Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.518.88 № 1030, 2012, с.71–78

Пошаговое решение матричной проблемы моментов на компактном интервале. 1.

И. Ю. Серикова

Харьковский национальный университет,
майдан Свободы, 4, 61022, Харьков, Украина.
Irina.Serikova@karazin.ua

В статье получен аналог шуровского пошагового процесса решения проблемы моментов на компактном интервале. Приведены явные формулы для обобщенных параметров Шура.
Ключевые слова: матричная проблема моментов на компактном интервале, произведение Бляшке-Потапова, обобщенные параметры Шура, пошаговый процесс Шура.

Сєрікова I. Ю., **Покроковий розв'язок матричної проблеми моментів на компактному інтервалі. 1.** У статті отримано аналог шуровського покрокового процесу розв'язку проблеми моментів на компактному інтервалі. Наведено явні формули для узагальнених параметрів Шура.
Ключові слова: матрична проблема моментів, добуток Бляшке-Потапова, узагальнені параметри Шура, покроковий процес Шура.

I. Yu. Serikova, **Step by step solution of the matrix moment problem on the compact interval. 1.** Step by step process solution matrix moment problem on a compact interval has been considered. Explicit formulas for generalized Schur parameters has been obtained.
Keywords: the matrix moment problem, Blaschke-Potapov product, generalized Schur parameters, step by step Shur process.

2000 Mathematics Subject Classification 47A57, 42A82.

1. Введение

Пусть дана последовательность комплексных $m \times m$ матриц $\{s_j\}_{j=0}^{l}$. В матричной проблеме моментов на компактном интервале $[a,\ b]$ требуется описать все монотонно возрастающие матрицы-функции (далее по тексту - МФ) σ, принимающие значения во множестве эрмитовых $m \times m$ матриц, такие, что

$$\int_a^b t^j d\sigma(t) = s_j, \qquad 0 \le j \le l. \tag{1}$$

Множество решений σ этой проблемы моментов обозначим через $\mathcal{M}_l$. При $a = 0$, $b = 1$ и $m = 1$ проблема моментов (1) была исследована в статье Хаусдорфа [1]. При произвольных $a < b$ и $m = 1$ проблема моментов (1) была исследована М.Г. Крейном (см., например, [2]). При $a < b$ и $m \ge 1$ проблема моментов (1) была исследована в статье [3].

С каждой $\sigma \in \mathcal{M}_l$ свяжем МФ

$$s(z) = \int_a^b \frac{d\sigma(t)}{t - z}.$$

МФ s называется *ассоциированной* с проблемой моментов (1). Множество МФ s, ассоциированных с проблемой (1), обозначим символом $\mathcal{F}_l$. Из формулы обращения Стилтьеса следует, что при нормировке $\sigma(a) = 0$, $\sigma(t-0) = \sigma(t)$, $t \in (a, b]$ соответствие между $\mathcal{F}_l$ и $\mathcal{M}_l$, является взаимно однозначным. Поэтому, вместо описания множества $\mathcal{M}_l$, мы можем ограничиться описанием множества $\mathcal{F}_l$. Рассмотрим матричную проблему с четным количеством моментов, т.е. $l = 2n+1$, $n \in \{\mathbb{N} \cup 0\}$.

С проблемой (1) свяжем следующие блочные матрицы

$$T_{(n)} = \begin{bmatrix} 0_m & \cdots & 0_m & 0_m \\ I_m & \cdots & 0_m & 0_m \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_m & \cdots & I_m & 0_m \end{bmatrix}, \; v_{(n)} = \begin{bmatrix} I_m \\ 0_m \\ \vdots \\ 0_m \end{bmatrix}, u_{(n)} = -\begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix},$$

$$R_{T,(n)}(z) = (I_{m(n+1)} - zT_{(n)})^{-1} = \begin{bmatrix} I_m & 0_m & \cdots & 0_m \\ zI_m & I_m & \cdots & 0_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z^n I_m & z^{n-1} I_m & \cdots & I_m \end{bmatrix}, \tag{2}$$

$$\tilde{H}_{1,(n)} = \begin{bmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_n \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n} \end{bmatrix}, \quad \tilde{H}_{2,(n)} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_{n+1} \\ s_2 & s_3 & \cdots & s_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n+1} & s_{n+2} & \cdots & s_{2n+1} \end{bmatrix},$$

$$u_{1,(n)} = R_{T,(n)}^{-1}(a) u_{(n)}, \quad u_{2,(n)} = -R_{T,(n)}^{-1}(b) u_{(n)},$$
$$H_{1,(n)} = -a\tilde{H}_{1,(n)} + \tilde{H}_{2,(n)}, \; H_{2,(n)} = b\tilde{H}_{1,(n)} - \tilde{H}_{2,(n)}.$$

Имеет место *тождество сплетения*

$$(a-b) R_{T,(n)}(a) v_{(n)} u_{1,(n)}^* R_{T,(n)}^*(a) = R_{T,(n)}^{-1}(b) R_{T,(n)}(a) H_{1,(n)} + H_{2,(n)}. \tag{3}$$

Определение 1. *Проблема моментов (1) называется вполне неопределенной, если $H_{1,(n)} > 0$, $H_{2,(n)} > 0$.*

Определение 2. *МФ*

$$U_{(n)}(z) = \left[\begin{array}{c|c} \alpha_{(n)}(z) & \beta_{(n)}(z) \\ \hline \gamma_{(n)}(z) & \delta_{(n)}(z) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_m - (z-a)u_2^* R_T^*(\bar{z}) H_2^{-1} R_T(a) v & u_1^* R_T^*(\bar{z}) H_1^{-1} R_T(a) u_1 \\ \hline (z-a)(z-b) v^* R_T^*(\bar{z}) H_2^{-1} R_T(a) v & I_m + (z-a) v^* R_T^*(\bar{z}) H_1^{-1} R_T(a) u_1 \end{array}\right] \tag{4}$$

называется резольвентной матрицей проблемы моментов (1).

Определение 3. *Пара мероморфных в $\mathbb{C}\setminus[a,\ b]$ МФ $[p,\ q]$ называется $\mathcal{R}[a,\ b]$ – парой, если существует дискретное в $\mathbb{C}\setminus[a,\ b]$ множество $\mathcal{D}_{pq}$, такое, что*

$$(i) \quad \text{МФ } p \text{ и } q \text{ голоморфны в } \mathbb{C}\setminus\{\mathcal{D}_{pq}\cup[a,\ b]\},$$

$$(ii) \quad [p(z),\ q(z)] \begin{bmatrix} p^*(z) \\ q^*(z) \end{bmatrix} > 0_m,\ z\in\mathbb{C}\setminus\{\mathcal{D}_{pq}\cup[a,b]\},$$

$$(iii) \quad [(z-a)p(z),\ q(z)]\,\frac{J}{\imath(\bar{z}-z)} \begin{bmatrix} (\bar{z}-a)p^*(z) \\ q^*(z) \end{bmatrix} \ge 0_m,\ z\in\mathbb{C}_\pm\setminus\mathcal{D}_{pq},$$

$$(iv) \quad [(b-z)p(z),\ q(z)]\,\frac{J}{\imath(\bar{z}-z)} \begin{bmatrix} (b-\bar{z})p^*(z) \\ q^*(z) \end{bmatrix} \ge 0_m,\ z\in\mathbb{C}_\pm\setminus\mathcal{D}_{pq}.$$

Пусть $m\times m$ МФ Q мероморфна и мероморфно обратима в $\mathbb{C}\setminus[a,\ b]$. Обозначим $\mathcal{D}_Q$ дискретное в $\mathbb{C}\setminus[a,\ b]$ множество особых точек МФ Q и Q^{-1}. Две $\mathcal{R}[a,\ b]$–пары $[p_1(z),\ q_1(z)]$ и $[p_2(z),\ q_2(z)]$ назовем эквивалентными, если для всех $z\in\mathbb{C}\setminus\{[a,\ b]\cup\mathcal{D}_{p_1q_1}\cup\mathcal{D}_{p_2q_2}\cup\mathcal{D}_Q\}$ выполнены равенства $p_2(z)=p_1(z)Q(z)$, $q_2(z)=q_1(z)Q(z)$. Множество классов эквивалентности $\mathcal{R}[a,\ b]$–пар обозначим через $\mathcal{R}_\infty[a,\ b]$.

Теорема 1 (A.E. Choce Rivero, Yu.M. Dyukarev, B. Fritzshe, B. Kirstein [3]). *Пусть задана проблема моментов (1). И пусть МФ $\alpha_{(n)}$, $\beta_{(n)}$, $\gamma_{(n)}$, $\delta_{(n)}$ определены в (4). Тогда дробно-линейное преобразование*

$$\begin{aligned} s(z) &= U_{(n)}(z)\left\{\begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix}\right\} = \\ &= \{\alpha_k(z)p(z)+\beta_k(z)q(z)\}\{\gamma_k(z)p(z)+\delta_k(z)q(z)\}^{-1} \end{aligned} \tag{5}$$

задает взаимно однозначное соответствие между $\mathcal{F}_{2n+1}$ и $\mathcal{R}_\infty[a,\ b]$.

Приведем результаты по мультипликативной структуре резольвентной матрицы проблемы моментов, следуя работе [4].

Рассмотрим блочное представление матриц $H_{r,(n)}$

$$H_{r,(n)} = \begin{bmatrix} H_{r,(n-1)} & B_{r,(n)} \\ B_{r,(n)}^* & C_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{nm} & 0_{nm\times m} \\ B_{r,(n)}^* H_{r,n}^{-1} & I_m \end{bmatrix}\times$$
$$\times\begin{bmatrix} H_{r,(n-1)} & 0_{nm\times m} \\ 0_{m\times nm} & \hat{H}_{r,n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{nm} & H_{r,n}^{-1}B_{r,(n)} \\ 0_{m\times nm} & I_m \end{bmatrix},$$

здесь

$$\hat{H}_{r,n} = C_r - B^*_{r,(n)} H^{-1}_{r,(n-1)} B_{r,(n)}, \quad r = 1, 2. \tag{6}$$

Пусть матрицы $w_{1,n}$ и $\hat{v}_n$, $n \in \mathbb{N}$ определены формулами

$$\begin{aligned} &w_{1,n} = -s_n - B^*_{1,(n)} H^{-1}_{1,(n-1)} R_{T,(n-1)}(a) u_{1,(n-1)}, \ w_{1,0} = u_{1,(0)} = -s_0, \\ &\hat{v}_n = a^n I_m - B^*_{2,(n)} H^{-1}_{2,(n-1)} R_{T,(n-1)}(a) v_{(n-1)}, \ \hat{v}_0 = I_m, \ w_{2,n} = -w_{1,n}. \end{aligned} \tag{7}$$

Определение 4. *МФ*

$$\begin{aligned} b_p(z) &= \left[\begin{array}{c|c} \hat{\alpha}_{(p)}(z) & \hat{\beta}_{(p)}(z) \\ \hline \hat{\gamma}_{(p)}(z) & \hat{\delta}_{(p)}(z) \end{array} \right] = \\ &= \left[\begin{array}{c|c} I_m - (z-a) w^*_{2,p} \hat{H}^{-1}_{2,p} \hat{v}_p & w^*_{1,p} \hat{H}^{-1}_{1,p} w_{1,p} \\ \hline (z-a)(z-b) \hat{v}^*_p \hat{H}^{-1}_{2,p} \hat{v}_p & I_m + (z-a) \hat{v}^*_p \hat{H}^{-1}_{1,p} w_{1,p} \end{array} \right] \end{aligned} \tag{8}$$

называются множителями Бляшке-Потапова матричной проблемы моментов (1) $(0 \le p \le n)$.

Теорема 2 (И.Ю. Серикова [4]). *Резольвентная матрица* $U_{(n)}(z)$ *вполне неопределенной проблемы моментов (1) допускает мультипликативное представление*

$$U_{(n)}(z) = b_0(z) \times b_1(z) \times \cdots \times b_n(z), \tag{9}$$

здесь множители Бляшке-Потапова $b_p(z)$ *определяются формулой (8).*

2. Обобщенные параметры Шура.

Определение 5. *Обобщенными параметрами Шура для вполне неопределенной проблемы моментов (1) называются матрицы* $(k > 0)$

$$\begin{aligned} &\hat{s}_{0,0} = s_0, \quad \hat{s}_{1,0} = s_1, \\ &\hat{s}_{0,k} = \frac{1}{b-a} \hat{v}_k^{-1} \left((b-a) s_{2k} - B^*_{1,(k)} H^{-1}_{1,(k-1)} B_{1,(k)} - B^*_{2,(k)} H^{-1}_{2,(k-1)} B_{2,(k)} \right) \hat{v}_k^{-1*}, \\ &\hat{s}_{1,k} = \frac{1}{b-a} \hat{v}_k^{-1} \left((b-a) s_{2k+1} - b B^*_{1,(k)} H^{-1}_{1,(k-1)} B_{1,(k)} - a B^*_{2,(k)} H^{-1}_{2,(k-1)} B_{2,(k)} \right) \hat{v}_k^{-1*}, \end{aligned} \tag{10}$$

здесь $\hat{H}_{1,k}$, $\hat{H}_{2,k}$, $\hat{v}_k$ *определяются формулами (6) и (7).*

Замечание 1. *Обратимость матриц* $\hat{v}_k$ *следует из (см. [4])*

$$(a-b) \hat{v}_k w^*_{1,k} = \hat{H}_{1,k} + \hat{H}_{2,k} > 0_m. \tag{11}$$

Лемма 1. *Пусть дана вполне неопределенная проблема моментов (1). Матрицы $w_{1,k}$ (7) допускают представление*

$$a^k w_{1,k} = -s_{2k} + B^*_{1,(k)} H^{-1}_{1,(k-1)} \tilde{B}_{1,(k)}. \tag{12}$$

Здесь

$$\tilde{B}_{1,(k)} = \begin{pmatrix} s_k \\ \vdots \\ s_{2k-1} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Запишем равенство (12) в эквивалентном виде (см. (7))

$$s_{2k} = B^*_{1,(k)} H^{-1}_{1,(k-1)} \left(a^k u_{(k-1)} + \tilde{B}_{1,(k)} \right) + a^k s_k. \tag{13}$$

Получим

$$s_{2k} - B^*_{1,(k)} H^{-1}_{1,(k-1)} \left(a^k u_{(k-1)} + \tilde{B}_{1,(k)} \right) - a^k s_k = s_{2k} - B^*_{1,(k)} H^{-1}_{1,(k-1)} \times$$
$$\times \left(a^{k-1} h_1 + a^{k-2} h_2 + \cdots + h_k \right) - a^k s_k.$$

Здесь $h_i \in \mathbb{C}^{km\times m}$ – i-й столбец блочной матрицы $H_{1,(k-1)}$.

Из (6) окончательно получим

$$s_{2k} - B^*_{1,(k)} \left(a^{k-1} \begin{pmatrix} I_m \\ 0_m \\ \vdots \\ 0_m \end{pmatrix} + a^{k-2} \begin{pmatrix} 0_m \\ I_m \\ \vdots \\ 0_m \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0_m \\ 0_m \\ \vdots \\ I_m \end{pmatrix} \right) -$$
$$- a^k s_k = s_{2k} - \left(a^k s_k - s_{2k} \right) - a^k s_k = 0_m.$$

Лемма 1 доказана.

Теорема 3. *Множители Бляшке–Потапова (8) представимы в виде*

$$b_k(z) = \left[\begin{array}{c|c} I_m + (z-a)\hat{s}_{0,k}(b\hat{s}_{0,k} - \hat{s}_{1,k})^{-1} & \hat{s}_{0,k}(-a\hat{s}_{0,k} + \hat{s}_{1,k})^{-1}\hat{s}_{0,k} \\ \hline (z-a)(z-b)(b\hat{s}_{0,k} - \hat{s}_{1,k})^{-1} & I_m - (z-a)(-a\hat{s}_{0,k} + \hat{s}_{1,k})^{-1}\hat{s}_{0,k} \end{array} \right], \tag{14}$$

здесь $\hat{s}_{0,k}$, $\hat{s}_{1,k}$ – обобщенные параметры Шура (10).

Доказательство. Покажем, что матрицы $-a\hat{s}_{0,k} + \hat{s}_{1,k}$ и $b\hat{s}_{0,k} - \hat{s}_{1,k}$ обратимы. Имеем

$$- a\hat{s}_{0,k} + \hat{s}_{1,k} = \frac{1}{b-a} \hat{v}_k^{-1} \left((b-a)(-as_{2k} + s_{2k+1}) + aB^*_{1,(k)} H^{-1}_{1,(k-1)} B_{1,(k)} + \right.$$
$$\left. + aB^*_{2,(k)} H^{-1}_{2,(k-1)} B_{2,(k)} - bB^*_{1,(k)} H^{-1}_{1,(k-1)} B_{1,(k)} - aB^*_{2,(k)} H^{-1}_{2,(k-1)} B_{2,(k)} \right) \hat{v}_k^{-1*} =$$
$$= \hat{v}_k^{-1} \left((-as_{2k} + s_{2k+1}) - B^*_{1,(k)} H^{-1}_{1,(k-1)} B_{1,(k)} \right) \hat{v}_k^{-1*} =$$
$$= \hat{v}_k^{-1} \left(C_1 - B^*_{1,(k)} H^{-1}_{1,(k-1)} B_{1,(k)} \right) \hat{v}_k^{-1*} = \hat{v}_k^{-1} \hat{H}_{1,k} \hat{v}_k^{-1*} > 0_m.$$

В этой цепочке равенств первое следует из (10), а третье и четвёртое – из (6). Таким образом,

$$\hat{H}_{1,k} = \hat{v}_k \left(-a\hat{s}_{0,k} + \hat{s}_{1,k}\right) \hat{v}_k^*. \tag{15}$$

Аналогично,

$$b\hat{s}_{0,k} - \hat{s}_{1,k} = \frac{1}{b-a}\hat{v}_k^{-1} \Big((b-a)(bs_{2k} - s_{2k+1}) - bB^*_{1,(k)}H^{-1}_{1,(k-1)}B_{1,(k)} -$$
$$-bB^*_{2,(k)}H^{-1}_{2,(k-1)}B_{2,(k)} + bB^*_{1,(k)}H^{-1}_{1,(k-1)}B_{1,(k)} + aB^*_{2,(k)}H^{-1}_{2,(k-1)}B_{2,(k)}\Big)\, \hat{v}_k^{-1*} =$$
$$= \hat{v}_k^{-1}\left((bs_{2k} - s_{2k+1}) - B^*_{2,(k)}H^{-1}_{2,(k-1)}B_{2,(k)}\right)\hat{v}_k^{-1*} =$$
$$= \hat{v}_k^{-1}\left(C_2 - B^*_{2,(k)}H^{-1}_{2,(k-1)}B_{2,(k)}\right)\hat{v}_k^{-1*} = \hat{v}_k^{-1}\hat{H}_{2,k}\hat{v}_k^{-1*} > 0_m.$$

Таким образом,

$$\hat{H}_{2,k} = \hat{v}_k \left(b\hat{s}_{0,k} - \hat{s}_{1,k}\right) \hat{v}_k^*. \tag{16}$$

Из вполне неопределённости и представления (6) следует, что $\hat{H}_{1,k} > 0$ и $\hat{H}_{2,k} > 0$. Из невырожденности $\hat{v}_k$ и формул (15), (16) следует обратимость $-a\hat{s}_{0,k} + \hat{s}_{1,k}$ и $b\hat{s}_{0,k} - \hat{s}_{1,k}$ соответственно.

Для $w_{1,k}\hat{v}_k^*$ имеем

$$(a-b)w_{1,k}\hat{v}_k^* = (a-b)\left(-s_k - B^*_{1,(k)}H^{-1}_{1,(k-1)}R_{T,(k-1)}(a)u_{1,(k-1)}\right)\Big(a^kI_m -$$
$$-v^*_{(k-1)}R^*_{T,(k-1)}(a)H^{-1}_{2,(k-1)}B_{2,(k)}\Big) = -a^k(a-b)s_k - a^k(a-b)B^*_{1,(k)}H^{-1}_{1,(k-1)}\times$$
$$\times R_{T,(k-1)}(a)u_{1,(k-1)} + (a-b)s_kv^*_{(k-1)}R^*_{T,(k-1)}(a)H^{-1}_{2,(k-1)}B_{2,(k)} + (a-b)\times$$
$$\times B^*_{1,(k)}H^{-1}_{1,(k-1)}R_{T,(k-1)}(a)u_{1,(k-1)}v^*_{(k-1)}R^*_{T,(k-1)}(a)H^{-1}_{2,(k-1)}B_{2,(k)} =$$
$$= -a^k(a-b)s_k - a^k(a-b)B^*_{1,(k)}H^{-1}_{1,(k-1)}R_{T,(k-1)}(a)u_{1,(k-1)} + (a-b)s_k\times$$
$$\times v^*_{(k-1)}R^*_{T,(k-1)}(a)H^{-1}_{2,(k-1)}B_{2,(k)} + B^*_{1,(k)}H^{-1}_{1,(k-1)}\Big(H_{1,(k-1)}R^*_{T,(k-1)}(a)\times$$
$$\times R^{-1*}_{T,(k-1)}(b) + H_{2,(k-1)}\Big)H^{-1}_{2,(k-1)}B_{2,(k)} = -a^k(a-b)s_k - a^k(a-b)\times$$
$$\times B^*_{1,(k)}H^{-1}_{1,(k-1)}R_{T,(k-1)}(a)u_{1,(k-1)} + (a-b)s_kv^*_{(k-1)}R^*_{T,(k-1)}(a)H^{-1}_{2,(k-1)}\times$$
$$\times B_{2,(k)} + B^*_{1,(k)}R^*_{T,(k-1)}(a)R^{-1*}_{T,(k-1)}(b)H^{-1}_{2,(k-1)}B_{2,(k)} + B^*_{1,(k)}H^{-1}_{1,(k-1)}B_{2,(k)}.$$

В этой цепочке равенств первое равенство следует из (7), а третье – из (3).

Далее имеем

$$(a-b)w_{1,k}\hat{v}_k^* = -a^k(a-b)s_k + B^*_{1,(k)}H^{-1}_{1,(k-1)}\Big(-a^k(a-b)R_{T,(k-1)}(a)u_{1,(k-1)} +$$
$$+B_{2,(k)}\Big) + \left((a-b)s_kv^*_{(k-1)} + B^*_{1,(k)}R^{-1*}_{T,(k-1)}(b)\right)R^*_{T,(k-1)}(a)H^{-1}_{2,(k-1)}B_{2,(k)}.$$

Из очевидного равенства

$$R^{-1}_{T,(k-1)}(b)B_{1,(k)} + R^{-1}_{T,(k-1)}(a)B_{2,(k)} = (b-a)v_{(k-1)}s_k$$

и равенства (13) получим

$$(a-b)w_{1,k}\hat{v}_k^{*}=-\,a^k(a-b)s_k+B_{1,(k)}^{*}H_{1,(k-1)}^{-1}\Big(-a^k(a-b)u_{(k-1)}+B_{1,(k)}+B_{2,(k)}\Big)-$$
$$-\,B_{1,(k)}^{*}H_{1,(k-1)}^{-1}B_{1,(k)}-B_{2,(k)}^{*}H_{2,(k-1)}^{-1}B_{2,(k)}=a^k(b-a)s_k+(b-a)B_{1,(k)}^{*}H_{1,(k-1)}^{-1}\times$$
$$\times\Big(a^k u_{(k-1)}+\tilde{B}_{1,(k)}\Big)-B_{1,(k)}^{*}H_{1,(k-1)}^{-1}B_{1,(k)}-B_{2,(k)}^{*}H_{2,(k-1)}^{-1}B_{2,(k)}=$$
$$=(b-a)s_{2k}-B_{1,(k)}^{*}H_{1,(k-1)}^{-1}B_{1,(k)}-B_{2,(k)}^{*}H_{2,(k-1)}^{-1}B_{2,(k)}.$$

Отсюда

$$w_{1,k}=-\hat{v}_k\hat{s}_{0,k},\qquad\qquad w_{2,k}=\hat{v}_k\hat{s}_{0,k}$$

И из (15), (16) следует представление (14).

Теорема 3 доказана.

3. Пошаговый процесс Шура.

Теорема 4. *Пусть дана усеченная вполне неопределенная проблема моментов (1) и множители Бляшке–Потапова b_k определены формулой (8). Тогда множество всех ассоциированных МФ $\mathcal{F}_{2n+1}$ описывается суперпозицией дробно-линейных преобразований*

$$s(z)=b_0(z)\left\{\cdots b_{n-1}(z)\left\{b_n(z)\left\{\begin{bmatrix} p(z)\\ q(z)\end{bmatrix}\right\}\right\}\cdots\right\},\qquad \begin{bmatrix} p(z)\\ q(z)\end{bmatrix}\in\mathcal{R}_\infty[a,\ b].$$

Здесь $(0\le k\le n)$

$$b_k(z)\left\{\begin{bmatrix} p(z)\\ q(z)\end{bmatrix}\right\}:=\Big[\hat{\alpha}_k(z)p(z)+\hat{\beta}_k(z)q(z)\Big]\Big[\hat{\gamma}_k(z)p(z)+\hat{\delta}_k(z)q(z)\Big]^{-1},\qquad(17)$$

а $\hat{\alpha}_k,\ \hat{\beta}_k,\ \hat{\gamma}_k,\ \hat{\delta}_k$ *определены в (8).*

Доказательство. При $k=0$ корректность дробно-линейного преобразования (17) следует из равенства $b_0(z)=U_0(z)$ и теоремы 1. Из формулы (14) следует, что все множители Бляшке–Потапова $b_k(z)$ имеют структуру аналогичную структуре резольвентной матрицы $U_0(z)$. Таким образом, преобразование (17) определено корректно для всех $k\ge 0$. В частности, определены дробно-линейные преобразования над парой $\mathrm{col}[s(z),\ I_m]\in\mathcal{R}_\infty[a,\ b]$, здесь $s(z)$– неванлинновская матрица-функция, удовлетворяющая условиям $s(x)\ge 0_m,\ x\in(-\infty,\ a)$ и $s(x)\le 0_m,\ x\in(b,\ +\infty)$.

$$b_k(z)\left\{\begin{bmatrix} s(z)\\ I_m\end{bmatrix}\right\},$$

которые обозначим

$$b_k(z)\{s(z)\}:=b_k(z)\left\{\begin{bmatrix} s(z)\\ I_m\end{bmatrix}\right\}.$$

Таким образом, корректно определена суперпозиция дробно-линейных преобразований

$$b_0(z)\left\{\cdots b_{k-1}(z)\left\{b_k(z)\left\{\begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix}\right\}\right\}\cdots\right\}$$

для $\mathrm{col}[p(z),\ q(z)] \in \mathcal{R}_\infty[a,\ b]$, $k \geq 0$. Эта суперпозиция является дробно-линейным преобразованием, матрица которого равна произведению $b_0(z) \times b_1(z) \times \cdots \times b_n(z)$. Далее имеем

$$b_0(z)\left\{\cdots b_{n-1}(z)\left\{b_n(z)\left\{\begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix}\right\}\right\}\cdots\right\} =$$
$$= (b_0(z) \times b_1(z) \times \cdots \times b_n(z))\left\{\begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix}\right\} = U_{(n)}(z)\left\{\begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix}\right\} = s(z).$$

Здесь второе равенство следует из (9), а третье – из (5).

Теорема 4 доказана.

Список литературы

1. Hausdorff F. Momentenprobleme für ein endliches Intervall / Hausdorff F. // Math.Zeitschr. – 1923. – N 16. – P. 220-248.

2. Крейн М.Г. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи / Крейн М.Г., Нудельман А.А. – Москва: Наука, 1973. – 552 с.

3. Dyukarev Yu.M. A truncated matricial moment problem on finate interval / A.E. Choce Rivero, Yu.M. Dyukarev, B. Fritzshe, B. Kirstein // Operator Theory: Advanced and Application. – 2006. – Vol. 165. – P. 121–173.

4. Серикова И.Ю. Мультипликативная структура резольвентной матрицы проблемы моментов на компактном интервале (случай четного количества моментов) / И.Ю. Серикова // Вісник Харківського національного університету, серія «Математика, прикладна математика і механіка». – 2007. – № 790. – С. 133–140.

Статья получена: 01.09.2012; окончательный вариант: 01.11.2012; принята: 15.11.2012.