Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.977 № 1081, 2013, с.67–75

Экспоненциальная стабилизация одного класса нелинейных систем с ограниченным управлением

В.И. Коробов[ab], А.В. Луценко[a]

[a] *Харьковский национальный университет,*
пл. Свободы, 4, 61022, Харьков, Украина
[b] *Щецинский университет, Польша*
vkorobov@univer.kharkov.ua,
avluts@gmail.com

Рассматривается задача робастной экспоненциальной стабилизации семейства управляемых нелинейных систем, содержащего неопределенности и нелинейно зависящего от управления. Получены достаточные условия робастной стабилизации и синтезированы регуляторы, осуществляющие робастную стабилизацию. Приведены численные примеры.
Ключевые слова: экспоненциальная стабилизация, робастность.

Коробов В.І., Луценко А.В., **Експоненціальна стабілізація одного класу нелінійних систем з обмеженим керуванням.** Розглядається задача робастної експоненціальної стабілізації сімейства керованих нелінійних систем, що містить невизначеності і нелінійно залежить від управління. Отримано достатні умови робастної стабілізації та синтезовані регулятори, які здійснюють робастну стабілізацію. Наведено чисельні приклади.
Ключові слова: експоненціальна стабілізація, робастність.

V.I. Korobov, A.V. Lutsenko, **Exponential stabilization of a class of nonlinear systems with constrained control.** This paper studies the problem of robust exponential stabilization of a class of nonlinear controlled systems containing uncertainty and nonlinear depending on the control. Sufficient conditions for the robust stabilization are obtained and regulators implementing robust stabilization are synthesized. Numerical examples are given.
Keywords: exponential stabilization, robustness.

2010 Mathematics Subject Classification: 93D15.

1. Введение

В последние десятилетия интенсивно исследуется проблема стабилизации нелинейных систем [1, 2, 4, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 14, 18]. Значительное место в теории стабилизации занимает проблема робастной стабилизации [2, 3, 5, 11, 15, 16, 17], связанная с наличием неопределенностей в математическом описании систем управления.

Первым результатом в этом направлении можно считать теорему А. М. Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Одним из наиболее эффективных методов исследования проблемы стабилизации нелинейных систем является метод функций Ляпунова, представляющий собой мощный инструментарий анализа и синтеза систем управления, позволивший получить большое количество важных результатов [1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 12, 14].

Метод функций Ляпунова применяется и в настоящей статье, цель которой получить достаточные условия робастной экспоненциальной стабилизации класса нелинейных неавтономных систем с ограниченным управлением.

2. Достаточные условия робастной экспоненциальной стабилизации

В евклидовом пространстве R^n рассматриваются нелинейные системы

$$\dot{x} = a(t,x) + b(t,x)p(t,x,u)\,, \quad (t,x,u) \in R^+ \times R^n \times R^m\,, \tag{1}$$

где $R^+ = [0,\infty)$, $x \in R^n$ – вектор состояния, $u \in R^m$ – вектор управления, $a(t,x) \in R^n$, $b(t,x) \in R^{n\times m}$, $p(t,x,u) \in R^m$. Здесь $R^{n\times m}$ – множество действительных $(n \times m)$-матриц. Предполагается, что $u \in \Omega \subset R^m$, функции $a(t,x)$, $b(t,x)$, $p(t,x,u)$ непрерывны, непрерывно дифференцируемы по x, u в $R^+ \times R^n \times R^m$, удовлетворяют условию $a(t,0) = b(t,0)p(t,0,0) = 0$, функция $p(t,x,u)$ содержит неопределенности.

Введем необходимые **обозначения**:
1) $(^*)$ – операция транспонирования;
2) $\|x\| = \sqrt{x^*x}$ – евклидова норма вектора $x \in R^n$;
3) C_D^1 – совокупность гладких на множестве D функций;
4) $\dfrac{\partial v(t,x)}{\partial x} = \left(\dfrac{\partial v(t,x)}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial v(t,x)}{\partial x_n}\right)$ – матрица Якоби скалярной функции $v(t,x)$;
5) $\dot{v}(t,x)|_{(2)}$ – производная Ляпунова функции $v(t,x)$ в силу системы (2):

$$\dot{x} = f(t,x)\,, \tag{2}$$

то есть $\dot{v}(t,x) = \dfrac{\partial v(t,x)}{\partial t} + \dfrac{\partial v(t,x)}{\partial x} f(t,x)$.
6) $B(t,x) = (B_1(t,x), \dots, B_m(t,x)) = \dfrac{\partial v(t,x)}{\partial x} b(t,x)$.

Определение 1. Нулевое решение системы (2) называется *экспонен циально устойчивым*, если существуют положительные числа α, δ, L такие, что каждое решение $x(t)$ системы (2) с начальным условием $x(t_0)$, $\|x(t_0)\| < \delta$ удовлетворяет неравенству $\|x(t)\| \le L\|x(t_0)\|\, e^{-\alpha(t-t_0)}$ при $t \ge t_0$.

Определение 2. Системы (1) называются *робастно экспоненциально стабилизируемыми*, если можно указать управление $u = u(t,x)$, такое что нулевое решение систем $\dot{x} = a(t,x) + b(t,x)p(t,x,u(t,x))$ является экспоненциально устойчивым.

В приводимой ниже теореме устанавливаются достаточные условия робастной экспоненциальной стабилизации и указывается управление, осуществляющее стабилизацию.

Теорема 1 *Пусть существует непрерывная функция* $\psi(z) : D \to \Omega \subset R^m$, $D \subset R^m$ *и скалярная функция* $v(t,x) \in C^1_{D_1}$, $D_1 = R^+ \times R^n$, *удовлетворяющая в* D_1 *условиям*

$$\begin{gathered} c_1\|x\|^2 \le v(t,x) \le c_2\|x\|^2, \quad c_1 > o, \ \ c_2 > 0, \\ \frac{\partial v(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial v(t,x)}{\partial x}\, a(t,x) \le 0 \end{gathered} \tag{3}$$

и пусть при непрерывных в D_1 *скалярных функциях* $\{a_i(t,x)\}_{i=1}^{2k+1}$, *удовлетворяющих условиям*

$$a_2(t,x) > 0,\ a_{2i}(t,x) \ge 0,\ i = \overline{2,k}\,,\ a_{2s+1}(t,x)a_2(t,x) \le a_{2s}(t,x),\ s = \overline{1,k}\,,$$

выполняются неравенства

$$a_1(t,x)\|B(t,x)\| \le (b_1 - c_3)\|x\|^2, \quad 0 < c_3 < b_1\,, \tag{4}$$

и

$$z(t,x)p_0(t,x,z(t,x)) \le \sum_{i=1}^{2k+1} (-1)^{i-1} a_i(t,x)\|z(t,x)\|^i - b_1 q(t,x)\|x\|^2\,. \tag{5}$$

Здесь

$$\begin{aligned} &p_0(t,x,z) = -p(t,x,\psi(z)), \\ &z(t,x) = (z_1(t,x),\, \dots\,, z_m(t,x)) = -q(t,x)B(t,x) \in D, \\ &q(t,x) = \frac{a_2(t,x)}{\|B(t,x)\| + d(t,x)}\,, \end{aligned}$$

где $d(t,x)$ *– непрерывная положительная в* D_1 *функция. Тогда функция*

$$u(t,x) = \psi(z(t,x)), \tag{6}$$

где

$$z(t,x) = -q(t,x)B(t,x)$$

является управлением, робастно стабилизирующим системы (1).

Доказательство. Подставив управление (6) в (1), получаем

$$\dot{x} = a(t,x) + b(t,x)p(t,x,u(t,x)) = a(t,x) - b(t,x)p_0(t,x,z(t,x)). \tag{7}$$

Вычислим производную Ляпунова функции $v(t,x)$ в силу системы (7):

$$\begin{aligned} \dot{v}(t,x)|_{(7)} &= \frac{\partial v(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial v(t,x)}{\partial x}\, a(t,x) - \frac{\partial v(t,x)}{\partial x}\, b(t,x)p_0(t,x,z(t,x)) \le \\ &\le -\frac{\partial v(t,x)}{\partial x} b(t,x)p_0(t,x,z(t,x)) = -B(t,x)p_0(t,x,z(t,x)). \end{aligned} \tag{8}$$

Подставив

$$z(t,x) = -q(t,x)B(t,x)$$

в неравенство (5), получаем

$$\begin{aligned} &-q(t,x)B(t,x)p_0(t,x,z(t,x)) \le \\ &\le \sum_{i=1}^{2k+1} (-1)^{i-1} a_i(t,x) q^i(t,x) \|B(t,x)\|^i - b_1 q(t,x)\|x\|^2 = \\ &= a_1(t,x)q(t,x)\|B\| + \sum_{s=1}^{k} \left(a_{2s+1} q^{2s+1} \|B\|^{2s+1} - a_{2s} q^{2s} \|B\|^{2s} \right) - b_1 q(t,x)\|x\|^2. \end{aligned}$$

Сократив на положительный множитель $q(t,x)$, имеем

$$\begin{aligned} &-B(t,x)p_0(t,x,z(t,x)) \le \\ &\le a_1(t,x)\|B\| + \sum_{s=1}^{k} \left(a_{2s+1} q^{2s} \|B\|^{2s+1} - a_{2s} q^{2s-1} \|B\|^{2s} \right) - b_1\|x\|^2 \le \\ &\le -c_3\|x\|^2 + \sum_{s=1}^{k} q^{2s-1}\|B\|^{2s} \left(\frac{a_{2s}}{a_2}\, \frac{a_2\|B\|}{\|B\| + d(t,x)} - a_{2s} \right) \le -c_3\|x\|^2 . \end{aligned}$$

Отсюда и из (8) получаем

$$\dot{v}(t,x)|_{(7)} \le -c_3\|x\|^2 . \tag{9}$$

Пусть $x(t)$ – произвольное решение системы (7). В силу соотношений (3), (9) имеем

$$\dot{v}(t,x(t)) + \frac{c_3}{c_2}\, v(t,x(t)) \le 0.$$

Умножив последнее неравенство на $\exp\left(\frac{c_3}{c_2}\, t\right)$ и проинтегрировав от t_0 до t, получаем

$$v(t,x(t)) \le v(t_0,x(t_0))\, e^{-\frac{c_3}{c_2}\,(t-t_0)},$$

откуда, применив (3), имеем

$$c_1\|x(t)\|^2 \le c_2\|x(t_0)\|^2 e^{-\frac{c_3}{c_2}\,(t-t_0)},$$

то есть

$$\|x(t)\| \leq L\|x(t_0)\, e^{-\alpha(t-t_0)}\|\,, \quad L = \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}\,, \quad \alpha = \frac{c_3}{2c_2}$$

Таким образом, нулевое решение системы (7) экспоненциально устойчиво.
Теорема доказана.

Примеры

Пример 1. Рассмотрим системы

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -(4+2e^{-t})x_1 - 2x_2 - t^2x_1^3 \\ 3x_1 - 10x_2 - 4x_2^3 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \left(1 + \dfrac{1}{2}\, e^{-t}\right) x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} \left(f(t,x)u + g(t,x)u^2 + 2\ln\frac{2e^3 + (e^3+1)u}{2-(e^3+1)u} \right),\ t \geq 0,$$

где $x = (x_1\,, x_2)^*$; $\dfrac{-2e^3}{e^3+1} < u < \dfrac{2}{e^3+1}$; f, g – непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям $|f(t,x)| \leq \dfrac{1}{2}$, $|g(t,x)| \leq \dfrac{1}{4}$.
Представим эти системы в следующей форме:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2x_2 - t^2x_1^3 \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_2^3 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \left(1 + \dfrac{1}{2}\, e^{-t}\right) x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} \left(f(t,x)u + g(t,x)u^2 + 2\ln\frac{2e^3 + (e^3+1)u}{2-(e^3+1)u} - 4 \right),$$

$t \geq 0.$

Здесь

$$a(t,x) = \begin{pmatrix} -2x_2 - t^2x_1^3 \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_2^3 \end{pmatrix}, \qquad b(t,x) = \begin{pmatrix} \left(1 + \dfrac{1}{2}\, e^{-t}\right) x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix},$$

$$p(t,x,u) = f(t,x)u + g(t,x)u^2 + 2\ln\frac{2e^3 + (e^3+1)u}{2-(e^3+1)u} - 4.$$

Проверим, что при

$$\psi(z) = \frac{2(e^{2z} - e^3)}{(e^3+1)(e^{2z}+1)}\,, \quad v(t,x) = 3x_1^2 + 2x_2^2$$

выполняются условия теоремы.

Легко видеть, что

$$-\frac{2e^3}{e^3+1} < \psi(z) < \frac{2}{e^3+1},$$

$$2\|x\|^2 \le v(t,x) \le 3\|x\|^2\,,$$

$$\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial v(t,x)}{\partial x}\,a(t,x) = -6t^2x_1^4 - 8x_2^2 - 16x_2^4 \le 0\,,$$

$$B(t,x) = 6\left(1+\frac{1}{2}\,e^{-t}\right)x_1^2 + 8x_2^2\,,$$
$$p_0(t,x,z) = -p(t,x,\psi(z)) =$$
$$= -f(t,x)\psi(z) - g(t,x)\psi^2(z) - 2\ln\frac{2e^3+(e^3+1)\psi(z)}{2-(e^3+1)\psi(z)} + 4\,.$$

Тогда

$$z(t,x)p_0(t,x,z(t,x)) =$$

$$= -f(t,x)z(t,x)\psi(z(t,x)) - g(t,x)z(t,x)\psi^2(z(t,x)) -$$

$$-2z(t,x)\ln\frac{2e^3+(e^3+1)\psi(z(t,x))}{2-(e^3+1)\psi(z(t,x))} + 4z(t,x) \le$$

$$\le |z(t,x)| + |z(t,x)| - 4z^2(t,x) + 4z(t,x) =$$

$$= 2|z(t,x)| - 4z^2(t,x) + 4z(t,x).$$

Так как $z(t,x) = -q(t,x)B(t,x)$, то $z(t,x) \le -6q(t,x)\|x\|^2$, следовательно

$$z(t,x)p_0(t,x,z(t,x)) \le 2|z(t,x)| - 4z|(t,x)|^2 - 24q(t,x)\|x\|^2.$$

Из последнего неравенства вытекает, что можно положить

$$a_1(t,x) = 2, \quad a_2(t,x) = 4, \quad a_3(t,x) = 0, \quad b_1 = 24.$$

Положив $d(t,x) = 2$, получаем

$$q(t,x) = \frac{4}{6\left(1+\frac{1}{2}\,e^{-t}\right)x_1^2 + 8x_2^2 + 2}.$$

Наконец,

$$a_1(t,x)\|B(t,x)\| = 2\left(6\left(1+\frac{1}{2}\,e^{-t}\right)x_1^2 + 8x_2^2\right) \le 18\|x\|^2,$$

так что можно положить $c_3 = 6$.

Итак, выполнены условия теоремы. Следовательно, управление

$$u(t,x) = \psi(z(t,x)) = \frac{2(e^{2z(t,x)} - e^3)}{(e^3+1)(e^{2z(t,x)}+1)},$$

$$z(t,x) = \frac{4\left(6\left(1+\frac{1}{2}\,e^{-t}\right)x_1^2 + 8x_2^2\right)}{6\left(1+\frac{1}{2}\,e^{-t}\right)x_1^2 + 8x_2^2 + 2}$$

экспоненциально стабилизирует данные системы.

Пример 2. Рассмотрим системы

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -9x_1 - \dfrac{2x_2x_3}{1+t} - x_1^3 \\ \dfrac{3x_1x_3}{1+t} - 16x_2 - 4x_2^3 \\ -8x_3 - \dfrac{x_3^3}{1+t^2x_2^4} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \left(f(t,x,u)u + g(t,x,u)u^2 + 5h(t,x,u)\frac{u}{1-|u|} \right), \quad t \geq 0,$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)^*$, $|u| < 1$, f, g, h — непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям $|f(t,x,u)| \leq 2$, $|g(t,x,u)| \leq 1$, $h(t,x,u) \geq 1$. Представим эти системы в следующей форме

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -x_1 - \dfrac{2x_2x_3}{1+t} - x_1^3 \\ \dfrac{3x_1x_3}{1+t} - 4x_2^3 \\ -\dfrac{x_3^3}{1+t^2x_2^4} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \left(f(t,x,u)u + g(t,x,u)u^2 + 5h(t,x,u)\frac{u}{1-|u|} - 8 \right),$$

здесь

$$a(t,x) = \begin{pmatrix} -x_1 - \dfrac{2x_2x_3}{1+t} - x_1^3 \\ \dfrac{3x_1x_3}{1+t} - 4x_2^3 \\ -\dfrac{x_3^3}{1+t^2x_2^4} \end{pmatrix}, \qquad b(t,x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

$$p(t,x,u) = f(t,x,u)u + g(t,x,u)u^2 + 5h(t,x,u)\frac{u}{1-|u|} - 8.$$

Проверим, что при

$$\psi(z) = \frac{z}{|z|+1}\,, \;\; v(t,x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2$$

выполняются условия теоремы. Легко видеть, что

$$|\psi(z)| < 1,$$

$$2\|x\|^2 \le v(t,x) \le 3\|x\|^2,$$

$$\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial v(t,x)}{\partial x} a(t,x) = -6x_1^2 - 6x_1^4 - 16x_2^4 - 6\frac{x_3^4}{1+t^2x_2^4} \le 0,$$

$$B(t,x) = 6x_1^2 + 8x_2^2 + 6x_3^2,$$

$$p_0(t,x,z) = -p(t,x,\psi(z)) =$$
$$= -f(t,x,\psi(z))\psi(z) - g(t,x,\psi(z))\psi^2(z) - 5h(t,x,\psi(z))\frac{\psi(z)}{1-|\psi(z)|} + 8.$$

Тогда

$$z(t,x)p_0(t,x,z(t,x)) =$$
$$= -f(t,x,\psi(z(t,x)))z(t,x) - g(t,x,\psi(z(t,x)))\psi^2(z(t,x))z(t,x) -$$
$$-5h(t,x,\psi(z(t,x)))\frac{\psi(z(t,x))}{1-|\psi(z(t,x))|}z(t,x) + 8z(t,x).$$

Так как $z(t,x) = -q(t,x)B(t,x)$, то $z(t,x) \le -6q(t,x)\|x\|^2$, следовательно

$$z(t,x)p_0(t,x,z(t,z)) \le 3|z(t,x)| - 5|z(t,x)|^2 - 48q(t,x)\|x\|^2.$$

Из последнего неравенства вытекает, что можно положить

$$a_1(t,x) = 3, \quad a_2(t,x) = 5, \quad a_3(t,x) = 0, \quad b_1 = 48.$$

Положив $d(t,x) = 2$, получаем

$$q(t,x) = \frac{5}{6x_1^2 + 8x_2^2 + 6x_3^2 + 2}.$$

Наконец,

$$a_1(t,x)\|B(t,x)\| = 3(6x_1^2 + 8x_2^2 + 6x_3^2) \le 24\|x\|^2,$$

так что можно положить $c_3 = 24$.

Итак, выполнены условия теоремы. Следовательно, управление

$$u(t,x) = \psi(z(t,x)) = \frac{z(t,x)}{|z(t,x)|+1},$$

$$z(t,x) = -\frac{5(3x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2)}{3x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 1}$$

экспоненциально стабилизирует данные системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коробов В. И. Метод функции управляемости. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2007. – 576 с.
2. Коробов В. И., Луценко А. В. Робастная стабилизация одного класса нелинейных систем. АиТ (в печати).
3. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. – 303 с.
4. Bacciotti A., Rosier L. Liapunov functions and stability in control theory. Springer-Verlag, Berlin, 2005.
5. Battilotti S. Robust stabilization of nonlinear systems with pointwise norm- bounded uncertainties: a control Lyapunov function approach. IEEE Transactions on Automatic Control. 1999. v. 44, №1, P. 3-17.
6. Ceragioli F. Some remarks on stabilization by means of discontinuous feedbacks. Systems and Control Letters, 45 (2002), P. 271-281.
7. Clarke F., Ledyaev Yu., Sontag E., Subbotin A. Asymptotic controllability implies feedback stabilization, IEEE Trans. Autom. Control 42 (1997), P. 1394-1407.
8. Coron J. Stabilization in finite time of locally controllable systems by means of continuous time-varying feedbacks laws, SIAM J. Contr. Opt. 33 (1995), P. 804-833.
9. Hudon N. Dissipative decomposition and feedback stabilization of nonlinear control systems. Queens University. Kingston, Ontario, Canada, 2010.
10. Isidori A. Nonlinear control systems. Springer-Verlag, New York, 1999.
11. Jiang Z. Robust exponential regulation of nonholonomic systems with uncertainties, Automatica J. IF AC 36 (2000), P. 189-200.
12. Khalil H. Nonlinear systems. Prentice Hall, New York, 2002.
13. Marquez H. Nonlinear control systems.John Wiley@Sons Inc., 2003.
14. Nguang S., Fu M. Global quadratic stabilization of a class of nonlinear systems. Int. J. Robust Nonlinear Control. 8. 1998. P. 483-497.
15. Prieur C. Asymptotic controllability and robust asymptotic stabilizability, SIAM J. Contr. Opt., 43(5) (2005), P. 1888-1912.
16. Prieur C., Trelat E. Robust optimal stabilization of the Brockett integrator via a hybrid feedback. Math. Control Signals Systems, 13 (3) (2005), P. 201-216.
17. Prieur C. Robust stabilization of nonlinear control systems by means of hybrid feedbacks. Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino - Vol. 64, 1(2006), P. 25-38.
18. Slotin J-J., Li W. Applied nonlinear control. Prentice Hall, Inc., 1991.

Статья получена: 18.10.2013; окончательный вариант: 15.11.2013; принята: 16.12.2013.