), а Π обозначает множество всех перестановок множества $\mathbb{N}$.

К примеру, канонический базис $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ пространства c_0 и $\ell_p, p \ge 1$ является симметричным. В то же время, в пространстве $L_p[0,1], p \ne 2$, симметричных базисов не существует [7]. Очевидно, всякий симметричный базис является безусловным. Все симметричные базисы имеют следующую характеризацию.

Утверждение 1 [7] *Пусть $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – базис пространства X, а $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – соответствующая ему последовательность координатных функционалов. Следующие утверждения эквивалентны.*

1) *$\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – симметричный базис пространства X.*

2) *Для всякого $x \in X$ имеем, что*

$$\sup_{(\rho\times\sigma)\in\Pi\times\Pi}\left\|\sum_{i=1}^{\infty}\langle\psi_{\rho(i)}, x\rangle\phi_{\sigma(i)}\right\| < \infty.$$

3) *Всякая перестановка $\{\phi_{\sigma(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ базиса $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ сама является базисом, изоморфным $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

Заметим, что существуют примеры банаховых пространств с несчетным множеством взаимно неэквивалентных симметричных базисов [8]. Пример банахова пространства с двумя, с точностью до эквивалентности, симметричными базисами содержится в [9]. С другой стороны, следует подчеркнуть, что в пространствах $\ell_p, p \geq 1$ и c_0 все симметричные базисы эквивалентны между собой [8] (с. 129). Иными словами, в пространствах $\ell_p, p \geq 1$ и c_0 существует только один, с точностью до эквивалентности, симметричный базис, и он эквивалентен каноническому. Это замечательное свойство симметричного базиса в пространствах ℓ_p и c_0 позволяет развить с его помощью технику, подобную технике базисов Рисса в гильбертовых пространствах. Таким образом, мы приходим к формулировке утверждений.

Утверждение 2 *Пусть* $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– симметричный базис пространства* ℓ_p, $1 \leq p < \infty$. *Тогда существуют константы* $M \geq m > 0$, *такие, что для всякого* $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n \phi_n \in \ell_p$,

$$m\|x\|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^p \leq M\|x\|^p.$$

Доказательство. Поскольку $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – симметричный базис пространства $\ell_p, p \geq 1$ и в силу того, что все симметричные базисы ℓ_p эквивалентны между собой [8] (с. 129), найдется изоморфизм F, такой, что $\phi_n = Fe_n, n \in \mathbb{N}$. Если $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n \phi_n \in \ell_p$, то, с одной стороны,

$$\|x\|^p = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \phi_n \right\|^p = \left\| F \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \right\|^p \leq \|F\|^p \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \right\|^p =$$

$$= \|F\|^p \left\| \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \end{pmatrix} \right\|^p = \|F\|^p \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^p.$$

С другой стороны,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^p = \left\| \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \end{pmatrix} \right\|^p = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \right\|^p = \left\| F^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \phi_n \right\|^p \leq \|F^{-1}\|^p \|x\|^p.$$

Утверждение 3 *Пусть* $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– симметричный базис пространства* c_0. *Тогда существуют константы* $M \geq m > 0$, *такие, что для всякого* $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n \phi_n \in c_0$,

$$m\|x\| \leq \sup_{n \geq 1} |\alpha_n| \leq M\|x\|.$$

Доказательство этого утверждения проводится аналогично доказательству предыдущего.

3. Симметрически-спектральные операторы

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение.

Утверждение 4 *Пусть замкнутый, линейный оператор A в банаховом пространстве X с базисом имеет простой спектр $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ и соответствующие собственные вектора $\{\phi_n\}_{n\geq 1}$ образуют базис X. Если $\{\psi_n\}_{n\geq 1}$ – собственные вектора A^*, соответствующие $\{\overline{\lambda_n}\}_{n\geq 1}$, а*

$$\widetilde{\psi_n} = \frac{\psi_n}{\langle \psi_n, \phi_n \rangle},$$

то $\{\phi_n\}_{n\geq 1}$ и $\{\widetilde{\psi_n}\}_{n\geq 1}$ биортогональны друг другу.

Доказательство.

$$\lambda_n \langle \psi_m, \phi_n \rangle = \langle \psi_m, A\phi_n \rangle = \langle A^*\psi_m, \phi_n \rangle = \langle \overline{\lambda_m}\psi_m, \phi_n \rangle = \lambda_m \langle \psi_m, \phi_n \rangle.$$

Если теперь $\lambda_n \neq \lambda_m$, то $\langle \psi_m, \phi_n \rangle = 0$. Следовательно, $\langle \widetilde{\psi_m}, \phi_n \rangle = \delta_n^m$.

По аналогии с понятием спектрального по Риссу оператора, действующего в гильбертовом пространстве [1], введем понятие симметрически-спектрального оператора.

Определение 2 *Предположим, что A является замкнутым линейным оператором, действующим в банаховом пространстве X, наделенном симметричным базисом. Пусть A имеет простые собственные значения $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$, и соответствующие этим значениям собственные векторы $\{\phi_n\}_{n\geq 1}$ образуют симметричный базис X. Если замыкание $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ тотально разделено, то мы назовем A симметрически-спектральным оператором.*

Под тотальной разделенностью мы понимаем то, что множество $\overline{\{\lambda_n\}_{n\geq 1}}$ не содержит двух точек, которые могут быть соединены кривой, целиком лежащей в $\overline{\{\lambda_n\}_{n\geq 1}}$. Следовательно, Определение 2 допускает к рассмотрению операторы с конечным количеством точек сгущения собственных значений. Отметим, что, так как всякий базис Рисса является симметричным, понятие симметрически-спектрального оператора является, с одной стороны, естественным обобщением понятия спектрального по Риссу оператора на случай банаховых пространств с симметричным базисом и включает в себя последнее. С другой стороны, симметрически-спектральные операторы образуют подкласс во множестве спектральных операторов в смысле Данфорда и Шварца [10].

4. Симметрически-спектральные операторы в ℓ_p и c_0

В этом разделе будет показано, что симметрически-спектральные операторы в пространствах ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ и c_0 обладают рядом замечательных свойств, которые подобны свойствам спектральных по Риссу операторов в гильбертовых пространствах. А именно, справедлива следующая теорема о свойствах симметрически-спектральных операторов в пространствах ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$.

Теорема 1 *Пусть A – симметрически-спектральный оператор в пространстве ℓ_p $(1 \le p < \infty)$ с простым спектром $\{\lambda_n\}_1^\infty$ и соответствующими собственными векторами $\{\phi_n\}_1^\infty$, а $\{\chi_n\}_1^\infty$ – собственные вектора A^*. Рассмотрим последовательность векторов $\left\{\psi_n = \frac{\chi_n}{\langle\chi_n,\phi_n\rangle}\right\}_1^\infty$.*

Тогда оператор A обладает следующими свойствами:
(i) $\rho(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n - \lambda| > 0\right\}, \quad \sigma(A) = \overline{\{\lambda_n\}_1^\infty},$

$$(A-\lambda I)^{-1}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \langle\psi_n, x\rangle\phi_n \quad (\lambda \in \rho(A),\ x \in \ell_p). \tag{2}$$

(ii) Для всякого $x \in D(A)$ оператор A имеет спектральное представление

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle\psi_n, x\rangle\phi_n, \tag{3}$$

$$\text{\it причем}\, D(A) = \left\{x \in \ell_p : \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^p |\langle\psi_n, x\rangle|^p < \infty\right\}.$$

(iii) Оператор A генерирует C_0 -полугруппу тогда и только тогда, когда

$\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \Re(\lambda_n) < \infty$; *при этом действие полугруппы задается формулой*

$$T(t)x = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \langle\psi_n, x\rangle\phi_n \quad (t \ge 0,\ x \in \ell_p). \tag{4}$$

(iv) Логарифмический показатель роста полугруппы совпадает с

$$\omega_0 = \sup_{n\in\mathbb{N}} \Re(\lambda_n). \tag{5}$$

Доказательство. Применив Утверждение 4, мы отмечаем, что $\langle\psi_m, \phi_n\rangle = \delta_n^m$, и, следовательно, для всякого $x \in \ell_p$, $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \langle\psi_n, x\rangle\phi_n$.

(i) Рассмотрим точку $\lambda \in \mathbb{C}$, такую, что $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n - \lambda| \ge a > 0$. Установим, что оператор

$$A_\lambda x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \langle\psi_n, x\rangle\phi_n$$

является резольвентой оператора A. Применив Утверждение 2 дважды, мы видим, что для всякого $x \in \ell_p$,

$$\|A_\lambda x\|^p \le \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n - \lambda|^p} |\langle\psi_n, x\rangle|^p \le \frac{1}{ma^p} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle\psi_n, x\rangle|^p \le \frac{M}{ma^p} \|x\|^p,$$

т.е. A_λ – ограничен. Зафиксируем $x \in \ell_p$ и рассмотрим

$$z_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \langle \psi_n, x \rangle \phi_n.$$

Тогда

$$(A - \lambda I)\, z_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \langle \psi_n, x \rangle (\lambda_n \phi_n - \lambda \phi_n) = \sum_{n=1}^{N} \langle \psi_n, x \rangle \phi_n$$

и $z_N \to A_\lambda x$, если $N \to \infty$. Но $(A - \lambda I)\, z_N \to x$ при $N \to \infty$, и в силу замкнутости оператора A отсюда следует, что $A_\lambda x \in D(A)$ и для всякого $x \in \ell_p$

$$(A - \lambda I)\, A_\lambda x = x. \tag{6}$$

Возьмем теперь $y \in D(A)$ и рассмотрим $x = (A - \lambda I)\, y$. Тогда, в силу (6), $x = (A - \lambda I)\, A_\lambda x = (A - \lambda I)\, A_\lambda\, (A - \lambda I)\, y$. Следовательно,

$$(A - \lambda I)\, (y - A_\lambda\, (A - \lambda I)\, y) = x - x = 0$$

и, так как λ не является собственным значением A, то для всякого $y \in D(A)$

$$y = A_\lambda\, (A - \lambda I)\, y.$$

Комбинируя это равенство с (6) получим, что $\lambda \in \rho(A)$ и $A_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$. Таким образом установлено, что

$$\left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \inf_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n - \lambda| > 0 \right\} \subset \rho(A).$$

Для завершения доказательства остается заметить, что, поскольку $\lambda_n \in \sigma(A)$ и спектр замкнутого оператора замкнут, мы имеем, что $\sigma(A) = \overline{\{\lambda_n\}_1^\infty}$ и

$$\rho(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \inf_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n - \lambda| > 0 \right\}.$$

(ii) Прежде всего докажем, что

$$B = \left\{ x \in \ell_p : \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^p |\langle \psi_n, x \rangle|^p < \infty \right\} \subset D(A)$$

и что для всех $x \in B$ справедливо спектральное представление (3). Для $x \in B$ рассмотрим элемент $x_N = \sum\limits_{n=1}^{N} \langle \psi_n, x \rangle \phi_n$. Тогда, согласно Утверждению 2, $\{x_N\}_{N=1}^\infty$ и $\{A x_N = \sum\limits_{n=1}^{N} \lambda_n \langle \psi_n, x \rangle \phi_n\}_{N=1}^\infty$ сходятся при $N \to \infty$ к x и к

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle \psi_n, x \rangle \phi_n$, соответственно. В силу замкнутости оператора A мы заключаем, что $x \in D(A)$ и $Ax = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle \psi_n, x \rangle \phi_n$.

Значит, $B \subset D(A)$ и нам остается увидеть, что $D(A) \subset B$. Предположим, что $x \in D(A)$ и рассмотрим элемент $y = (A - \lambda I)\, x$, если $\lambda \in \rho(A)$. На основании доказанного свойства (i) мы имеем

$$x = (A - \lambda I)^{-1}\, y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \langle \psi_n, y \rangle \phi_n$$

и $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \langle \psi_n, x \rangle \phi_n$. В силу того, что $\{\phi_n\}_1^{\infty}$ – базис, мы имеем

$$\frac{1}{\lambda_n - \lambda} \langle \psi_n, y \rangle = \langle \psi_n, x \rangle \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Следовательно, $x \in B$, так как для всякого $\lambda \in \rho(A)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^p |\langle \psi_n, x \rangle|^p = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda} \right|^p |\langle \psi_n, y \rangle|^p = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\lambda}{\lambda_n - \lambda} + 1 \right|^p |\langle \psi_n, y \rangle|^p \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left| \frac{\lambda}{\lambda_n - \lambda} \right| + |1| \right)^p |\langle \psi_n, y \rangle|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|\lambda|}{\mu} + 1 \right)^p |\langle \psi_n, y \rangle|^p \leq$$

$$\leq M \left(\frac{|\lambda|}{\mu} + 1 \right)^p \|y\|^p,$$

где $\mu = \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n - \lambda|$.

(iii) Если оператор A генерирует C_0-полугруппу $T(t)$, то

$$\omega_0 = \inf_{t > 0} \frac{\ln \|T(t)\|}{t} < \infty$$

и любая точка $\lambda \in \mathbb{C} :\ \Re(\lambda) > \omega_0$ попадает в $\rho(A)$. Следовательно,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \Re(\lambda_n) < \infty. \tag{7}$$

Покажем, что условие (7) является достаточным для порождения оператором A полугруппы. Как было показано в (i), для всякого λ, такого, что $\Re(\lambda) > \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \Re(\lambda_n) = \omega$, резольвента оператора A имеет представление

$$(A - \lambda I)^{-1}\, x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \langle \psi_n, x \rangle \phi_n, \quad (x \in \ell_p), \ \text{откуда}$$

$$(A-\lambda I)^{-k}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\lambda_n-\lambda)^k}\langle\psi_n,x\rangle\phi_n \quad (k\in\mathbb{N}).$$

Применив Утверждение 2, получаем, что

$$\left\|(A-\lambda I)^{-k}x\right\|^p\le\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_n-\lambda|^{pk}}|\langle\psi_n,x\rangle|^p\le\frac{M\|x\|^p}{m\,(Re(\lambda)-\omega)^{pk}}.$$

Отсюда, применяя известную теорему Хилле - Иосиды, мы заключаем, что оператор A порождает C_0-полугруппу $T(t)$, причем

$$\|T(t)\|\le\sqrt{\frac{M}{m}}e^{\omega t}. \tag{8}$$

Осталось установить (4). Определим оператор e^{At} для всякого $x\in\ell_p$ так:

$$e^{At}x=\sum_{n=1}^{\infty}e^{\lambda_n t}\langle\psi_n,x\rangle\phi_n.$$

Этот оператор ограничен для всякого $t\ge 0$ в силу Утверждения 2 и условия (7). Рассмотрим $\lambda:\ \Re(\lambda)>\omega$. Применяя преобразование Лапласса, на основании (i) и представления резольвенты C_0-полугруппы, имеем

$$\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}e^{At}xdt=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\sum_{n=1}^{\infty}e^{\lambda_n t}\langle\psi_n,x\rangle\phi_n dt=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}e^{\lambda_n t}\langle\psi_n,x\rangle\phi_n dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda-\lambda_n}\langle\psi_n,x\rangle\phi_n=-\left(A-\lambda I\right)^{-1}x=$$

$$=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}T(t)xdt \quad (x\in\ell_p).$$

Следовательно,

$$\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\left(e^{At}x-T(t)x\right)dt=0.$$

Единственность преобразования Лапласса завершает доказательство (4).

(iv) Из (iii) и неравенства (8) имеем, что $T(t)\phi_n=e^{\lambda_n t}\phi_n$, $(t\ge 0)$, и

$$\omega_0=\lim_{t\to\infty}\frac{\ln\|T(t)\|}{t}\le\omega=\sup_{n\in\mathbb{N}}\Re(\lambda_n).$$

Следовательно, для всех натуральных n,

$$\omega_0=\inf_{t>0}\frac{\ln\|T(t)\|}{t}\ge\Re(\lambda_n)\quad \text{и}\quad \omega_0=\sup_{n\in\mathbb{N}}\Re(\lambda_n).$$

Теорема доказана.

Следующая теорема устанавливает ряд свойств симметрически-спектральных операторов в пространстве c_0.

Теорема 2 *Пусть A – симметрически-спектральный оператор в пространстве c_0 с простым спектром $\{\lambda_n\}_1^\infty$ и соответствующими собственными векторами $\{\phi_n\}_1^\infty$, а $\{\chi_n\}_1^\infty$ – собственные вектора A^*.*
Рассмотрим последовательность векторов $\left\{\psi_n = \frac{\chi_n}{\langle \chi_n, \phi_n\rangle}\right\}_1^\infty$.

Тогда оператор A обладает следующими свойствами:
(i) $\rho(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n - \lambda| > 0\right\}, \quad \sigma(A) = \overline{\{\lambda_n\}_1^\infty}$,

$$(A-\lambda I)^{-1} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \langle \psi_n, x\rangle \phi_n \quad (\lambda \in \rho(A),\ x \in c_0). \tag{9}$$

(ii) Для всякого $x \in D(A)$ оператор A имеет спектральное представление

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle \psi_n, x\rangle \phi_n, \tag{10}$$

$$\text{причем } D(A) = \left\{x \in c_0 : \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n||\langle \psi_n, x\rangle| < \infty\right\}.$$

(iii) Оператор A генерирует C_0-полугруппу тогда и только тогда, когда $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \Re(\lambda_n) < \infty$; при этом действие полугруппы задается формулой

$$T(t)x = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \langle \psi_n, x\rangle \phi_n \quad (t \geq 0,\ x \in c_0). \tag{11}$$

(iv) Логарифмический показатель роста полугруппы совпадает с

$$\omega_0 = \sup_{n\in\mathbb{N}} \Re(\lambda_n). \tag{12}$$

Доказательство Теоремы 2 основано на тех же рассуждениях, что и доказательство Теоремы 1, с привлечением Утверждения 3.

Пункт (i) Теорем 1 и 2 также означает, что, если A – симметрически-спектральный оператор в ℓ_p или c_0, имеющий собственные значения $\{\lambda_n\}_1^\infty$, которые могут сгущаться только на бесконечности, то $\sigma(A) = \{\lambda_n\}_1^\infty$. Иными словами, оператор A имеет только точечный спектр. В некотором смысле можно сказать, что пункт (ii) Теорем 1 и 2 допускает обращение, а именно, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 5 *Предположим, что линейный оператор A имеет представление (3) или (10), где $\{\lambda_n\}_1^\infty$ – различные комплексные числа, $\{\phi_n\}_1^\infty$ – симметричный базис ℓ_p или c_0, соответственно, и $\langle \psi_m, \phi_n\rangle = \delta_n^m$. Если $\overline{\{\lambda_n\}_1^\infty}$ тотально разделено, то A – симметрически-спектральный оператор.*

Доказательство. Достаточно показать, что оператор A замкнут и плотно определен. Докажем утверждение в случае пространства ℓ_p. В силу представления (3), для всякого $j \in \mathbb{N}$

$$\phi_j \in D(A) = \left\{ x \in \ell_p : \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^p |\langle \psi_n, x\rangle|^p < \infty \right\}$$

и

$$A\phi_j = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle \psi_n, \phi_j\rangle \phi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \delta_n^j \phi_n = \lambda_j \phi_j,$$

откуда следует, что $\{\phi_n\}_1^\infty$ – (все) собственные вектора A. Поскольку они формируют базис ℓ_p, оператор A является плотно определенным.

Для доказательства замкнутости A рассмотрим последовательность $\{x_k\}_1^\infty \subset D(A)$, такую, что $x_k \to x^*$, если $k \to \infty$ и $Ax_k \to y^*$ при $k \to \infty$. Так как последовательность $\{Ax_k\}_1^\infty$ – ограничена, применяя Утверждение 2, мы видим, что для любого $k \in \mathbb{N}$,

$$M^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n \langle \psi_n, x_k\rangle|^p \le \|Ax_k\|^p \le C,$$

$$m\|Ax_k\|^p \le \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n \langle \psi_n, x_k\rangle|^p \le M\|Ax_k\|^p.$$

Предельный переход по $k \to \infty$ дает

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n \langle \psi_n, x^*\rangle|^p \le MC,$$

$$m\|y^*\|^p \le \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n \langle \psi_n, x^*\rangle|^p \le M\|y^*\|^p,$$

откуда $x^* \in D(A)$. Так как теперь

$$m\|Ax^*\|^p \le \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n \langle \psi_n, x^*\rangle|^p \le M\|Ax^*\|^p,$$

то $Ax^* = y^*$ и A – замкнутый оператор. Доказательство утверждения в случае пространства c_0 проводится аналогично.

5. Выводы

Данная работа закладывает основы спектрального подхода для исследования систем (1) в пространствах с симметричным базисом. Для этого вводится понятие симметрически-спектрального оператора, обобщающее понятие спектрального по Риссу оператора в гильбертовом пространстве. Используя тот факт, что в пространствах ℓ_p и c_0 существует единственный, с точностью до изоморфизма, симметричный базис, и он эквивалентен каноническому базису, мы устанавливаем ряд свойств симметрически-спектральных операторов в пространствах ℓ_p и c_0 (Теоремы 1 и 2).

Подобно тому, как техника спектральных базисных риссовских разложений играет важную роль в исследовании устойчивости, управляемости и наблюдаемости систем (1) в гильбертовых пространствах, полученные в настоящей работе результаты могут быть весьма полезны в исследовании устойчивости, управляемости и наблюдаемости систем (1) в пространствах ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ и c_0.

ЛИТЕРАТУРА

1. Curtain R.F., Zwart H.J. An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory, Texts in Applied Mathematics, Volume 21.– New-York: Springer-Verlag, 1995. – 698 p.

2. Rabah R., Sklyar G.M., Rezounenko A.V. Generalized Riesz basis property in the analysis of neutral type systems // C. R. Math. Acad. Sci. Paris, Ser. I – 2003. – **337**. – P. 19–24

3. Rabah R., Sklyar G.M., Rezounenko A.V. Stability analysis of neutral type systems in Hilbert space // J. Differential Equations, – 2005. – **214**. – P. 391–428

4. Rabah R., Sklyar G.M. The analysis of exact controllability of neutral-type systems by the moment problem approach // SIAM J. Control Optim., – 2007. – **46**, no 6. – P. 2148–2181

5. Delattre C., Dochain D., Winkin J. Sturm-Liouville systems are Riesz-spectral systems // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., – 2003. – **13**, no 4. – P. 481–484

6. Зингер И. О банаховых пространствах с симметричным базисом // Revue de math. pures et appl., – 1961. – **6**. – P. 159–166

7. Singer I. Bases in Banach Spaces I.– Berlin: Springer-Verlag, 1970. – 668 p.

8. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach Spaces I.– Reprint of the 1977 ed., Berlin: Springer-Verlag, 1996. – 188 p.

9. Read C.J. A Banach space with, up to equivalence, precisely two symmetric bases // Israel J. Math., – 1981. – **40**, no 1. – P. 33–53

10. Данфорд Н. и Шварц Дж.Т. Линейные операторы, том 3: Спектральные Операторы.– Москва: Мир, 1974. – 661 с.

Статья получена: 5.10.2013; окончательный вариант: 15.10.2013; принята: 19.11.2013.